Gradyen vektör

$z = f(x,y)$ fonksiyonunun birinci mertebe kısmi türevlerinin mevcut olduğu herhangi bir (x,y) noktasında gradyen vektör

$$\nabla z = \nabla f(x,y) = \text{grad } f(x,y) = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x,y)} \vec{i} + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x,y)} \vec{j}$$

şeklinde tanımlanır.

$\nabla \rightarrow$ Nabla : Diferansiyel vektör operatörüdür. $\qquad \nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j}$

Eğer $u = f(x,y,z)$ fonksiyonunu gözönüne alırsak, bu fonksiyon için gradyen vektör

$$\nabla u = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k} \qquad \nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

şeklindedir.

Ör/ $f(x,y) = x^2y + xy^2$ fonksiyonunun $(1,-2)$ noktasındaki gradyen vektörünü bulunuz.

$$\nabla f(x,y) = \text{grad } f(x,y) = (2xy + y^2)\vec{i} + (x^2 + 2xy)\vec{j}$$

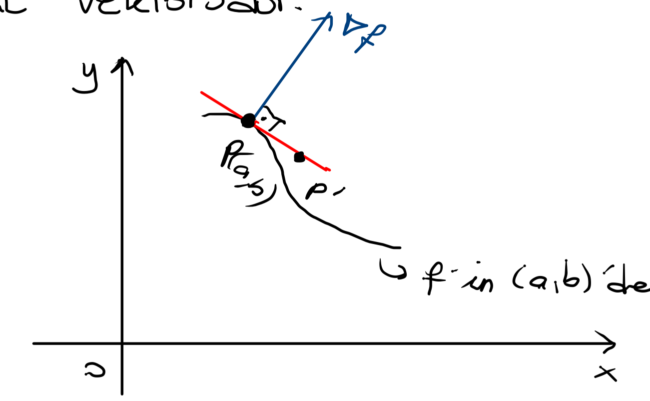
$$\nabla f(1,-2) = (2.1.(-2) + (-2)^2)\vec{i} + (1 + 2.1.(-2))\vec{j}$$

$$= (-4+4)\vec{i} + (1-4)\vec{j} = -3\vec{j}$$

Gradyen için cebirsel kurallar

1. $\nabla(f \mp g) = \nabla f \mp \nabla g$
2. $\nabla(f \cdot g) = \nabla f \cdot g + \nabla g \cdot f$
3. $\nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{\nabla f g - \nabla g \cdot f}{g^2}$
4. $\nabla(k \cdot f) = k \cdot \nabla f \quad (k \to \text{sbt})$

Teorem: Eğer $f(x,y)$ fonksiyonu (a,b) noktasında türevlenebilir ve $\nabla f(a,b) \neq 0$ ise o zaman $\nabla f(a,b)$ vektörü f fonksiyonunun (a,b) noktasından geçen seviye eğrisinin bir normal vektörüdür.



↳ f'in (a,b)'den geçen seviye eğrisi

$$\vec{PP'} \cdot \nabla f = 0$$

Ör/ $x^2+y^2=5$ eğrisinin $(1,2)$ noktasındaki teğetinin denklemini bulunuz. (x_0, y_0)

1. yol Teğet denk: $(y-y_0) = f'(x_0)(x-x_0) \Rightarrow (y-2) = f'(1) \cdot (x-1)$

$$2x+2yy' = 0 \Rightarrow y' = \frac{-x}{y}$$

$$\Rightarrow y'\Big|_{(1,2)} = \frac{-1}{2}$$

$$\Rightarrow (y-2) = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (x-1)$$

$$\boxed{2y+x=5}$$

2. yol $P(1,2)$ $\quad P'(x,y)$

$$\vec{PP'} = (x-1)\vec{i} + (y-2)\vec{j}$$

$$\nabla f = 2x\vec{i} + 2y\vec{j}$$

$$\nabla f(1,2) = 2\vec{i} + 4\vec{j}$$

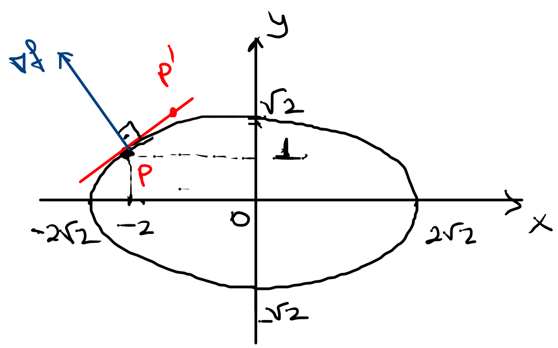
$$\vec{PP'} \cdot \nabla f = 0 \Rightarrow 2(x-1) + 4(y-2) = 0$$

$$2x-2+4y-8=0 \Rightarrow 2x+4y=10$$

$$x+2y=5$$

Ör/ $\frac{x^2}{4}+y^2=2$ elipsi veriliyor $(-2,1)$ noktasındaki teğet doğrusunun denklemini bulunuz.

$$\Rightarrow \frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$$



$$\nabla f = \frac{x}{2}\vec{i} + 2y\vec{j} \qquad \nabla f(-2,1) = -\vec{i} + 2\vec{j}$$

$$\overrightarrow{PP'} = (x+2)\vec{i} + (y-1)\vec{j}$$

$$\nabla f \cdot \overrightarrow{PP'} = 0 \Rightarrow (-\vec{i}+2\vec{j})\left[(x+2)\vec{i}+(y-1)\vec{j}\right]=0$$

$$-(x+2)+2(y-1)=0$$

$$2y-x=4$$

NOT: Eğer $f(x,y)$ türevlenebilir fonksiyonu $\vec{r} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$ düzgün eğrisi boyunca sabit bir c değeri alıyorsa (bu eğriyi fonksiyonun seviye eğrisi yapar) gradyen vektör teğet vektöre dik bir vektördür.

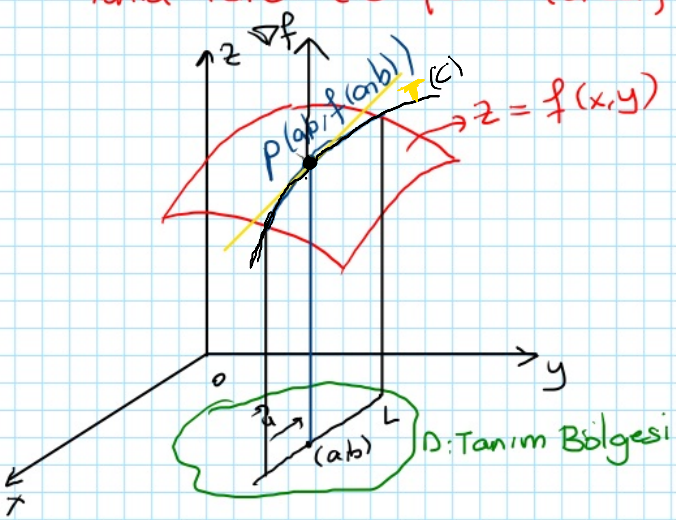
$$x=x(t),\ y=y(t) \qquad f(x,y)=c \Rightarrow f(x,y)=f\left[x(t),\ y(t)\right]=F(t)=c$$

$$\Rightarrow \frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}=0 \Rightarrow \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}\right)}_{\nabla f}\cdot\underbrace{\left(\frac{dx}{dt}\vec{i}+\frac{dy}{dt}\vec{j}\right)}_{\frac{d\vec{r}}{dt}}=0$$

∇f → normal vektör

$\frac{d\vec{r}}{dt}$ → teğet vektör

Yönlü Türev (Doğrultu Türevi)



L doğrusunun doğrultman vektörü olan $\vec{u}$'nun birim vektörü doğrultusundaki doğrultu türevi doğrunun geçtiği (a,b) noktasına karşılık gelen (a,b,f(a,b)) noktasındaki eğrinin (a,b) noktasındaki teğetinin eğimidir.

$f(x,y)$ fonksiyonunun (a,b) noktasında $\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j}$ birim vektörü yönündeki türevi

$$D_{\vec{u}} f(a,b) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+tu_1, b+tu_2) - f(a,b)}{t} = \frac{d}{dt}\Big[f(a+tu_1, b+tu_2)\Big]_{t=0}$$

Ör: Tanımı kullanarak $(1,2)$ noktasında $f(x,y) = x^2+xy$ fonksiyonunun $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}$ birim vektörü yönündeki türevini bulunuz.

$$|\vec{u}| = \sqrt{\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{1} = 1$$

$$D_{\vec{u}} f(1,2) = \lim_{t\to 0} \frac{f\left(1+\frac{t}{\sqrt{2}}, 2+\frac{t}{\sqrt{2}}\right) - f(1,2)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\left[\left(1+\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(1+\frac{t}{\sqrt{2}}\right)\left(2+\frac{t}{\sqrt{2}}\right)\right] - 3}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\cancel{1} + \frac{2t}{\sqrt{2}} + \frac{t^2}{2} + \cancel{2} + \frac{t}{\sqrt{2}} + \frac{2t}{\sqrt{2}} + \frac{t^2}{2} \cancel{-3}}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{5t}{\sqrt{2}} + t^2}{t} = \lim_{t\to 0}\left(\frac{5}{\sqrt{2}} + t\right) = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h}$$

$z = f(x,y)$

$c = f(x,y)$

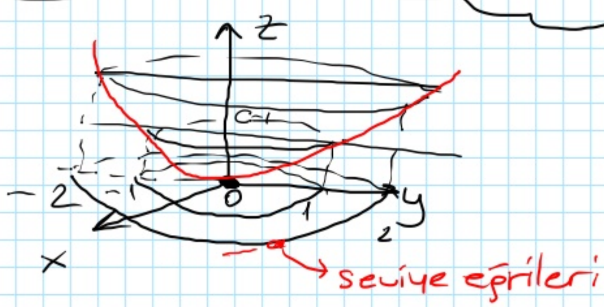
$z = x^2+y^2$

$c = x^2+y^2$

$c=0$

$c=1$

$c=2$



Yönlü türevin Gradyen ile hesabı

Eğer f fonksiyonu (a,b) noktasında türevlenebilir ve $\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j}$ bir birim vektör ise o zaman f fonksiyonunun (a,b) noktasında u vektörü yönündeki türevi

$$D_{\vec u} f(a,b) = \nabla f(a,b) \cdot \vec{u} \qquad D_{\vec i} f(a,b) = \nabla f(a,b) \cdot \vec{i} = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(a,b)}, \quad D_{\vec j} f(a,b) = \nabla f(a,b) \cdot \vec{j} = \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(a,b)}$$

NOT: Birinci mertebe kısmi türevler koordinat eksenleri yönündeki yönlü türevlerdir.

Geometrik özellikler

- $f(x,y)$ fonksiyonu (a,b) noktasında gradyen vektör yönünde en hızlı şekilde artar. Artımın maksimum oranı gradyen vektörün modülüne eşittir. $D_{\nabla f} f(a,b) = |\nabla f(a,b)|$

$\nabla f \cdot \vec{u} = |\nabla f| \cdot \cos\theta$

$\theta = 0 \quad +$

- $f(x,y)$ fonksiyonu (a,b) noktasında gradyen vektörün ters yönünde en hızlı şekilde azalır. Azalmanın maksimum miktarı yine gradyen vektörün modülüne eşittir. $D_{-\nabla f} f(a,b) = |\nabla f(a,b)|$

- $f(x,y)$ fonksiyonunun (a,b) noktasından geçen düzey (seviye) eğrisinin teğeti yönündeki değişim oranı sıfırdır.

$$D_{\vec T} f(a,b) = \nabla f(a,b) \cdot \vec{T} = 0 \qquad \nabla f \perp \hat{T} \qquad \theta = 90^\circ$$

$\vec T$: Teğet birim vektör.

Örnekler

1) $f(x,y) = y^4 + 2xy^3 + x^2y^2$ fonksiyonunun $(0,1)$ noktasında

a) $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j}$

b) $\vec{v} = \vec{j} - 2\vec{i}$

c) $\vec{s} = 3\vec{i}$

d) $\vec{t} = \vec{i} + \vec{j}$

vektörleri yönlerindeki türevini bulunuz.

$$\nabla f = (2y^3 + 2xy^2)\vec{i} + (4y^3 + 6xy^2 + 2x^2y)\vec{j}$$

$$\nabla f(0,1) = 2\vec{i} + 4\vec{j}$$

a) $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j}$

$$|\vec{u}| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

$$D_{\vec{u}} f(0,1) = \nabla f(0,1) \cdot \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$$

$$= \underbrace{(2\vec{i}+4\vec{j})}_{\nabla f} \cdot \frac{(\vec{i}+2\vec{j})}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{8}{\sqrt{5}} = \frac{10}{\sqrt{5}}$$

$$= 2\sqrt{5}$$

$$\nabla f \parallel \vec{u} \Rightarrow D_{\vec{u}} f(0,1) = |\nabla f(0,1)| = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

b) $\vec{v} = \vec{j} - 2\vec{i}$

$$|\vec{v}| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

$$D_{\vec{v}} f(0,1) = \nabla f(0,1) \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = (2\vec{i}+4\vec{j}) \cdot \frac{(\vec{j}-2\vec{i})}{\sqrt{5}} = \frac{-4+4}{\sqrt{5}} = 0$$

$$\nabla f \perp \vec{v}$$

c) $\vec{s} = 3\vec{i}$ $\qquad |\vec{s}| = \sqrt{3^2} = 3$

$$D_{\vec{s}} f(0,1) = (2\vec{i} + 4\vec{j}) \cdot \frac{\cancel{3}\vec{i}}{\cancel{3}} = 2 = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,1)}$$

d) $\vec{t} = \vec{i} + \vec{j}$

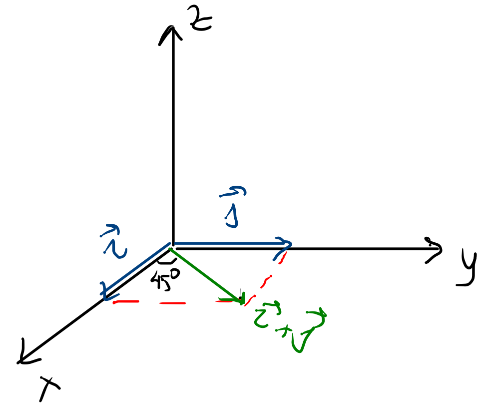
$|\vec{t}| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$$D_{\vec{t}} f(0,1) = \nabla f(0,1) \cdot \frac{\vec{t}}{|\vec{t}|}$$

$$= (2\vec{i} + 4\vec{j}) \cdot \frac{\vec{i} + \vec{j}}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{4}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$$



2) $f(x,y) = x \cdot e^{y} + \cos(xy)$ fonksiyonunun $(2,0)$ noktasında $\vec{v} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$ yönündeki türevini hesaplayınız.

$$\nabla f = [e^{y} - y\sin(xy)]\,\vec{i} + [x e^{y} - x\sin(xy)]\,\vec{j}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{9 + 16} = 5$$

$$\nabla f(2,0) = [1 - 0]\,\vec{i} + [2 - 0]\,\vec{j}$$

$$= \vec{i} + 2\vec{j}$$

$$D_{\vec{v}} f(2,0) = \nabla f(2,0) \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = (\vec{i} + 2\vec{j}) \cdot \frac{(3\vec{i} - 4\vec{j})}{5} = \frac{3 - 8}{5} = -$$

NOT

$$D_{\vec{u}} f(a,b) = \nabla f(a,b)\cdot\vec{u} = |\nabla f(a,b)|\,\underbrace{|\vec{u}|}_{=1}\cos\theta = |\nabla f(a,b)|\cdot\cos\theta$$

$\vec{u}$ → birim vektör

3) $f(x,y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$ fonksiyonunun, $(1,1)$ noktasında aşağıdaki durumlarda yönlerini bulunuz.

a) en çok artan

b) en çok azalan

c) sıfır değişiminin

→ a) $\nabla f(1,1)$ yönündeki bir birim vektör bulmalıyız.

$$\nabla f = x\vec{i} + y\vec{j} \qquad \nabla f(1,1) = \vec{i} + \vec{j} \Rightarrow \vec{u} = \frac{\nabla f}{|\nabla f|} = \frac{\vec{i}+\vec{j}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}$$

b) $\nabla f(1,1)$'in ters yönündeki bir birim vektörü bulmalıyız.

$$\vec{v} = -\frac{\nabla f}{|\nabla f|} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}$$

c) $\nabla f(1,1)$'e dik olan vektörleri bulmalıyız.

$$\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} \qquad \vec{a} \perp \nabla f(1,1) \Rightarrow \vec{a}\cdot\nabla f(1,1) = 0$$

$\nabla f \to \vec{i}+\vec{j}$

→ $\underbrace{\vec{i}-\vec{j}}_{\vec{a}}$ → $\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i}-\vec{j})$, $-\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i}-\vec{j})$

→ $\underbrace{-\vec{i}+\vec{j}}_{\vec{a}}$ → $\frac{1}{\sqrt{2}}(-\vec{i}+\vec{j})$, $-\frac{1}{\sqrt{2}}(-\vec{i}+\vec{j})$

4) NOT: Düzlemdeki bir yön kutupsal bir açıyla belirlenebilir. Eksenin pozitif yönüyle θ açısı yapan yön

$$u_\theta = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}$$ birim vektörüne karşılık gelir.

$f(x,y) = x^2+2x+3y^2$ fonksiyonunun $\theta = \frac{\pi}{3}$ yönündeki türevinin $(1,\sqrt{3})$ noktasındaki değerini bulunuz.

$\vec{u} = \cos\frac{\pi}{3}\vec{i} + \sin\frac{\pi}{3}\vec{j}$

$= \frac{1}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}$

$\nabla f(x,y) = (2x+2)\vec{i} + 6y\vec{j}$

$\nabla f(1,\sqrt{3}) = 4\vec{i} + 6\sqrt{3}\vec{j}$

$D_{\vec{u}} f(1,\sqrt{3}) = \nabla f(1,\sqrt{3}) \cdot \vec{u}$

$= (4\vec{i} + 6\sqrt{3}\vec{j}) \cdot (\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j})$

$= 2 + 9$

$= 11$

5) $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ fonksiyonu için $\qquad u = x^2+y^2+z^2$

a) $\nabla f(x,y,z) = ?$

$\nabla f(1,-1,2) = ?$

b) f'in $(1,-1,2)$ noktasındaki maksimum artış oranını bulunuz.

c) $x^2+y^2+z^2=6$ küresinin $(1,-1,2)$ noktasındaki teğet düzleminin denklemini bulunuz.

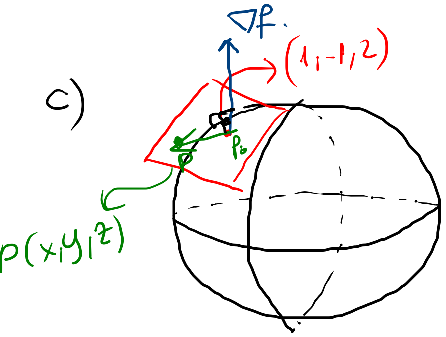
d) f'in $(1,-1,2)$'de, bu noktadan $(3,1,1)$ noktasına doğru ölçülen yöndeki değişim oranını bulunuz.

a) $\nabla f(x,y,z) = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z\vec{k}$

$\nabla f(1,-1,2) = 2\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$

b) $|\nabla f| = \sqrt{4+4+16} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

c)



$x^2+y^2+z^2=6$ $\quad u=x^2+y^2+z^2$ $\quad c=6$ daki seviye yüzeyi $x^2+y^2+z^2=6$

$P_0(1,-1,2)$ $\quad P(x,y,z) \to \overrightarrow{P_0P} = (x-1)\vec{i}+(y+1)\vec{j}+(z-2)\vec{k}$

$$\nabla f \cdot \overrightarrow{P_0P}=0 \Rightarrow (2\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k})\left[(x-1)\vec{i}+(y+1)\vec{j}+(z-2)\vec{k}\right]=0$$

$$2(x-1)-2(y+1)+4(z-2)=0$$

$$2x-2y+4z=12 \Rightarrow x-y+2z=6$$ Teğet düz. denk.

d) $(1,-1,2)\to(3,1,1)$ $\quad D_{\vec{u}} f(1,-1,2)=\nabla f(1,-1,2)\cdot\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$

$\vec{u}=2\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$

$|\vec{u}|=\sqrt{4+4+1}=3$

$$=(2\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k})\frac{(2\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k})}{3}=\frac{4-4-4}{3}=-\frac{4}{3}$$

6) $f(x,y,z)=x^2+2y^2+3z$ fonksiyonunun $M(1,2,0)$ noktasını $N(2,4,2)$ noktasına birleştiren $\overrightarrow{MN}$ vektörü yönündeki doğrultu türevinin M noktasındaki değerini bulunuz.

$\nabla f = 2x\vec{i}+4y\vec{j}+3\vec{k}$

$\nabla f(1,2,0)=2\vec{i}+8\vec{j}+3\vec{k}$

$\overrightarrow{MN}=\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$

$|\overrightarrow{MN}|=\sqrt{1+4+4}=3$

$$D_{\overrightarrow{MN}} f(1,2,0)=\nabla f(1,2,0)\cdot\frac{\overrightarrow{MN}}{|\overrightarrow{MN}|}$$

$$=(2\vec{i}+8\vec{j}+3\vec{k})\cdot\frac{\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}}{3}=\frac{2+16+6}{3}=8$$