Kuvvet Serileri Üzerinde Cebirsel İşlemler

Cebirsel işlemleri göstermek için yakınsaklık merkezi sıfır olan $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ serisini gözönüne alalım.

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \Rightarrow x-x_0=y \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n \ \Big/ \ \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \Rightarrow x=y-y_0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n (y-y_0)^n \right)$$

Teorem:

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ve $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ serileri sırasıyla R_a ve R_b yakınsaklık yarıçapına sahip iki seri ve c bir sabit olsun. O zaman;

i) $\sum_{n=0}^{\infty} (c a_n) x^n$ serisinin yakınsaklık yarıçapı yine R_a'dır.

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ serisinin yakınsadığı her yerde $\sum_{n=0}^{\infty} (c a_n) x^n = c \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ dir.

ii) $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$ serisinin yakınsaklık yarıçapı toplamda bulunan serilerin yakınsaklık yarıçaplarının en küçüğünden daha küçük olamaz. $R_{a+b} \geq \min(R_a, R_b)$

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ve $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$'in yakınsadığı her yerde $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$'dir.

iii) $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right)$ Cauchy çarpımının yakınsaklık yarıçapı çarpımda bulunan serilerin yakınsaklık yarıçaplarının en küçüğünden daha küçük olamaz. $R_{a \cdot b} \geq \min(R_a, R_b)$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots)(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots)$$

$$= \underbrace{a_0 b_0}_{c_0} + \underbrace{(a_0 b_1 + a_1 b_0)}_{c_1} x + \underbrace{(a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)}_{c_2} x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

$$c_n = \sum_{j=0}^{n} a_j \cdot b_{n-j}$$

Ör/ $1 + x + x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x} \qquad (|x| < 1)$

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)^2 = (1 + x + x^2 + \dots)(1 + x + x^2 + \dots)$$

$$= 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n \qquad c_n = \sum_{j=0}^{n} 1 = n+1$$

iv) Bölüm serisinin katsayılarını belirlemek için basit bir kural yoktur. R_a ve R_b sırasıyla pay ve paydadaki serilerin yakınsaklık yarıçapları ve R_c yakınsaklık merkezinden paydadaki serinin toplamının sıfır olduğu en yakın kompleks sayıya olan uzaklık olmak üzere bölüm serisinin yakınsaklık yarıçapı R_a, R_b ve R_c sayılarının en küçüğünden daha küçük olamaz.

$$R_{\frac{a}{b}} \geq \min(R_a, R_b, R_c) \text{ 'dir.}$$

Ör/

$$\frac{1}{1-x} = \frac{1+0.x+0.x^2+\cdots}{1+(-1).x+0.x^2+\cdots} = 1+x+x^2+\cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad (|x|<1)$$

Paydaki serinin yakınsaklık yarıçapı $R_a = \infty$

Paydadaki serinin yakınsaklık yarıçapı $R_b = \infty$

$1-x=0 \Rightarrow x=1$ yakınsaklık merkezine (0) olan uzaklık $R_c = 1$ 'dir.

$$R_{\frac{a}{b}} = \min\{R_a, R_b, R_c\} = \min\{\infty, \infty, 1\} = 1$$

Kuvvet Serilerinin Türetilmesi ve İntegre edilmesi.

Eğer bir kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı pozitif ise seri terim terim türetilebilir ve integre edilebilir.

Teorem

$R>0$ olmak üzere eğer $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ serisi $(-R,R)$ aralığında $f(x)$ toplamına yakınsıyorsa yani

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots = f(x)$ ise;

i) $f(x)$, $(-R,R)$ aralığı üzerinde türetilebilirdir ve

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots \text{ dir.}$$

ii) $f(x)$, $(-R,R)$ aralığının her kapalı alt aralığında integre edilebilir ve her $x \in (-R,R)$ için

$$\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x (a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots)\,dt = \left(a_0 t + a_1 \frac{t^2}{2} + \cdots \Big|_0^x\right) = a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Türevle elde edilmiş serinin ve integre edilerek elde edilen serilerin yakınsaklık yarıçapları orjinal serinin yakınsaklık yarıçapıyla aynıdır.

Türevle elde edilmiş serinin yakınsaklık aralığı, orjinal seri kendi yakınsaklık aralığının uç noktalarında yakınsıyorsa bile muhtemelen bu uç noktalardan biri veya her ikisi dışında orjinal serinin yakınsaklık aralığı ile aynıdır.

İntegre elde edilmiş serinin yakınsaklık aralığı da, orjinal seri kendi yakınsaklık aralığının uç noktalarında yakınsamıyorsa bile bu uç noktalardan biri veya her ikisi dahil olacak şekilde orjinal serinin yakınsaklık aralığı ile aynıdır.

$$\left(\frac{a}{b}\right)' = \frac{a'b - b'a}{b^2}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad |x| < 1 \rightarrow -1 < x < 1$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = ? \qquad \frac{1}{(1-x)^3} = ? \qquad \ln(1+x) = ?$$

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2} \Rightarrow \left(1 + x + x^2 + x^3 + \dots\right)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)' \Rightarrow \frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$$

$$|x| < 1$$

- $\frac{1}{(1-x)^3} = ?$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1+2x+3x^2+\dots = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$$

$$\left[\frac{1}{(1-x)^2}\right]' = \frac{+2(1-x)}{(1-x)^4} = \frac{2}{(1-x)^3} = (1+2x+3x^2+\dots)' = \left(\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}\right)'$$

$$\Rightarrow \frac{2}{(1-x)^3} = (2+6x+12x^2+\dots) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) \cdot x^{n-2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(1-x)^3} = \frac{1}{2}(2+6x+12x^2+\dots) = 1+3x+6x^2+\dots = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2}$$

$|x|<1$

- $\ln(1+x) = ?$

$$\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+\dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad |x|<1 \Rightarrow \frac{1}{1-(-x)} = \frac{1}{1+x} = 1-x+x^2-x^3+\dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^n$$

$|x|<1$

$-1<x<1$

$$\int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt = \int_0^x (1-t+t^2-t^3+\cdots)\,dt = \int_0^x \Big(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot t^n\Big)\,dt \qquad |x|<1 \qquad -1<x<1$$

$$\ln|1+t|\Big|_0^x = \left(t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}-\frac{t^4}{4}+\cdots\Big|_0^x\right) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\left(\int_0^x t^n\,dt\right)$$

$$\ln|1+x| = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\left(\frac{t^{n+1}}{n+1}\Big|_0^x\right)$$

$$\ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad |x|<1 \longrightarrow -1<x\leq 1$$

$$x=-1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot(-1)^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{n}$$ Harmonik seri ıraksak.

$$x=1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 1^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$$ Alt. Harmonik seri şartlı yakınsak

- $f(x)=\arctan x$ fonksiyonunu kuvvet serisi olarak ifade ediniz.

$\arctan x = ?$ $\quad \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^n \qquad |x| < 1$

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot t^{2n}$$

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x (1 - t^2 + t^4 - t^6 + \cdots)\, dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot t^{2n} \right) dt$$

$$\arctan t \Big|_0^x = t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + \cdots \Big|_0^x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \left(\frac{t^{2n+1}}{2n+1} \Big|_0^x \right)$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad |x| < 1 \qquad -1 \le x \le 1$$

$x = -1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$ Alt. Harmonik seri gibi davranır. Şartlı yak.

$x = 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{2n+1}$ Alt. Harmonik seri gibi davranır. Şartlı yak.

• $1+\frac{2}{3}+\frac{3}{9}+\cdots+\frac{n}{3^{n-1}}+\cdots$ serisinin toplamını bulunuz.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n.x^{n-1} = ?$$

$$\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+\cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad |x|<1$$

$$\underbrace{\frac{1}{(1-x)^2}} = 1+2x+\cdots = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}} \qquad |x|<1$$

$$x=\frac{1}{3} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n.\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{9}{4}$$

Ödev: $x+4x^2+9x^3+16x^4+\cdots$ kuvvet serisinin toplamını bulunuz ve bu toplamdan yararlanarak $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ serisinin yakınsadığı değeri hesaplayınız.

Taylor ve McLaurin Serileri

Bir kuvvet serisi toplamının, serinin yakınsaklık aralığı içinde her mertebeden türeve sahip bir fonksiyona eşit olduğunu biliyoruz. Tersine düşünürsek, her mertebeden türeve sahip olan bir fonksiyon bir kuvvet serisi ile ifade edilebilir mi? Eğer fonksiyonu kuvvet serisi ile ifade edebiliyorsak o zaman katsayıları nasıl olur? Hangi aralıkta fonksiyon böyle bir kuvvet serisi ile ifade edilebilir?

$f(x)$ her mertebeden türeve sahip bir fonksiyon olsun. Bu fonksiyonu

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots$$

şeklinde ifade edebileceğimizi kabul edelim. a_n katsayılarını bulmaya çalışalım. Bu amaçla $f(x)$ ve türevlerinin $x = x_0$'daki değerlerini hesaplayalım.

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots \longrightarrow f(x_0) = a_0$$

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x-x_0) + 3a_3(x-x_0)^2 + \cdots + n\,a_n(x-x_0)^{n-1} + \cdots \longrightarrow f'(x_0) = a_1$$

$$f''(x) = 2a_2 + 6a_3(x-x_0) + \cdots + n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2} \longrightarrow f''(x_0) = 2a_2$$

$$f'''(x) = 6a_3 + \cdots + n(n-1)(n-2)\,a_n(x-x_0)^{n-3} \longrightarrow f'''(x_0) = 6a_3$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2)\cdots 2.1\;a_n + \cdots \longrightarrow f^{(n)}(x_0) = n(n-1)(n-2)\cdots 2.1 \cdot a_n$$

$a_0 = f(x_0) \longrightarrow a_0 = f(x_0)$

$a_1 = f'(x_0) \longrightarrow a_1 = \dfrac{f'(x_0)}{1!}$

$a_2 = \dfrac{f''(x_0)}{2} \longrightarrow a_2 = \dfrac{f''(x_0)}{2!}$

$a_3 = \dfrac{f'''(0)}{6} \longrightarrow a_3 = \dfrac{f'''(x_0)}{3!}$

$\vdots \qquad \vdots$

$a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1} \longrightarrow a_n = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$

$\vdots$

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots$$

$$\underbrace{f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \cdots}_{\text{Taylor Serisi}}$$