$f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ fonksiyonu için $f \circ f(x)$ fonksiyonunu bulunuz ve tanım kümesini yazınız.

$D(f): \mathbb{R} - \{-1\}$

$$f \circ f(x) = \frac{1 - \left(\frac{1-x}{1+x}\right)}{1 + \left(\frac{1-x}{1+x}\right)} = x \qquad D(f \circ f): \mathbb{R} - \{-1\}$$

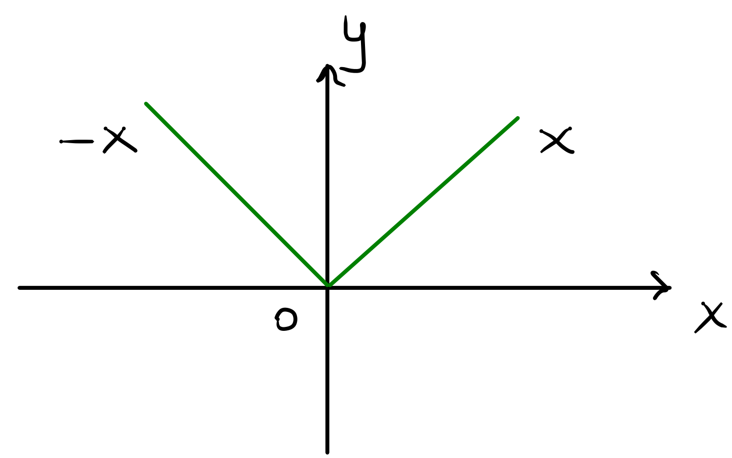
$$\underline{x \in D(f)}, \quad \underline{f(x) \in D(f)}$$

## Parçalı olarak tanımlanmış fonksiyonlar

Tanım kümesinin farklı parçaları üzerinde farklı formüllerle tanımlanan fonksiyonlara parçalı olarak tanımlanmış fonksiyonlar denir.

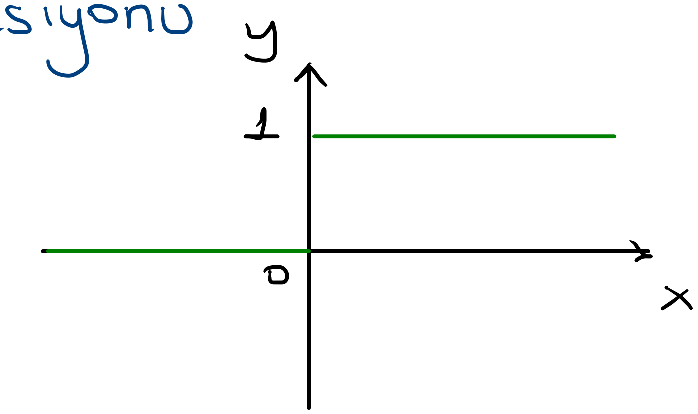
### Mutlak değer fonksiyonu

$$|x| = \begin{cases} x & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$



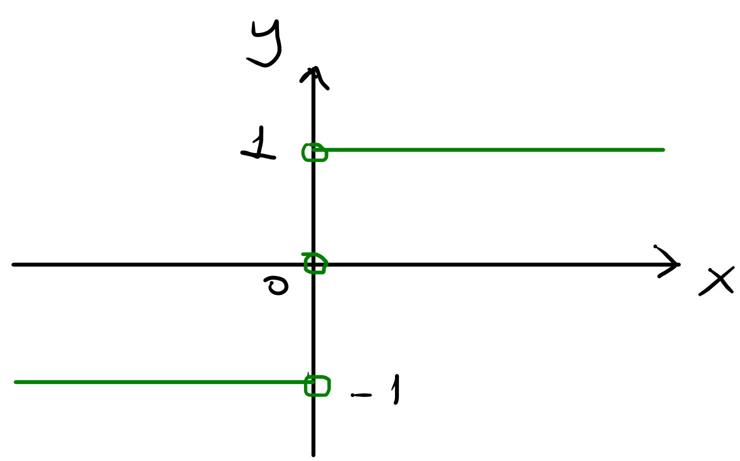
## Birim basamak (Heaviside) fonksiyonu

$$H(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$




## İşaret (signum) fonksiyonu

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \\ \text{tanımsız} & x = 0 \end{cases}$$




## Periyodik fonksiyon

Her $x \in D(f)$ için $f(x+T) = f(x)$ olacak şekilde bir $T$ sayısı varsa o zaman $f$ fonksiyonu periyodik fonksiyondur ve periyodu $T$'dir denir.

$\sin(x+T) = \sin x \Rightarrow \cancel{x}+T-\cancel{x} = 2\pi \Rightarrow T = 2\pi$

## Ters fonksiyon

Eğer bir f fonksiyonu 1-1 ise, o zaman değer kümesindeki herhangi bir y sayısı için, daima x sayısı vardır. x, y tarafından tek türlü olarak belirlendiğinden y'nin bir fonksiyonudur. $x = f^{-1}(y)$ şeklinde gösterilir.

**Özellikleri**

$$y = f(x) \quad (1-1) \Rightarrow x = f^{-1}(y) \text{ vardır.}$$

1) $f^{-1}$'in değeri f'in tanım kümesindeki $f(y) = x$ eşitliğini sağlayan tek y sayısıdır. Yani

$$y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(y)$$

2) $f^{-1}$'in tanım kümesi, f'in değer kümesidir.
3) $f^{-1}$'in değer kümesi, f'in tanım kümesidir.
4) f'in tanım kümesindeki her x için $f^{-1}[f(x)] = x$'dir.
5) $f^{-1}$'in tanım kümesindeki her x için $f[f^{-1}(x)] = x$'dir.

6) $f$'in tanım kümesindeki her $x$ için $(f^{-1})^{-1}(x) = f(x)$'dir.

7) $f$ ve $f^{-1}$ fonksiyonlarının grafikleri 1. açıortay $(x=y)$ doğrusuna göre simetriktir.

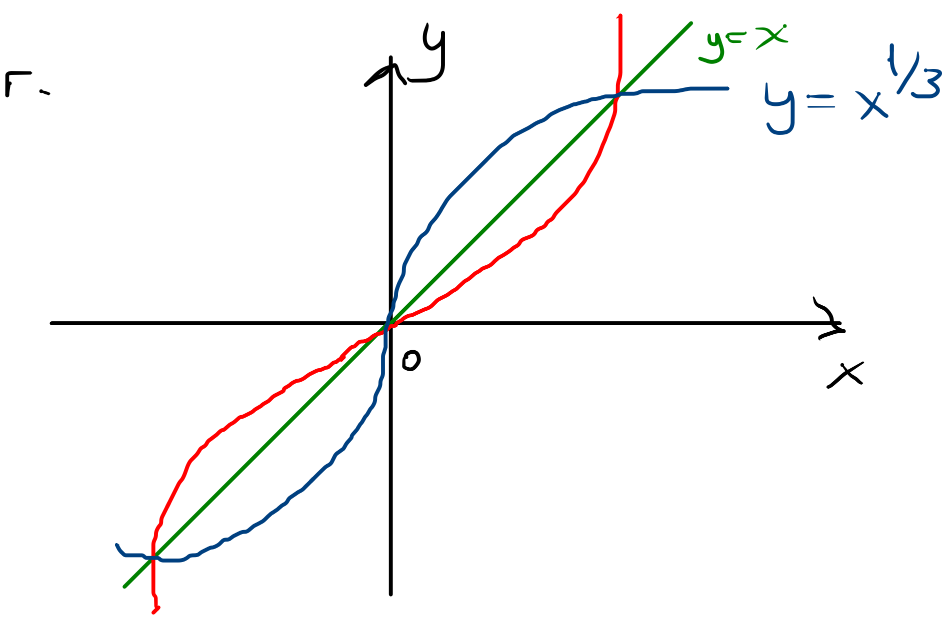
Örnekler

1) $f(x) = x^3$ fonksiyonunun 1-1 olduğunu gösteriniz ve tersini bulunuz.

$$\boxed{x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \;/\; f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2}$$

$$x_1^3 = x_2^3 \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow f \text{ 1-1'dir.}$$

$$y = x^3 \Rightarrow x = y^{1/3}$$

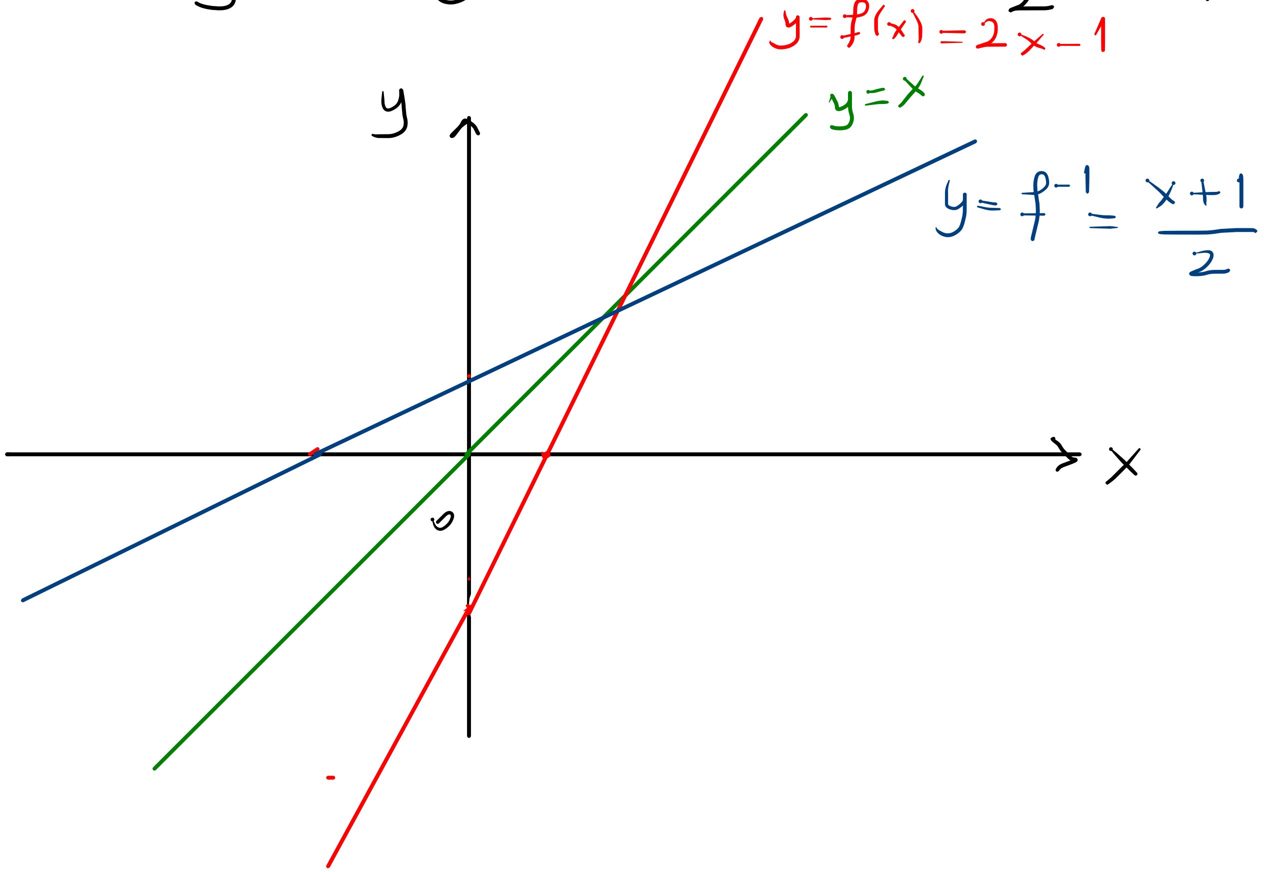


2) $f(x) = 2x - 1$ 1-1 old. gösteriniz ve $f^{-1}(x)$'i bulunuz.

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1 - 1 = 2x_2 - 1 \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$

1-1'dir.

$x = f(y) = 2y - 1 \Rightarrow y = \frac{x+1}{2} = f^{-1}(x)$



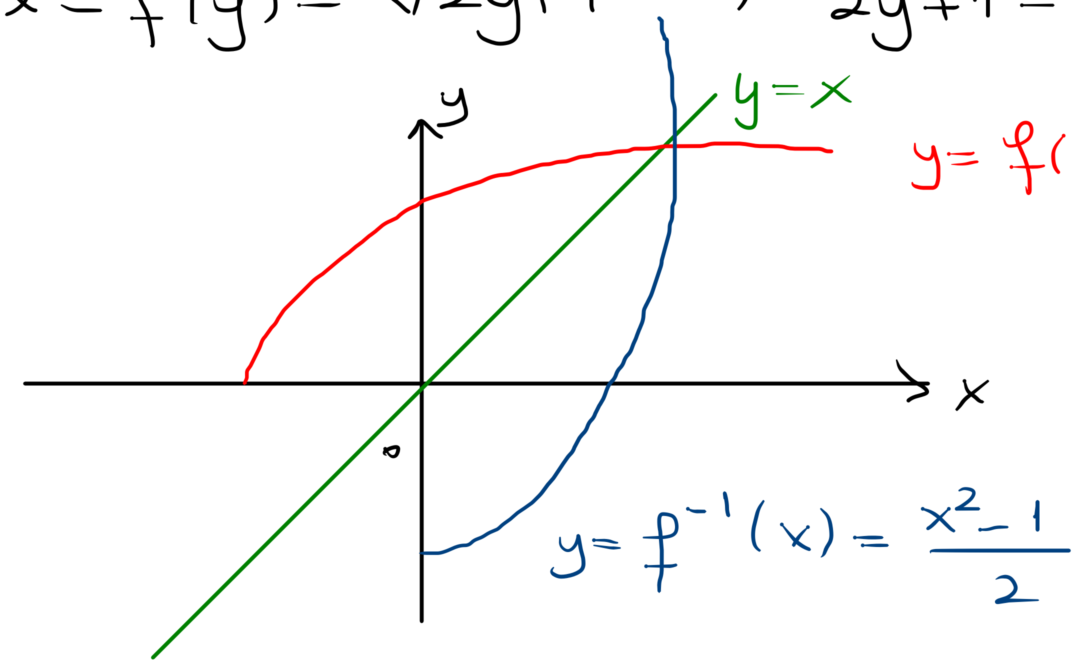
3) $f(x)=\sqrt{2x+1}$ 1-1 old. gösteriniz $f^{-1}(x)$'i bulunuz.

$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow \sqrt{2x_1+1}=\sqrt{2x_2+1}$

$2x_1+1=2x_2+1$

$2x_1=2x_2 \Rightarrow x_1=x_2$ 1-1

$x=f(y)=\sqrt{2y+1} \Rightarrow 2y+1=x^2 \Rightarrow y=\dfrac{x^2-1}{2}, \quad x\geq 0$

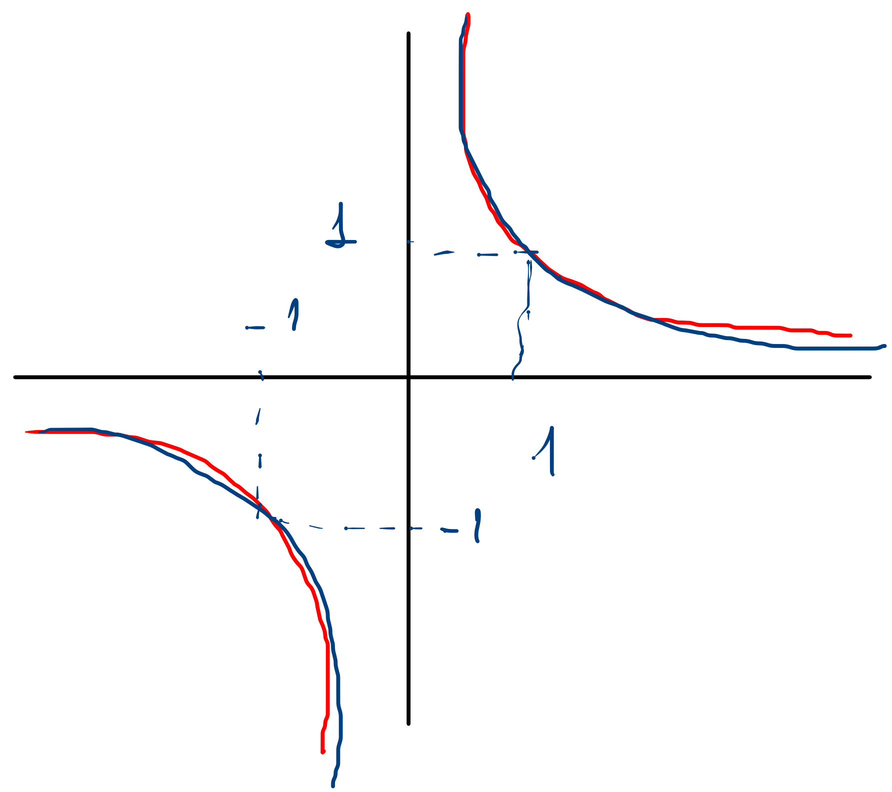


4) $f(x)=\frac{1}{x}$ 1-1 old. göst. $f^{-1}(x)$'i bulunuz.

$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow \frac{1}{x_1}=\frac{1}{x_2}$ $(x_1\neq 0,\ x_2\neq 0) \Rightarrow x_1=x_2$

$f \rightarrow$ 1-1'dir.

$x=f(y) \Rightarrow x=\frac{1}{y} \Rightarrow y=\frac{1}{x}$



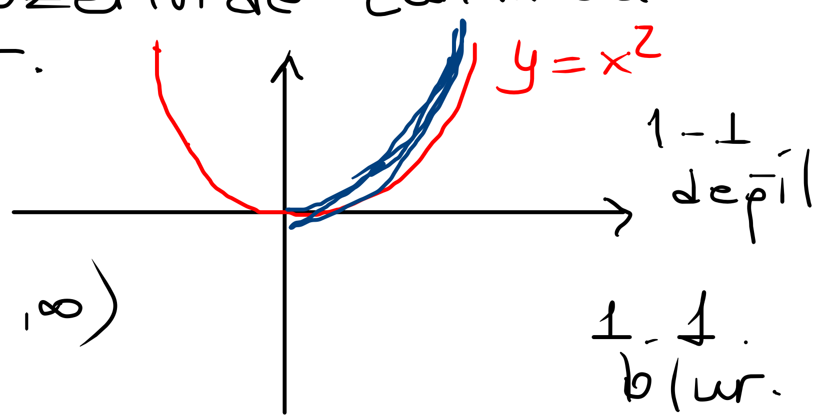

**Birebir olmayan fonksiyonun tersi:**

Bir fonksiyonun tanım kümesinin tümü üzerinde 1-1 olmadığı durumda fonksiyonun tanım kümesini kısıtlamak suretiyle fonksiyonun tersini bu bölge üzerinde tanımlamak mümkündür.

$D(f): \mathbb{R}$

$\Downarrow$

$D(f|): [0,\infty)$



# Bazı Elemanter Fonksiyonlar

## Polinomlar ve Rasyonel Fonksiyonlar

- $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sabit sayılar ve $n>0$ iken $a_n \neq 0$ olmak üzere

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

ile verilen bir fonksiyona polinom denir. $n \to$ En büyük kuvvet derecesi

$P(x) = 2x^3 + 7x + 1 \to$ 3. dereceden bir polinom

$P(x) = 3 \to$ 0. dereceden bir polinom.

Polinomlar $x$'in her değeri için tanımlı fonksiyonlardır.

$D(P) = \mathbb{R}$

- $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \quad (n>0) \quad (a_n \neq 0)$

$Q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0 \quad (m>0) \quad (b_m \neq 0)$

$\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ şeklindeki fonksiyonlara rasyonel fonksiyonlar denir.

$y = \frac{x+1}{x+2}$ , $y = \frac{x^3-1}{x^2-4} \longrightarrow D(f): \mathbb{R} - \{\mp 2\}$

Rasyonel fonksiyonlar paydadaki polinomu sıfır kılan x değerleri hariç her yerde tanımlıdırlar.

$D(f): \mathbb{R} - \{-2\}$

## Cebirsel fonksiyonlar

Rasyonel fonksiyonların kesirsel kuvvetleri alınarak elde edilen fonksiyonlardır. Başka bir deyişle,

$P_0(x), P_1(x), \ldots, P_n(x)$ polinomlar olmak üzere

$$* \quad P_n(x)\, y^n + P_{n-1}(x)\, y^{n-1} + \cdots + P_1(x)\, y + P_0(x) = 0$$

şeklindeki cebirsel denklemleri sağlayan $y = f(x)$ fonksiyonlarına cebirsel fonksiyonlar denir.

Ör/ $y = \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{1+x}}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{1-x}} \rightarrow$ açık formda

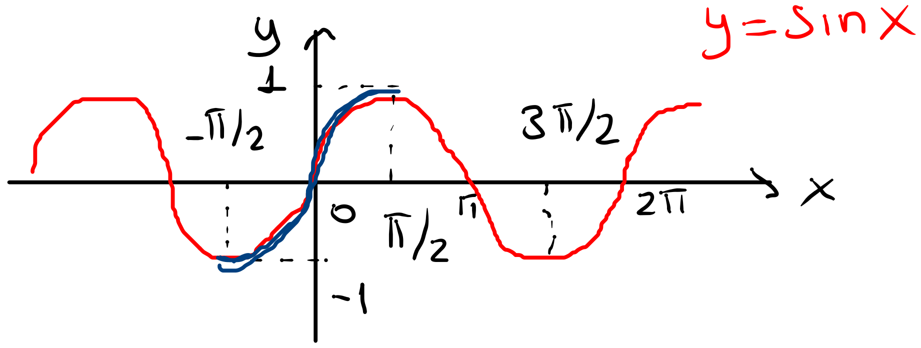
Ör/ $xy^5 - y - x^2 = 0 \rightarrow$ kapalı formda.

Transandant Fonksiyonlar

Trigonometrik fonksiyonlar

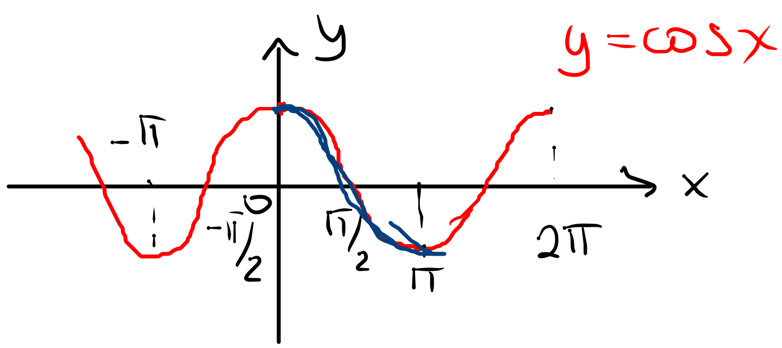
1) $y = \sin x$  $D(f): \mathbb{R}$  $R(f): [-1,1]$  $(T = 2\pi)$

$D(f|): [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$




2) $y = \cos x$  $D(f): \mathbb{R}$  $R(f) = [-1,1]$  $(T = 2\pi)$

$D(f|): [0, \pi]$



3) $y = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ $\quad D(f): \mathbb{R} - \left\{\mp\frac{\pi}{2}, \mp\frac{3\pi}{2}, \dots, \mp\frac{(2n+1)\pi}{2}, \dots\right\}$, $R(f): \mathbb{R}$

$D(f|): \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ $\quad (T = \pi)$

4) $y = \cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ $\quad D(f): \mathbb{R} - \{0, \mp\pi, \mp 2\pi, \dots, \mp n\pi, \dots\}$, $R(f): \mathbb{R}$

$D(f|): (0, \pi)$ $\quad (T = \pi)$

5) $y = \sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ $\quad D(f): \mathbb{R} - \left\{\mp\frac{\pi}{2}, \mp\frac{3\pi}{2}, \dots, \mp\frac{(2n+1)\pi}{2}, \dots\right\}$, $R(f): (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

$D(f|): \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ $\quad (T = 2\pi)$

6) $y = \csc x = \dfrac{1}{\sin x}$ $\quad D(f): \mathbb{R} - \{0, \mp\pi, \mp 2\pi, \dots, \mp n\pi, \dots\}$, $R(f): (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ $\quad (T = 2\pi)$

$D(f|): \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$

- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
- $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$
- $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$
- $\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$
- $\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$
- $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$
- $\cot^2 x = \csc^2 x - 1$
- $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$

- $\sin 2x = 2\sin x \cos x$
- $\sin(a \mp b) = \sin a \cos b \mp \cos a \sin b$
- $\cos(a \mp b) = \cos a \cos b \pm \sin a \sin b$
- $\tan(a \mp b) = \dfrac{\tan a \mp \tan b}{1 \pm \tan a \tan b}$

Ters trigonometrik fonksiyonlar

$x = \text{Arcsin}\, y \qquad D(f): [-1, 1] \qquad R(f): [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$x = \text{Arccos}\, y \qquad D(f): [-1, 1] \qquad R(f): [0, \pi]$

$x = \text{Arctan}\, y \qquad D(f): \mathbb{R} \qquad R(f): (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$x = \text{Arccot}\, y \qquad D(f): \mathbb{R} \qquad R(f): (0, \pi)$

$x = \text{Arcsec}\, y \qquad D(f): (-\infty, -1] \cup [1, \infty) \qquad R(f): [0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]$

$x = \text{Arccsc}\, y \qquad D(f): (-\infty, -1] \cup [1, \infty) \qquad R(f): [-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2}]$