Ör/ $(xy^2+y)\,dx + (2y-x)\,dy = 0$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$\underbrace{(xy^2+y)}_{P}\,dx + \underbrace{(2y-x)}_{Q}\,dy = 0$

$P(x,y) = y(xy+1)$

$\dfrac{\partial P}{\partial y} = 2xy+1 \neq \dfrac{\partial Q}{\partial x} = -1$ Tam dif. denk değil.

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 2xy+1-(-1) = 2xy+2 = 2(xy+1)$$

$$\ln\lambda = \int \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}\,dx \rightarrow \lambda = \lambda(x)$$

$$\ln\lambda = \int \frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P}\,dy \rightarrow \lambda = \lambda(y)$$

$$\Rightarrow \ln\lambda = \int \frac{-2\cancel{(xy+1)}}{y\cancel{(xy+1)}}\,dy$$

$$\ln\lambda = -2\ln y \Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{1}{y^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y^2}(xy^2+y)\,dx + \frac{1}{y^2}(2y-x)\,dy = 0 \Rightarrow \underbrace{\left(x+\frac{1}{y}\right)}_{P_1(x,y)}dx + \underbrace{\left(\frac{2}{y} - \frac{x}{y^2}\right)}_{Q_1(x,y)}dy = 0$$

$\dfrac{\partial P_1}{\partial y} = \dfrac{-1}{y^2} = \dfrac{\partial Q_1}{\partial x} = \dfrac{-1}{y^2}$ Tam dif. denk.

$$\left(x+\frac{1}{y}\right)dx+\left(\frac{2}{y}-\frac{x}{y^2}\right)dy = 0 = du(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$$

$=$ (1)

$=$ (2)

(1)'den $\quad du(x,y)=0 \Rightarrow \boxed{u(x,y)=c_1}$ (3)

(2)'den $\quad \dfrac{\partial u}{\partial x} = x+\dfrac{1}{y}$ (4) $\quad \Rightarrow$ (4)'den $\displaystyle\int \partial u = \int\left(x+\frac{1}{y}\right)dx \Rightarrow u(x,y)=\frac{x^2}{2}+\frac{x}{y}+h(y)$ (6)

$\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{2}{y}-\dfrac{x}{y^2}$ (5) $\qquad$ (6)'dan; $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{x}{y^2}+\dfrac{dh}{dy}$ (7)

(7) ve (5)'den $\quad \cancel{-\dfrac{x}{y^2}}+\dfrac{dh}{dy} = \dfrac{2}{y}\cancel{-\dfrac{x}{y^2}} \Rightarrow \displaystyle\int dh = \int\frac{2}{y}dy \Rightarrow h(y)=2\ln y + c_2$ (8)

(8)'i (6)'da yerine yazarsak $\quad \boxed{u(x,y)=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x}{y}+2\ln y + c_2}$ (9)

(3) ve (9)'dan $\quad \dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x}{y}+2\ln y + c_2 = c_1 \Rightarrow \dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x}{y}+2\ln y = \underbrace{c_1-c_2}_{c}$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{2}+\frac{x}{y}+2\ln y = c}$$ Genel Çözüm.

Ör/ $\underbrace{\left(x - y\sin\frac{y}{x}\right)}_{P} dx + \underbrace{x\sin\frac{y}{x}}_{Q} dy = 0$ dif. denklemi tam dif. denklem midir? Değilse bir integrasyon çarpanı bularak çözünüz.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial y} &= -\sin\frac{y}{x} - y\cdot\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x} = -\sin\frac{y}{x} - \frac{y}{x}\cos\frac{y}{x} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} &= \sin\frac{y}{x} - \frac{y}{x^2}\cdot x\cos\frac{y}{x} = \sin\frac{y}{x} - \frac{y}{x}\cos\frac{y}{x} \end{aligned}\right\} \neq$$ Tam dif. denk. değil.

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = -\sin\frac{y}{x} \cancel{- \frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}} - \sin\frac{y}{x} \cancel{+ \frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}} = -2\sin\frac{y}{x}$$

$\lambda = \lambda(x)$

$$\ln\lambda = \int \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}\,dx = \int \frac{-2\cancel{\sin\frac{y}{x}}}{x\cancel{\sin\frac{y}{x}}}\,dx = -2\int\frac{dx}{x} = -2\ln x$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{1}{x^2}} \quad \Rightarrow \frac{1}{x^2}\left(x - y\sin\frac{y}{x}\right)dx + \frac{1}{x^2}x.\sin\frac{y}{x}\,dy = 0$$

$$\underbrace{\left(\frac{1}{x} - \frac{y}{x^2}\sin\frac{y}{x}\right)}_{P_1} dx + \underbrace{\frac{1}{x}\sin\frac{y}{x}}_{Q_1} dy = 0 \Rightarrow$$

$$\underbrace{\left(\frac{1}{x}-\frac{y}{x^2}\sin\frac{y}{x}\right)}_{P_1}dx+\underbrace{\frac{1}{x}\sin\frac{y}{x}}_{Q_1}dy=0 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial y}=-\frac{1}{x^2}\sin\frac{y}{x}-\frac{y}{x^2}\cdot\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x}=-\frac{1}{x^2}\sin\frac{y}{x}-\frac{y}{x^3}\cos\frac{y}{x}$$

$=$ Tam dif. denk.

$$\frac{\partial Q_1}{\partial x}=-\frac{1}{x^2}\sin\frac{y}{x}+\left(-\frac{y}{x^2}\right)\cdot\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x}=-\frac{1}{x^2}\sin\frac{y}{x}-\frac{y}{x^3}\cos\frac{y}{x}$$

$$\left(\frac{1}{x}-\frac{y}{x^2}\sin\frac{y}{x}\right)dx+\frac{1}{x}\sin\frac{y}{x}dy=0=du(x,y)=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy$$

$=$ 1

$=$ 2

1'den $du(x,y)=0 \Rightarrow \boxed{u(x,y)=C_1}$ 3

2'den $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{x}-\frac{y}{x^2}\sin\frac{y}{x}$ 4 $\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{x}\sin\frac{y}{x}$ 5

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{x}\sin\frac{y}{x} \Rightarrow \int \partial u = \int \frac{1}{x}\sin\frac{y}{x}\,dy \Rightarrow u(x,y) = -\cos\frac{y}{x} + h(x) \quad (6)$$

(6)'dan x'e göre türev alırsak;

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}\sin\frac{y}{x} + \frac{dh}{dx} \quad (7)$$

(4) ve (7)'den $\quad \frac{1}{x} - \cancel{\frac{y}{x^2}\sin\frac{y}{x}} = \cancel{-\frac{y}{x^2}\sin\frac{y}{x}} + \frac{dh}{dx} \Rightarrow \int dh = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow h(x) = \ln x + C_2 \quad (8)$

(8)'i (6)'da yazarsak; $\quad \boxed{u(x,y) = -\cos\frac{y}{x} + \ln x + C_2} \quad (9)$

(3) ve (9)'dan $\quad C_1 = -\cos\frac{y}{x} + \ln x + C_2 \Rightarrow -\cos\frac{y}{x} + \ln x = \underbrace{C_1 - C_2}_{C}$

$$\Rightarrow \boxed{-\cos\frac{y}{x} + \ln x = C}$$ Genel çözüm.

Birinci Mertebeden Lineer Diferansiyel Denklemler

$a(x)y' + b(x)y + c(x) = 0$ şeklinde y ve y' ne göre lineer olan bir diferansiyel denkleme birinci mertebeden lineer diferansiyel denklem denir.

Genellikle uygulamada $a(x) \neq 0$ olduğundan

$$y' + \frac{b(x)}{a(x)}y + \frac{c(x)}{a(x)} = 0 \quad \text{ve} \quad \frac{b(x)}{a(x)} = p(x) \;,\quad -\frac{c(x)}{a(x)} = q(x) \quad \text{olmak üzere}$$

$$y' + p(x)y = q(x)$$

şeklinde kullanılır. Burada $p(x) \neq 0$, $q(x) \neq 0$

$q(x) \equiv 0 \Rightarrow y' + p(x)y = 0$ Değişkenlerine ayrılabilirdir.

$q(x) \equiv 0 \Rightarrow$ ikinci tarafsız

$q(x) \not\equiv 0 \Rightarrow$ ikinci taraflı

Bu tür denklemin genel çözümünün bulunması için farklı yöntemler vardır.

1. YÖNTEM (Sabitin Değişimi)

$y'+p(x)y=q(x)$ dif. denk'ni gözönüne alalım.

$q(x)\not\equiv 0$

Bir an için $q(x)\equiv 0$ kabul edelim.

$$y'+p(x)y=0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}+p(x)y=0 \Rightarrow \frac{dy}{y}+p(x)dx=0 \qquad (y\neq 0)$$

$$\Rightarrow \ln y+\int p(x)dx=\ln c \Rightarrow \quad y=c.e^{-\int p dx}$$ → ikinci tarafsız denk'in çözümü

Bu çözüm $q(x)\equiv 0$ olmasının sonucudur. Ancak lineer denklemde hiçbir zaman $q(x)\equiv 0$ olmayacaktır. O zaman lineer denklemin bu çözüm için hangi koşullarda sağlanabileceğini araştıralım.

Bu amaçla $c=c(x)$ olarak düşünelim.

$$y=c(x).e^{-\int p(x)dx} \Rightarrow y'=c'.e^{-\int p(x)dx}-p(x).c.e^{-\int p(x)dx}$$

$$y'+p(x)y=q(x) \Rightarrow c'e^{-\int p(x)dx}-\cancel{p(x).c.e^{-\int p(x)dx}}+\cancel{p(x).c.e^{-\int p(x)dx}}=q(x)$$

$$c'e^{-\int p(x)dx}=q(x)$$

$$\Rightarrow c' = q(x) \cdot e^{\int p(x)\,dx}$$

$$\Rightarrow c = \int q(x) \cdot e^{\int p(x)\,dx}\,dx + k$$

$$\Rightarrow y = c \cdot e^{-\int p(x)\,dx} \Rightarrow y = \left[\int q(x) \cdot e^{\int p(x)\,dx}\,dx + k\right] \cdot e^{-\int p(x)\,dx}$$

$$\boxed{y = e^{-\int p(x)\,dx} \int q(x)\, e^{\int p(x)\,dx}\,dx + k \cdot e^{-\int p(x)\,dx}}$$ Genel Çözüm.

Ör/ $y' - y\underbrace{\cot x}_{p(x)} = \underbrace{\sin x}_{q(x)}$ dif. denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Lineer dif. denk.

Sabitin değişimi yöntemi ile çözelim,

$$y' - y\cot x = 0 \Rightarrow \int \frac{dy}{y} - \int \cot x\,dx = \int 0 \Rightarrow \ln y - \ln|\sin x| = \ln c$$

$$\boxed{y = c \cdot \sin x}$$

$c = c(x)$

$y = c(x) \cdot \sin x$

$y' = c' \sin x + c \cos x$

$y' - y \cot x = \sin x \Rightarrow c' \sin x + \cancel{c \cos x} - \cancel{c \cdot \sin x \cdot \frac{\cos x}{\sin x}} = \sin x$

$\Rightarrow c' \sin x = \sin x \Rightarrow c' = 1 \Rightarrow c = x + k$

$\Rightarrow y = c \cdot \sin x \Rightarrow \boxed{y = (x+k) \cdot \sin x = x \sin x + k \sin x}$

Ör/ $(1+x^2)y' + xy = x$ dif. denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$y' + \frac{x}{1+x^2} y = \frac{x}{1+x^2}$ L.D.D.

Sabitin Değişimi ; $y' + \frac{x}{1+x^2} y = 0 \Rightarrow \int \frac{dy}{y} + \int \frac{x}{1+x^2} dx = \int 0 \Rightarrow \ln y + \frac{1}{2} \ln(x^2+1) = \ln c$

$y = \frac{c}{\sqrt{x^2+1}}$

$$c = c(x) \Rightarrow y = \frac{c(x)}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$y' = \frac{c' \cdot \sqrt{x^2+1} - \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+1}} \cdot c}{x^2+1}$$

$$= \frac{c'(x^2+1) - cx}{(x^2+1)^{3/2}}$$

$$x^2+1 = u^2$$

$$2x\,dx = 2u\,du$$

$$x\,dx = u\,du$$

$$y' + \frac{x}{x^2+1} y = \frac{x}{x^2+1} \Rightarrow \frac{c'}{\sqrt{x^2+1}} - \cancel{c \cdot \frac{x}{(x^2+1)^{3/2}}} + \cancel{c \cdot \frac{x}{(x^2+1)^{3/2}}} = \frac{x}{x^2+1}$$

$$\Rightarrow c' = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \Rightarrow c = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+1}} + k$$

$$= \int \frac{u\,du}{u} + k \Rightarrow c = u + k \Rightarrow c = \sqrt{x^2+1} + k$$

$$y = \frac{c}{\sqrt{x^2+1}} \Rightarrow \boxed{y = \frac{\sqrt{x^2+1} + k}{\sqrt{x^2+1}} = 1 + \frac{k}{\sqrt{x^2+1}}}$$

Genel Çözüm.

2. YÖNTEM (integrasyon çarpanı)

$$y' + p(x)\,y = q(x)$$

$$\frac{dy}{dx} + [p(x)y - q(x)] = 0 \Rightarrow \underbrace{[p(x)y - q(x)]}_{P}\,dx + \underbrace{}_{Q}dy = 0$$

$$P(x,y) = p(x)\cdot y - q(x) \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = p(x)$$

$$Q(x,y) = 1 \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$

$\neq$ Tam dif. denk. değildir.

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = p(x) - 0 = p(x)$$

$\lambda = \lambda(x)$ dir.

$$\ln\lambda = \int \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}\,dx = \int \frac{p(x)}{1}\,dx \Rightarrow \boxed{\lambda = e^{\int p(x)\,dx}}$$

$$\underbrace{e^{\int p(x)dx}\cdot y' + p(x)\,y\cdot e^{\int p(x)dx}}_{\frac{d}{dx}\left[y\cdot e^{\int p(x)dx}\right]} = q(x)\cdot e^{\int p(x)dx}$$

$$\frac{d}{dx}\left[y\cdot e^{\int p(x)dx}\right] = q(x)\cdot e^{\int p(x)dx} \Rightarrow \int d\left[y\cdot e^{\int p(x)dx}\right] = \int q(x)\cdot e^{\int p(x)dx}\,dx + k$$

$$\int d\left[y\cdot e^{\int p(x)dx}\right] = \int q(x)\cdot e^{\int p(x)dx}\,dx + k$$

$$\Rightarrow y\cdot e^{\int p(x)dx} = \int q(x)\cdot e^{\int p(x)dx}\,dx + k$$

$$\Rightarrow \boxed{y = e^{-\int p(x)dx}\left[\int q(x)\cdot e^{\int p(x)dx}\,dx + k\right]}$$ Genel çözüm.

Ör/ $xy' - y = x^2$ dif. denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$p(x) = -\frac{1}{x}$, $q(x) = x$

$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x$ L.D.D.

$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{1}{x}$ $\quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$

$$\frac{dy}{dx} - \left[\frac{y}{x} + x\right] = 0 \Rightarrow \underbrace{dy}_{Q(x,y)} \underbrace{- \left[\frac{y}{x} + x\right]}_{P(x,y)} dx = 0$$

$$\lambda = \lambda(x) \Rightarrow \lambda = e^{\int p(x)dx} \Rightarrow \lambda = e^{-\int \frac{1}{x}dx} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{x}\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x^2}} = 1 \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{y}{x}\right) = 1 \Rightarrow \int d\left(\frac{y}{x}\right) = \int dx \Rightarrow \frac{y}{x} = x + k$$

$\boxed{y = x^2 + kx}$ Genel Çözüm.