## İmproper İntegraller (Genelleştirilmiş İntegraller)

Belirli integrallerin $I=\int_a^b f(x)\,dx$ şeklinde olanlarını gözönüne almıştık. Bu integrallerde $f$ kapalı ve sonlu $[a,b]$ aralığı üzerinde sürekli bir fonksiyondur. Böyle bir fonksiyon sınırlı olduğundan $I$ integrali de sonlu bir sayı verir. Pozitif bir $f$ fonksiyonu için bu integral, düzlemdeki, sınırlı bir bölgenin alanına karşılık gelir. Bu integralde mevcut olmayan olasılıkları içerecek şekilde genelleştirme yapabiliriz. Bu olasılıklar;

1°) İntegralin sınırları olan $a$ ve $b$ için

$a=-\infty$ veya $b=\infty$ veyahut her ikisi de söz konusu olabilir.

2°) $a$ veya $b$ veyahut her ikisinin yakın civarında ya da $[a,b]$ aralığındaki bir noktanın yakın civarında $f$ sınırsız olabilir.

şeklindedir.

1°) durumu içeren integrallere 1. tip improper integraller (sonsuz integraller),

2°) durumu içeren integrallere de 2. tip improper integraller denir.

Bu integrallerin sonuçları sonlu bir sayı olabileceği gibi $\infty$, $-\infty$ veya integral mevcut olmayabilir. Eğer sonlu bir sayı elde ediliyorsa integrale yakınsaktır, integralin sonucu $-\infty, \infty$ ise veya integral mevcut değilse integrale ıraksaktır denir.

1. tip improper integraller

- Eğer f, $[a,\infty)$ aralığında sürekli ise o zaman f'in $[a,\infty)$ aralığında improper integrali

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[\int_a^b f(x)\,dx\right]$$

şeklinde hesaplanır.

- Eğer f, $(-\infty,b]$ aralığında sürekli ise o zaman f'in $(-\infty,b]$ aralığında improper integrali

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\left[\int_a^b f(x)\,dx\right]$$

şeklinde hesaplanır.

- Eğer f, $(-\infty,\infty)$ aralığında sürekli ise o zaman f'in $(-\infty,\infty)$ aralığında improper integrali

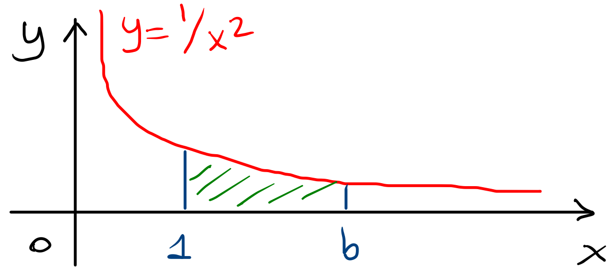
$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \int_{-\infty}^0 f(x)\,dx + \int_0^\infty f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\left[\int_a^0 f(x)\,dx\right] + \lim_{b\to\infty}\left[\int_0^b f(x)\,dx\right]$$

şeklinde hesaplanır.

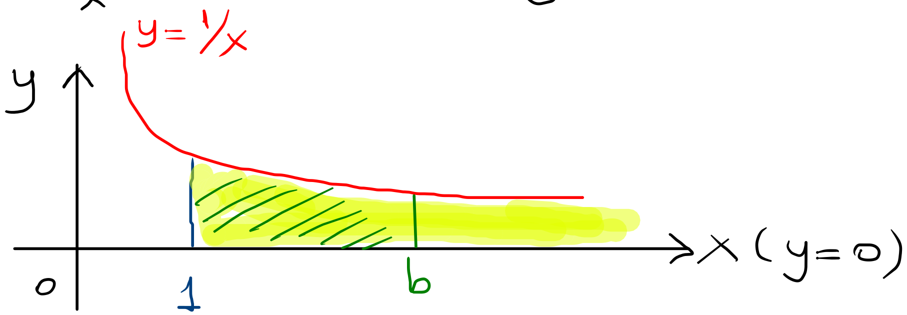
Ör/ $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to\infty}\left[\int_1^b \frac{dx}{x^2}\right] = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\Big|_1^b\right] = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{b}-(-1)\right]$

$= 0+1 = 1 < \infty$ (yakınsaktır)

Alan olarak düşünülürse;




Ör/ $y=\frac{1}{x}$ eğrisi altında $y=0$ üzerinde ve $x=1$'in sağında kalan bölgenin alanını bulunuz.




$\displaystyle A = \int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[\int_1^b \frac{dx}{x}\right]$

$\displaystyle = \lim_{b\to\infty}\left[\ln|x|\,\Big|_1^b\right]$

$\displaystyle = \lim_{b\to\infty}\left[\ln|b| - \underbrace{\ln 1}_{0}\right] = \ln\infty = \infty$

(ıraksak)

Ör/ $I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}+\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}$

$$= \lim_{a\to-\infty}\left[\int_a^0 \frac{dx}{1+x^2}\right] + \lim_{b\to\infty}\left[\int_0^b\frac{dx}{1+x^2}\right]$$

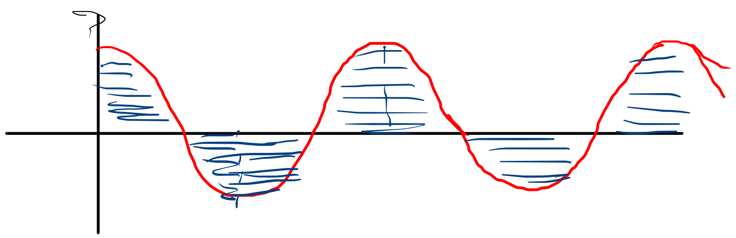
$$=\lim_{a\to-\infty}\left[\arctan x\Big|_a^0\right]+\lim_{b\to\infty}\left[\arctan x\Big|_0^b\right]$$

$$=\lim_{a\to-\infty}\left[\cancel{\arctan 0}^{\to 0} - \arctan a\right] + \lim_{b\to\infty}\left[\arctan b - \cancel{\arctan 0}^{\to 0}\right]$$

$$= -\arctan(-\infty)+\arctan(\infty)$$

$$= 2\arctan(\infty) = \cancel{2}\cdot\frac{\pi}{\cancel{2}} = \pi \quad \text{(yakınsak)}$$

Ör/ $\int_0^\infty \cos x\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[\int_0^b\cos x\,dx\right] = \lim_{b\to\infty}\left[\sin x\Big|_0^b\right] = \lim_{b\to\infty}\left[\sin b - \cancel{\sin 0}^{\to 0}\right]$



$= \sin\infty$ integralin değeri mevcut olmadığından integral ıraksaktır.

## 2. tip improper integraller

- Eğer f, $(a,b]$ aralığında sürekli ve a'nın yakın civarında sınırsız ise o zaman f'in bu aralıktaki improper integrali

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to a^+} \left[ \int_\varepsilon^b f(x)\,dx \right]$$

şeklinde hesaplanır.

- Eğer f, $[a,b)$ aralığında sürekli ve b'nin yakın civarında sınırsız ise o zaman f'in bu aralıktaki improper integrali

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\mu \to b^-} \left[ \int_a^\mu f(x)\,dx \right]$$

şeklinde hesaplanır.

- Eğer f, $(a,b)$ aralığında sürekli ve hem a'nın hem de b'nin yakın civarında sınırsız ise o zaman f'in bu aralıktaki improper integrali $c \in (a,b)$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to a^+} \left[ \int_\varepsilon^c f(x)\,dx \right] + \lim_{\mu \to b^-} \left[ \int_c^\mu f(x)\,dx \right]$$

şeklinde hesaplanır.

- Eğer f, [a,b] aralığının bir noktası olan c dışında sürekli ve c de sınırsız ise o zaman f'in [a,b] aralığındaki improper integrali

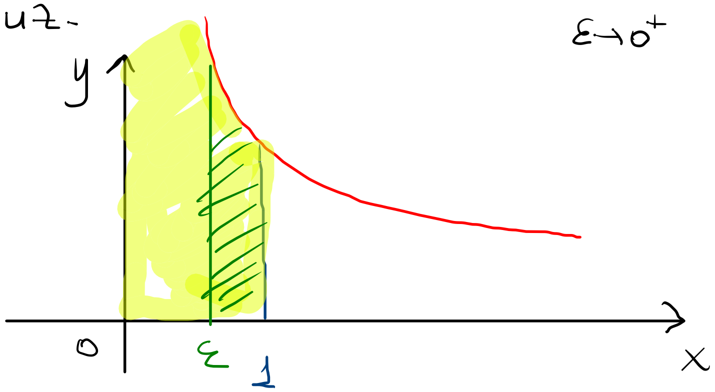
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

$$= \lim_{\mu \to c^-} \left[ \int_a^{\mu} f(x)\,dx \right] + \lim_{\varepsilon \to c^+} \left[ \int_{\varepsilon}^{b} f(x)\,dx \right]$$

şeklinde hesaplanır.

Ör: $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ eğrisinin altında, x-ekseninin üzerinde $x=0$ ile $x=1$ arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.

$a=0$
$\varepsilon \to 0^+$




$$A = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\varepsilon}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left( 2\sqrt{x} \Big|_{\varepsilon}^{1} \right)$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[ 2 - 2\sqrt{\varepsilon} \right]$$

$$= 2 \text{ br}^2 \text{ (yakınsak)}$$

NOT: $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\ln|x|}{\sqrt{1-x}}\,dx = \int_{-1}^{0} \frac{\ln|x|}{\sqrt{1-x}}\,dx + \int_{0}^{1/2} \frac{\ln|x|}{\sqrt{1-x}}\,dx + \int_{1/2}^{1} \frac{\ln|x|}{\sqrt{1-x}}\,dx$

$f$'in tüm sınırsız olduğu noktalar için integral ayrı ayrı improper integrallere ayrılmalı.

---

Ör/ $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}\,dx + \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$

$$= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{-(x^2-2x)}}\,dx + \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{-(x^2-2x)}}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{-[(x-1)^2-1]}}\,dx + \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{-[(x-1)^2-1]}}\,dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-(x-1)^2}}\,dx + \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{1-(x-1)^2}}\,dx = \int_{-1}^{0} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} + \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

$x-1=t$

$dx=dt$

$x=0 \Rightarrow t=-1$

$x=1 \Rightarrow t=0$

$x=2 \Rightarrow t=1$

$$= \lim_{\varepsilon\to -1^+}\left[\int_{\varepsilon}^{0} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\right] + \lim_{\mu\to 1^-}\left[\int_0^{\mu} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\right]$$

$$= \lim_{\varepsilon\to -1^+}\left[\arcsin t\Big|_{\varepsilon}^{0}\right] + \lim_{\mu\to 1^-}\left[\arcsin t\Big|_0^{\mu}\right]$$

$$= \lim_{\varepsilon\to -1^+}\left[\cancelto{0}{\arcsin 0} - \arcsin\varepsilon\right] + \lim_{\mu\to 1^-}\left[\arcsin\mu - \cancelto{0}{\arcsin 0}\right] =$$

$$= -\arcsin(-1) + \arcsin(1) = 2\arcsin 1$$

$$= 2\cdot\frac{\pi}{2} = \pi \quad (\text{yakınsak})$$

Ör/ $$\int_0^1 \underbrace{\ln x}_{u}\, \underbrace{dx}_{dv} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\int_\varepsilon^1 \ln x\, dx\right] = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[x\ln x\Big|_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 dx\right]$$

$u = \ln x$

$du = \frac{dx}{x}$

$dx = dv$

$x = v$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\left(1\cdot\cancel{\ln 1}^{\,0} - \underbrace{\varepsilon\cdot\ln\varepsilon}\right) - \left(x\Big|_\varepsilon^1\right)\right]$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+}(-1+\varepsilon) = -1 \quad (\text{yakınsak})$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\varepsilon\cdot\ln\varepsilon \overset{0\cdot\infty}{=} \lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{\ln\varepsilon}{\frac{1}{\varepsilon}}$$

$$\underset{\text{L'Hos.}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1/\varepsilon}{-1/\varepsilon^2} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} -\varepsilon = 0$$

# p-integralleri

$0 < a < \infty$ ise o zaman

(1. tip)

a) $$\int_a^\infty x^{-p}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[\int_a^b x^{-p}\,dx\right] = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Bigg|_a^b\right]$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[\frac{b^{-p+1}}{-p+1} - \frac{a^{-p+1}}{-p+1}\right]$$

$$= \begin{cases} \dfrac{a^{-p+1}}{p-1} & p > 1 \\ \infty & p \le 1 \end{cases}$$

(2. tip)

b) $$\int_0^a x^{-p}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\int_\varepsilon^a x^{-p}\,dx\right] = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Bigg|_\varepsilon^a\right]$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\frac{a^{-p+1}}{-p+1} - \frac{\varepsilon^{-p+1}}{-p+1}\right] = \begin{cases} \infty & p \geq 1 \text{ ise} \\ \dfrac{a^{-p+1}}{-p+1} & p < 1 \text{ ise} \end{cases}$$

Ör/ $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} , & 0 < x \leq 1 \\ x-1 , & 1 < x \leq 2 \end{cases}$ olmak üzere

$$\int_0^2 f(x)\,dx = ? \Rightarrow \int_0^2 f(x)\,dx = \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx}_{\text{(2.tip)}}^{\text{p-int. } (p=\frac{1}{2}) < 1 \text{ yak.}} + \int_1^2 (x-1)\,dx$$

$$= \frac{1^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + \left( \frac{x^2}{2} - x \Big|_1^2 \right)$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{2}} + \left[ (2-2) - \left( \frac{1}{2} - 1 \right) \right]$$

$$= 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

**Teorem:** $f$ ve $g$ fonksiyonları $-\infty \leq a < b < \infty$ olmak üzere $(a,b)$ aralığı üzerinde sürekli olsunlar ve $0 \leq f(x) \leq g(x)$ eşitsizliğini sağlasınlar.

- Eğer $\int_a^b g(x)\,dx$ yakınsak ise $\int_a^b f(x)\,dx$ de yakınsaktır.
- Eğer $\int_a^b f(x)\,dx$ ıraksak ise $\int_a^b g(x)\,dx$ de ıraksaktır.

Ör/ $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x+x^3}}$ integralinin yakınsaklığını inceleyiniz.

1.tip + 2.tip

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x+x^3}} = \underbrace{\overbrace{\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+x^3}}}^{\text{değeri} < 2}}_{\text{Yak.}} + \underbrace{\overbrace{\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x+x^3}}}^{\text{değeri} < 2}}_{\text{Yak.}} = \text{Yakınsak} < 2+2=4$$

2.tip

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+x^3}} \rightarrow \text{yakınsak}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x+x^3}} \; ? \; \boxed{\frac{1}{\sqrt{x}}}, \frac{1}{\sqrt{x^3}}$$

$$\sqrt{x+x^3} > \sqrt{x}$$

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{x+x^3}}}_{f(x)} < \underbrace{\frac{1}{\sqrt{x}}}_{g(x)}$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} \rightarrow \text{p-int.} \quad p=\frac{1}{2}<1 \quad \text{yak.}$$

$$\text{değeri} = \frac{1^{-1/2+1}}{-\frac{1}{2}+1} = 2$$

$$\sqrt{x+x^3} > \sqrt{x^3}$$

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{x+x^3}}}_{f(x)} < \underbrace{\frac{1}{\sqrt{x^3}}}_{g(x)}$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^3}} \rightarrow \text{p-int} \quad p=\frac{3}{2}>1 \quad \text{ırak.}$$

1.tip

$$\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x+x^3}} \longrightarrow \text{yak.}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x+x^3}} \; ? \quad \frac{1}{\sqrt{x}}, \; \frac{1}{\sqrt{x^3}}$$

$$\sqrt{x+x^3} > \sqrt{x}$$

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{x+x^3}}}_{f(x)} < \underbrace{\frac{1}{\sqrt{x}}}_{g(x)}$$

$$\underset{(1.\text{tip})}{\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}}} \Rightarrow \text{p\_int.} \quad p = \frac{1}{2} < 1$$

Iraksak.

$$\sqrt{x+x^3} > \sqrt{x^3}$$

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{x+x^3}}}_{f(x)} < \underbrace{\frac{1}{\sqrt{x^3}}}_{g(x)}$$

$$\underset{(1.\text{tip})}{\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3}}} \to \text{p-int.} \quad p = \frac{3}{2} > 1$$

yak.

$$\text{değeri} = \frac{1^{-\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}-1} = 2$$