Yüksek Mertebeden Toplam Diferansiyel

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \cdots + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n} a^0 b^n$$

$$z = f(x,y) \Rightarrow \quad dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

$$d^2 z = d\left[\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \right]$$

$$= \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} dy \right] dx + \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy \right] dy$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot (dx)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} dx\, dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot (dy)^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^{(2)} f(x,y)$$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

$$d^3 z = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \cdot (dx)^3 + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} (dx)^2 dy + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x} \cdot dx\, (dy)^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} (dy)^3$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^{(3)} f(x,y)$$

$$\vdots$$

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^{(n)} f(x,y)$$

05/ $u = z \cdot \arctan\frac{y}{x}$ $(1,1,1)$ noktasında d^2u toplam dif. hesaplayınız.

$$d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(dx)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}dx\,dy + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}dy\,dz + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(dy)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}\cdot(dx)(dz) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(dz)^2$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-\frac{zy}{x^2}}{1+\frac{y^2}{x^2}} = \frac{-zy}{x^2+y^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{2xyz}{(x^2+y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = \frac{-y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\frac{z}{x}}{1+\frac{y^2}{x^2}} = \frac{zx}{x^2+y^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{-2xyz}{(x^2+y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{-z(x^2+y^2)+2y^2z}{(x^2+y^2)^2} = \frac{(y^2-x^2)z}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \arctan\frac{y}{x} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{(1,1,1)} = \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = -\frac{1}{2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{1}{2} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = \frac{1}{2} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 0$$

$$\left.d^2u\right|_{(1,1,1)} = \frac{1}{2}(dx)^2 + 2\cdot 0\cdot dx\,dy + 2\frac{1}{2}\,dy\,dz + \left(-\frac{1}{2}\right)(dy)^2 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)dx\,dz + 0\cdot(dz)^2$$

$$\left.d^2u\right|_{(1,1,1)} = \frac{1}{2}(dx)^2 + dy\,dz - \frac{1}{2}(dy)^2 - dx\,dz$$

$y = f(x) \longrightarrow \quad dx = \Delta x$

$$\Delta y = f(a+\Delta x) - f(a)$$

$dy \cong \Delta y \longrightarrow$

$$f(a+\Delta x) - f(a) \cong f'(x)\,\Delta x$$

$$\underbrace{f(a+\Delta x) \cong f(a) + f'(x).\Delta x}$$

Toplam Diferansiyelin Yaklaşık Hesapta Kullanılması

$z = f(x,y)$ fonksiyonunun bağımsız değişkenleri olan x ve y değişkenlerine fonksiyonun tanımlı olduğu bir noktanın civarında sırasıyla Δx ve Δy kadar bir değişim verildiğinde fonksiyondaki değişim

$$\Delta z = f(a+\Delta x, b+\Delta y) - f(a,b)$$

olacaktır. Eğer fonksiyonun birinci mertebeden türevleri de bu nokta civarında tanımlı ve sürekli ise fonksiyondaki bu değişim miktarı

$$\Delta z = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

şeklinde de ifade edilebilir.

O halde

$$\Delta z = dz + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

dir.

$$\Delta z - dz = \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

olur. Bu sonsuz küçük mertebesinden bir değerdir. Δz artımının yerine hesaplamalarda

$$\Delta z \cong dz$$

olarak alınabilir. O halde

$$f(a+\Delta x, b+\Delta y) - f(a,b) \cong \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

$$\Rightarrow \quad f(a+\Delta x, b+\Delta y) \cong f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y$$

$\Delta z = f(a+\Delta x, b+\Delta y) - f(a,b) \rightarrow$ mutlak hata

$\dfrac{\Delta z}{z} \rightarrow$ bağıl hata, $100 \cdot \dfrac{\Delta z}{z} \rightarrow$ yüzde hata

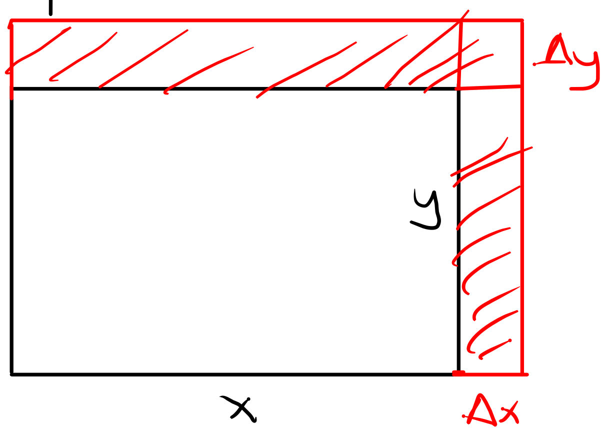
Hesaplamalarda kısmi türevlerin değerleri ve $\Delta x, \Delta y$ değişim miktarları pozitif veya negatif olabilir. Bu durumda mutlak değer alınırsa;

$$\underbrace{|\Delta z| \cong |dz|}_{\substack{\text{maksimum} \\ \text{mutlak} \\ \text{hata}}} \leq \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| |\Delta x| + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \cdot |\Delta y|$$

$\left|\frac{\Delta z}{z}\right| \rightarrow$ maksimum bağıl hata

$100 \cdot \left|\frac{\Delta z}{z}\right| \rightarrow$ maksimum yüzde hata

Ör/ Bir dikdörtgenin kenar uzunlukları 6 cm ve 8 cm olarak ölçülmüştür. Bu ölçümlerde (±0.02 cm) hata yapılabileceği gözönüne alınırsa, dikdörtgenin alanının hesabında yapılacak mutlak hata, bağıl hata ve yüzde hatayı hesaplayınız.



$$A = x \cdot y$$

$$\Delta A = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$$

$$= (x+\Delta x)(y+\Delta y) - xy$$

$$= x\,\Delta y + y\,\Delta x + \Delta x\,\Delta y$$

$$\Delta A = 6 \cdot (0{,}02) + 8\,(0.02) + (0{,}02)^2 = \underline{0{,}2804\ \text{cm}^2}$$

$$dA = \frac{\partial A}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial \Delta}{\partial y}\Delta y$$

$$= y \cdot \Delta x + x \cdot \Delta y$$

$$= 8 \cdot (0{,}02) + 6 \cdot (0{,}02)$$

$$= 0{,}28 \text{ cm}^2$$

$$\Delta A - dA = 0{,}2804 - 0{,}28 = 0{,}0004 \text{ cm}^2$$

$$\frac{\Delta A}{\Delta} = \frac{0{,}2804}{48} \cong \frac{0.28}{48} = 0.00583 \rightarrow \text{bağıl hata}$$

$$100 \cdot \frac{\Delta A}{\Delta} = 100 \cdot (0.00583) = 0.583 \rightarrow \text{yüzde hata}$$

Ör/ $k = \sqrt{(2.03)^3 + (2.98)^2 - 1{,}04}$ sayısının yaklaşık değerini toplam dif. yardımıyla bulunuz.

$$u = f(x,y,z) = \sqrt{x^3 + y^2 - z} \qquad x=2,\ y=3,\ z=1$$

$$\Delta x = 0.03,\ \Delta y = -0.02,\ \Delta z = 0.04$$

$$\Delta z \cong dz \Rightarrow f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - f(x,y,z) \cong \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z$$

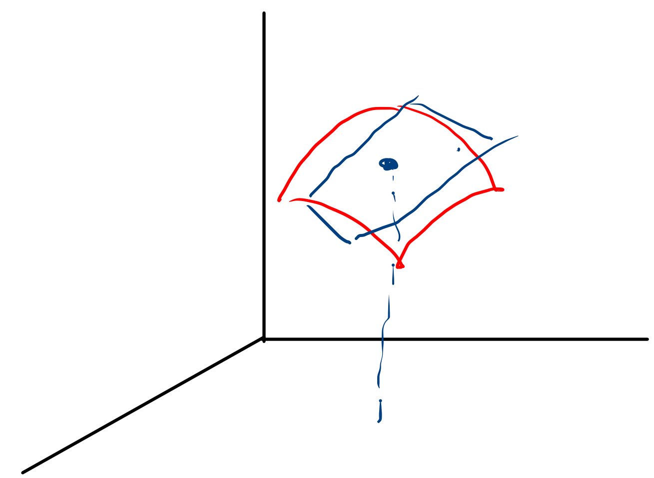
$$f\left[\underset{x}{2}+\underset{\Delta x}{0.03},\ \underset{y}{3}\underset{\Delta y}{-0.02},\ \underset{z}{1}+\underset{\Delta z}{0.04}\right] \cong f(2,3,1)+\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(2,3,1)}\Delta x+\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(2,3,1)}\Delta y+\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{(2,3,1)}\Delta z$$

$$f(x,y,z)=\sqrt{x^3+y^2-z}$$

$$f(2,3,1)=\sqrt{8+9-1}=4$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+y^2-z}},\quad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\cancel{2}y}{\cancel{2}\sqrt{x^3+y^2-z}},\quad \frac{\partial f}{\partial z}=\frac{-1}{2\sqrt{x^3+y^2-z}}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(2,3,1)}=\frac{12}{2\cdot 4}=\frac{3}{2},\quad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(2,3,1)}=\frac{3}{4},\quad \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{(2,3,1)}=-\frac{1}{8}$$

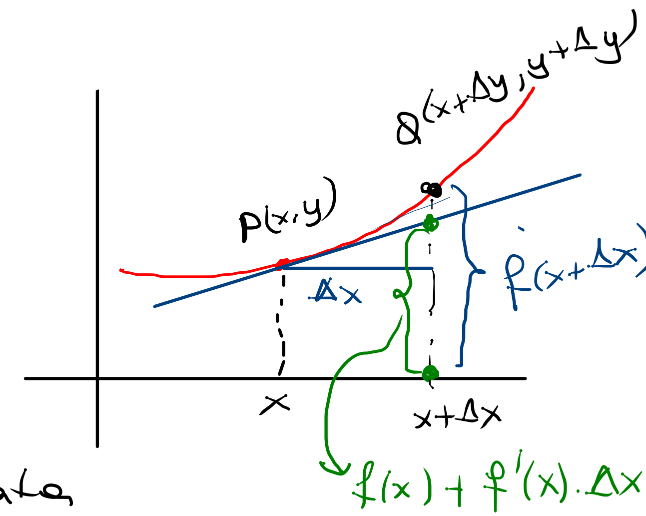


$$f(2.03,\ 2.98,\ 1.04)\cong 4+\frac{3}{2}\cdot(0.03)+\frac{3}{4}\cdot(-0.02)+\left(-\frac{1}{8}\right)\cdot(0.04)$$

$$\cong 4.025$$

$du \cong \Delta u = f(2.03,\ 2.98,\ 1.04)-f(2,3,1)=4.025-4=0.025 \rightarrow$ mutlak hata

$\dfrac{\Delta u}{u}\cong\dfrac{du}{u}=\dfrac{0.025}{4}\rightarrow$ bağıl hata $\qquad 100\cdot\dfrac{du}{u}=\dfrac{2.5}{4}\rightarrow$ yüzde hata



Homojen Fonksiyonlar

Bir D bölgesinin her (x,y) noktası için λ sıfırdan farklı bir parametre ve m herhangi bir reel sayı olmak üzere

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^m f(x,y)$$

ise f fonksiyonuna m. dereceden homojen fonksiyon denir.

Ör/ • $f(x,y) = x^2 - 2xy + 3y^2 \rightarrow f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^2 - 2(\lambda x)(\lambda y) + 3(\lambda y)^2$

$$= \lambda^2 x^2 - 2\lambda^2 xy + 3\lambda^2 y^2$$

$$= \lambda^2 (x^2 - 2xy + 3y^2)$$

$$= \lambda^2 f(x,y) \rightarrow \text{2. dereceden homojen fonk.}$$

• $f(x,y,z) = x^{1/3} y^{-4/3} \arctan \frac{y}{x} + \frac{x}{z^2}$

$$f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = (\lambda x)^{1/3} (\lambda y)^{-4/3} \arctan \frac{\lambda y}{\lambda x} + \frac{\lambda x}{(\lambda z)^2} = \frac{1}{\lambda} x^{1/3} y^{-4/3} \arctan \frac{y}{x} + \frac{1}{\lambda} \frac{x}{z^2}$$

$$= \frac{1}{\lambda} \left[x^{1/3} y^{-4/3} \arctan \frac{y}{x} + \frac{x}{z^2} \right]$$

$$= \lambda^{-1} f(x,y) \rightarrow \text{(-1). dereceden homojen fonk.}$$

- $f(x,y) = 2x^2 - y^3 \rightarrow f(\lambda x, \lambda y) = 2(\lambda x)^2 - (\lambda y)^3$
$= 2\lambda^2 x^2 - \lambda^3 y^3 \rightarrow$ homojen fonk. değildir.

Teorem : (Euler teoremi)

$z = f(x,y)$ fonksiyonu ve birinci mertebeden kısmi türevleri bir D bölgesinde tanımlı, sürekli iseler ve $f(x,y)$, D bölgesinde m. dereceden bir homojen fonksiyon ise o zaman

$$x \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = m \cdot f(x,y)$$

dir.

ispat : $f(\overset{x}{\widehat{\lambda x}}, \overset{y}{\widehat{\lambda y}}) = \lambda^m f(x,y)$. (Homojen olduğuna göre)

Eşitliğin her iki tarafının λ'ya göre türevini alalım;

$x = x(\lambda)$ $\qquad f[x(\lambda), y(\lambda)] = F(\lambda)$

$y = y(\lambda)$

$$\frac{dF}{d\lambda} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{d\lambda} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{d\lambda}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{d\lambda} f(\lambda x, \lambda y) = x \cdot f'_x(\lambda x, \lambda y) + y \cdot f'_y(\lambda x, \lambda y) = m \cdot \lambda^{m-1} f(x,y)$$

$\lambda = 1$ alırsak; $\quad x \cdot f'_x(x,y) + y \cdot f'_y(x,y) = m \cdot f(x,y)$

$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to m.$ dereceden homojen fonk ise

$$x_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \cdot \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + x_n \cdot \frac{\partial f}{\partial x_n} = m \cdot f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Teorem: (Euler teoreminin karşıtı)

Eğer $z = f(x,y)$ fonksiyonu ve birinci mertebeden kısmi türevleri bir D bölgesinde tanımlı ve sürekli iseler ve her $(x,y) \in D$ için

$$x \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = m \cdot f(x,y)$$

ise $f(x,y)$ fonksiyonu bu D bölgesinde $m.$ dereceden homojen fonksiyondur.

İspat: Keyfi bir $(x_0, y_0) \in D$ noktası seçelim. Tüm λ değerleri için

$$h(\lambda) = f(\overset{x}{\lambda x_0}, \overset{y}{\lambda y_0}) \quad \text{olsun.}$$

$$\Rightarrow h'(\lambda) = x_0 f'_x(\lambda x_0, \lambda y_0) + y_0 f'_y(\lambda x_0, \lambda y_0)$$

$x = \lambda x_0 \quad y = \lambda y_0$ alırsak

$$\underbrace{\lambda x_0}_{x} f'_x(\underbrace{\lambda x_0}_{x}, \lambda y_0) + \underbrace{\lambda y_0}_{y} f'_y(\lambda x_0, \underbrace{\lambda y_0}_{y}) = m \cdot f(\lambda x_0, \lambda y_0)$$

$$\Rightarrow \lambda \left[x_0 f'_x(\lambda x_0, \lambda y_0) + y_0 f'_y(\lambda x_0, \lambda y_0) \right] = m \cdot f(\lambda x_0, \lambda y_0)$$

$$\lambda \cdot h'(\lambda) = m \cdot f(\lambda x_0, \lambda y_0)$$

$$\lambda \cdot h'(\lambda) = m \cdot h(\lambda)$$ elde edilir.

$\lambda^{-m} \cdot h(\lambda)$ 'nın λ'ya göre türevini alalım;

$$\frac{d}{d\lambda}\left[\lambda^{-m} \cdot h(\lambda)\right] = -m \lambda^{-m-1} h(\lambda) + \lambda^{-m} h'(\lambda)$$

$$= -m\lambda^{-m-1} h(\lambda) + \lambda^{-m-1} \cdot \underbrace{\lambda h'(\lambda)}$$

$$= -m\lambda^{-m-1} h(\lambda) + \lambda^{-m-1} m \cdot h(\lambda)$$

$$= 0$$

$\Rightarrow \lambda^{-m} \cdot h(\lambda) = c$ (sbt) 'dir. $\lambda = 1 \Rightarrow c = h(1) = f(x_0, y_0)$

$\Rightarrow \lambda^{-m} h(\lambda) = f(x_0, y_0) \Rightarrow h(\lambda) = \lambda^m f(x_0, y_0)$

$\Rightarrow f(\lambda x_0, \lambda y_0) = \lambda^m f(x_0, y_0)$

Ör/ $f(x,y) = x^2 - 2xy + 3y^2 \rightarrow$ 2. dereceden homojen olduğunu gördük. Euler teoremini sağlatalım.

$$x \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = 2 \cdot f(x,y)$$ old. gösterelim.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -2x + 6y$$

$$\Rightarrow x \cdot (2x - 2y) + y(-2x + 6y) = 2x^2 - 2xy - 2xy + 6y^2$$

$$= 2x^2 - 4xy + 6y^2$$

$$= 2(x^2 - 2xy + 3y^2)$$

$$= 2 f(x,y)$$