Bir Denklem Sistemi ile Kapalı Olarak Tanımlanan Fonksiyonlar

$$\left.\begin{aligned} F(u,v,x,y)&=0 \\ G(u,v,x,y)&=0 \end{aligned}\right\}$$

şeklinde bir denklem sistemi verilmiş olsun. Bu denklem sisteminin iki tane $u=f(x,y)$ ve $v=g(x,y)$ gibi iki kapalı fonksiyonlarını aşağıdaki teorem yardımıyla belirleyebiliriz.

Tanım: Bir (u_0,v_0,x_0,y_0) sayı kümesini göz önüne alalım. $\delta>0$ olmak üzere

$|u-u_0|<\delta$, $|v-v_0|<\delta$, $|x-x_0|<\delta$, $|y-y_0|<\delta$ eşitsizliklerini gerçekleyen (u,v,x,y) kümesini N_δ ile gösterelim. N_δ kümesine 4-boyutlu uzayda (u_0,v_0,x_0,y_0) noktasının bir δ komşuluğu (civarı) denir.

Teorem: (Varlık Teoremi)

$$\left.\begin{aligned} F(u,v,x,y)&=0 \\ G(u,v,x,y)&=0 \end{aligned}\right\}$$ denklem sistemi verildiğinde

1) F ve G fonksiyonlarının ortak tanım bölgesindeki (u_0,v_0,x_0,y_0) noktasında

$$F(u_0,v_0,x_0,y_0)=0 \quad \text{ve} \quad G(u_0,v_0,x_0,y_0)=0$$

ise;

2) (u_0, v_0, x_0, y_0) noktasının bir N_δ komşuluğunda F'_u, F'_v, F'_x, F'_y ve G'_u, G'_v, G'_x, G'_y kısmi türevleri mevcut ve sürekli iseler;

3) $\left.\dfrac{D(F,G)}{D(u,v)}\right|_{(u_0,v_0,x_0,y_0)} \neq 0$ ise

o zaman (x_0, y_0) noktasının uygun bir $|x-x_0|<\eta$, $|y-y_0|<\eta$ komşuluğunda tanımlı, sürekli ve birinci mertebeden kısmi türevlere sahip

$$F\left[f(x,y), g(x,y), x, y\right] = 0$$

$$G\left[f(x,y), g(x,y), x, y\right] = 0$$

şartını sağlayan $u_0 = f(x_0, y_0)$, $v_0 = g(x_0, y_0)$ olan tek bir

$$u = f(x,y) \quad , \quad v = g(x,y)$$

fonksiyon çifti vardır.

İSPAT : 3. koşula göre $\left.\dfrac{D(F,G)}{D(u,v)}\right|_{(u_0,v_0,x_0,y_0)} \neq 0$ olmalıdır.

$$\frac{D(F,G)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial u} & \dfrac{\partial F}{\partial v} \\[2ex] \dfrac{\partial G}{\partial u} & \dfrac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix}$$

olduğundan (u_0,v_0,x_0,y_0) noktasında bu determinantın herhangi satırının veya sütunun her iki elemanı aynı anda sıfır olamaz. Yani örneğin;

$$\left.\begin{array}{l} F'_u(u_0,v_0,x_0,y_0) \neq 0 \\ F'_v(u_0,v_0,x_0,y_0) \neq 0 \end{array}\right\}$$

olmalıdır. Buna göre daha önce verilen kapalı fonksiyonların mevcudiyet teoremini $F(u,v,x,y)=0$ fonksiyonu için genelleştirirsek, gerekli olan koşullar burada mevcut olur. Yani tanım bölgesi içinde (u_0,v_0,x_0,y_0) noktası için $F(u_0,v_0,x_0,y_0)=0$ dır. Bu noktanın komşuluğunda birinci mertebeden kısmi türevler mevcut ve süreklidir ve de $F'_u(u_0,v_0,x_0,y_0) \neq 0$'dır. O halde (v_0,x_0,y_0) noktasının uygun bir komşuluğunda tanımlı ve sürekli, sürekli türevlere sahip $F[u(v,x,y),v,x,y]=0$ koşulunu sağlayan $u_0=u(v_0,x_0,y_0)$ olan tek bir $u=u(v,x,y)$ fonksiyonu vardır.

$F[u, v, x, y] = 0 \qquad u = u(v, x, y)$

bu bileşik fonksiyonun v'ye göre türevini alalım

$$\frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial v} \cdot 1 + \frac{\partial F}{\partial x} \cdot 0 + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot 0 = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial v} = - \frac{\partial F / \partial v}{\partial F / \partial u}$$

$u = u(v, x, y)$'yi G'de yerine yazalım;

$$G[u(v, x, y), v, x, y] = 0$$

1- koşula göre $G(u_0, v_0, x_0, y_0) = 0$

$\Rightarrow G[h(v_0, x_0, y_0), v_0, x_0, y_0] = 0$'dır.

2- koşula göre de G'nin birinci mertebeden kısmi türevleri mevcut ve sürekli'dir.

Şimdi $\dfrac{\partial G}{\partial v}$'nin sıfırdan farklı olduğunu gösterelim;

$$\left.\begin{array}{l} G(u,v,x,y)=0 \\ u=u(v,x,y) \end{array}\right\} \quad \underbrace{G[u(v,x,y),v,x,y]=0}$$

Bunun v'ye göre türevini alalım;

$$\frac{\partial G}{\partial v}=\frac{\partial G}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial v}+\frac{\partial G}{\partial v}\cdot 1+\frac{\partial G}{\partial x}\cdot 0+\frac{\partial G}{\partial y}\cdot 0$$

$$=\frac{\partial G}{\partial u}\cdot\left[-\frac{\partial F/\partial v}{\partial F/\partial u}\right]+\frac{\partial G}{\partial v}$$

$$=\frac{1}{\frac{\partial F}{\partial u}}\cdot\left[\frac{\partial G}{\partial v}\cdot\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{\partial G}{\partial u}\cdot\frac{\partial F}{\partial v}\right]$$

$$=\frac{1}{\frac{\partial F}{\partial u}}\;\frac{D(F,G)}{D(u,v)}$$

elde edilir. $F'_u(u_0,v_0,x_0,y_0)\neq 0$ olduğundan $\frac{\partial G}{\partial v}$ türevi (u_0,v_0,x_0,y_0) noktasında sıfırdan farklı olur. Buna göre $G[u(v,x,y),v,x,y]=0$ denklemi için kapalı fonksiyonun mevcudiyet teoremine göre koşullar sağlanır

Bu durumda (x_0,y_0) noktasının bir $|x-x_0|<\eta$, $|y-y_0|<\xi$ komşuluğunda tanımlı, sürekli ve birinci mertebeden kısmi türevleri mevcut $v_0=v(x_0,y_0)$ olan

$$G[u(v(x,y),x,y),\, g(x,y),\, x,y]=0$$

şartını sağlayan tek bir $v=v(x,y)$ fonksiyono mevcuttur. v'nin bu değerini daha önce tek olarak bulunan $u=u(v,x,y)$'de yerine yazarsak;

$$u=u[v(x,y),x,y]=f(x,y)$$

olacağından teorem ispatlanmış olur.

$$\boxed{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_y \to x \text{ ve } y \text{ bağımsız değişken}}$$

Ör/1.
$$\left.\begin{aligned} 2x^2-2y^2+\ln(u^2+v^2)&=0 \\ 2xy+\arctan\left(\frac{v}{u}\right)&=0 \end{aligned}\right\}$$
sistemiyle kapalı olarak verilen $u=u(x,y)$ $v=v(x,y)$ fonksiyonlarının birinci mertebeden kısmi türevlerini bulunuz.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=?\ ,\quad \frac{\partial v}{\partial x}=?\ ,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=?\ ,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=?$$

$$2x^2-2y^2+\ln(u^2+v^2)=0$$

$$2xy+\arctan\left(\frac{v}{u}\right)=0$$

Sistemi x'e göre türetelim;

$$4x-0+\frac{2u\frac{\partial u}{\partial x}+2v\frac{\partial v}{\partial x}}{u^2+v^2}=0 \Rightarrow 2u\frac{\partial u}{\partial x}+2v\frac{\partial v}{\partial x}=-4x(u^2+v^2)\,/v \qquad /-u$$

$$2y+\frac{\dfrac{\frac{\partial v}{\partial x}\cdot u-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot v}{u^2}}{1+\frac{v^2}{u^2}}=0 \Rightarrow u\cdot\frac{\partial v}{\partial x}-v\cdot\frac{\partial u}{\partial x}=-2y\cdot(u^2+v^2)\,/2u \qquad /2v$$

$$(2v^2+2u^2)\frac{\partial v}{\partial x}=-4xv(u^2+v^2)-4uy(u^2+v^2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-2xv-2uy=-2(vx+uy)$$

$$(-2u^2-2v^2)\frac{\partial u}{\partial x}=4ux(u^2+v^2)+4vy(u^2+v^2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-2ux-2vy=-2(ux+vy)$$

$$\left.\begin{array}{l} 2x^2-2y^2+\ln(u^2+v^2)=0 \\ 2xy+\arctan\left(\frac{v}{u}\right)=0 \end{array}\right\}$$ sistemini y'ye göre türetelim;

$$0-4y+\frac{2u\frac{\partial u}{\partial y}+2v\frac{\partial v}{\partial y}}{u^2+v^2}=0 \Rightarrow 2u\frac{\partial u}{\partial y}+2v\frac{\partial v}{\partial y}=4y\,(u^2+v^2)$$

$$2x+\frac{\dfrac{u\frac{\partial v}{\partial y}-v\cdot\frac{\partial u}{\partial y}}{u^2}}{1+\frac{v^2}{u^2}}=0 \Rightarrow u\frac{\partial v}{\partial y}-v\frac{\partial u}{\partial y}=-2x\,(u^2+v^2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2u\frac{\partial u}{\partial y}+2v\frac{\partial v}{\partial y}=4y(u^2+v^2) \\ -v\frac{\partial u}{\partial y}+u\frac{\partial v}{\partial y}=-2x(u^2+v^2) \end{cases}$$

Cramer yönt. göre;

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\begin{vmatrix} 4y(u^2+v^2) & 2v \\ -2x(u^2+v^2) & u \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2u & 2v \\ -v & u \end{vmatrix}}=\frac{4uy(u^2+v^2)+4vx(u^2+v^2)}{2u^2+2v^2}=2uy+2vx=2(uy+vx)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\begin{vmatrix} 2u & 4y(u^2+v^2) \\ -v & -2x(u^2+v^2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2u & 2v \\ -v & u \end{vmatrix}}=\frac{-4xu(u^2+v^2)+4vy(u^2+v^2)}{2u^2+2v^2}=-2ux+2vy=2(vy-ux)$$

$$\left.\begin{array}{l} F[u,v,x,y]=0 \\ G[u,v,x,y]=0 \end{array}\right\}$$

$$\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial x}\cdot 1+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot 0=0$$

$$\frac{\partial G}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial x}\cdot 1+\frac{\partial G}{\partial y}\cdot 0=0$$

$$\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial F}{\partial x}$$

$$\frac{\partial G}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial G}{\partial x}$$

Cramer yöntemine göre

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\begin{vmatrix} -\frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ -\frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix}}=-\frac{\dfrac{D(F,G)}{D(x,v)}}{\dfrac{D(F,G)}{D(u,v)}}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\dfrac{D(F,G)}{D(u,x)}}{\dfrac{D(F,G)}{D(u,v)}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\dfrac{D(F,G)}{D(y,v)}}{\dfrac{D(F,G)}{D(u,v)}}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\dfrac{D(F,G)}{D(u,y)}}{\dfrac{D(F,G)}{D(u,v)}}$$

$$\left.\begin{aligned} F(u,v,w,t) &= 0 \\ G(u,v,w,t) &= 0 \\ H(u,v,w,t) &= 0 \end{aligned}\right\}$$

3 denklem varsa
3 fonksiyon var
denklemde 4 değişken
olduğuna göre 3
fonksiyon tek bir
değişkenin fonksiyonudur.

$$\frac{du}{dt} = -\frac{\dfrac{D(F,G,H)}{D(t,v,w)}}{\dfrac{D(F,G,H)}{D(u,v,w)}} \qquad \frac{dw}{dt} = -\frac{\dfrac{D(F,G,H)}{D(u,v,t)}}{\dfrac{D(F,G,H)}{D(u,v,w)}}$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\dfrac{D(F,G,H)}{D(u,t,w)}}{\dfrac{D(F,G,H)}{D(u,v,w)}}$$

$$\frac{du}{dt} = -\frac{\begin{vmatrix} \partial F/\partial t & \partial F/\partial v & \partial F/\partial w \\ \partial G/\partial t & \partial G/\partial v & \partial G/\partial w \\ \partial H/\partial t & \partial H/\partial v & \partial H/\partial w \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial u} & \dfrac{\partial F}{\partial v} & \dfrac{\partial F}{\partial w} \\ \dfrac{\partial G}{\partial u} & \dfrac{\partial G}{\partial v} & \dfrac{\partial G}{\partial w} \\ \dfrac{\partial H}{\partial u} & \dfrac{\partial H}{\partial v} & \dfrac{\partial H}{\partial w} \end{vmatrix}}$$

NOT:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Ör/2.

$$\left.\begin{aligned} u^2+v^2-xy+y^2&=1 \\ ux-vy+uv-v^2&=y \end{aligned}\right\}$$ sistemi için $\left(\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)_x = ?$

$\underbrace{}$ x ve y bağımsız değişken demektir.

u ve v bağımlı değişkenlerdir.

$$F(u,v,x,y) = u^2+v^2-xy+y^2-1=0$$

$$G(u,v,x,y) = ux-vy+uv-v^2-y=0$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\dfrac{D(F,G)}{D(u,y)}}{\dfrac{D(F,G)}{D(u,v)}}$$

$$= -\frac{\begin{vmatrix} 2u & -x+2y \\ x+v & -v-1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2u & 2v \\ x+v & -y+u-2v \end{vmatrix}} = \frac{-2uv-2u+x^2-2xy+xv-2vy}{-2uy+2u^2-4uv-2vx-2v^2}$$

Ör/3. $\left.\begin{aligned} u &= x^2+xy-y^2 \\ v &= 2xy+y^2 \end{aligned}\right\}$ sistemi için $\underbrace{x=2,\ y=-1}_{u=1,\ v=-3}$ olduğunda $\underbrace{\left(\dfrac{\partial x}{\partial u}\right)_v}_{}=?$

x ve y bağımlı
u ve v bağımsız.

$F(u,v,x,y)=u-x^2-xy+y^2=0$

$G(u,v,x,y)=v-2xy-y^2=0$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = -\frac{\dfrac{D(F,G)}{D(u,y)}}{\dfrac{D(F,G)}{D(x,y)}} = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & -x+2y \\ 0 & -2x-2y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2x-y & -x+2y \\ -2y & -2x-2y \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}} = -\frac{-2}{14} = \frac{1}{7}$$

Ters Dönüşümler

$u=f(x,y,z)$ $\quad v=g(x,y,z)$ $\quad w=h(x,y,z)$ denklem sistemine bir dönüşüm denir. Eğer sistem x,y,z değişkenlerine göre çözülebiliyorsa elde edilen

$x=x(u,v,w)$ $\quad y=y(u,v,w)$ $\quad z=z(u,v,w)$ denklem sistemine de ters dönüşüm denir.

Genellikle bir dönüşümün ters dönüşümünü bulmak oldukça zordur. (veya imkansızdır)

Ancak ters dönüşümün kısmi türevlerini denklemlerini bulmadan hesaplayabiliriz.

Bunun için verilen denklemler istenen değişkene göre türetilerek elde edilen sistem çözülür.

$$\left.\begin{aligned} u &= f(x,y,z) \\ v &= g(x,y,z) \\ w &= h(x,y,z) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} u - f(x,y,z) &= 0 \Rightarrow F(u,v,w,x,y,z) = 0 \\ v - g(x,y,z) &= 0 \Rightarrow G(u,v,w,x,y,z) = 0 \\ w - h(x,y,z) &= 0 \Rightarrow H(u,v,w,x,y,z) = 0 \end{aligned}$$

Ters dönüşüm fonksiyonları x, y, z

$$\frac{\partial y}{\partial w} = - \frac{\dfrac{D(F,G,H)}{D(x,w,z)}}{\dfrac{D(F,G,H)}{D(x,y,z)}} \qquad \frac{D(F,G,H)}{D(x,y,z)} = \frac{D(f,g,h)}{D(x,y,z)}$$

$$\frac{D(F,G,H)}{D(x,w,z)} = \begin{vmatrix} -\frac{\partial f}{\partial x} & 0 & -\frac{\partial f}{\partial z} \\ -\frac{\partial g}{\partial x} & 0 & -\frac{\partial g}{\partial z} \\ -\frac{\partial h}{\partial x} & 1 & -\frac{\partial h}{\partial z} \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} -\frac{\partial f}{\partial x} & -\frac{\partial f}{\partial z} \\ -\frac{\partial g}{\partial x} & -\frac{\partial g}{\partial z} \end{vmatrix} = - \frac{D(f,g)}{D(x,z)}$$

$$\frac{\partial y}{\partial w} = - \frac{D(f,g)}{D(x,z)} : \frac{D(f,g,h)}{D(x,y,z)}$$

Ör/

$$\left.\begin{aligned} u &= 2x^2 - y + 2z \\ v &= x - y^2 + z \\ w &= 2y + z^2 \end{aligned}\right\}$$ denklem sistemi ile verilmiş $x = x(u,v,w)$, $y = y(u,v,w)$ $z = z(u,v,w)$ fonksiyonları için $\dfrac{\partial y}{\partial w}$ türevini hesaplayınız.

$$\left.\begin{aligned} F(u,v,w,x,y,z) &= u - 2x^2 + y - 2z = 0 \\ G(u,v,w,x,y,z) &= v - x + y^2 - z = 0 \\ H(u,v,w,x,y,z) &= w - 2y - z^2 = 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\frac{\partial y}{\partial w} = -\frac{\dfrac{D(F,G,H)}{D(x,w,z)}}{\dfrac{D(F,G,H)}{D(x,y,z)}} = -\frac{\begin{vmatrix} -4x & 0 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -4x & 1 & -2 \\ -1 & 2y & -1 \\ 0 & -2 & -2z \end{vmatrix}} = \cancel{-}\frac{\cancel{+}\begin{vmatrix} -4x & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}}{-4x \cdot \begin{vmatrix} 2y & -1 \\ -2 & -2z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -2z \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{4x-2}{-4x(-4yz-2) + (-2z-4)} = \frac{4x-2}{16xyz + 8x - 2z - 4} = \frac{2x-1}{8xyz + 4x - z - 2}$$