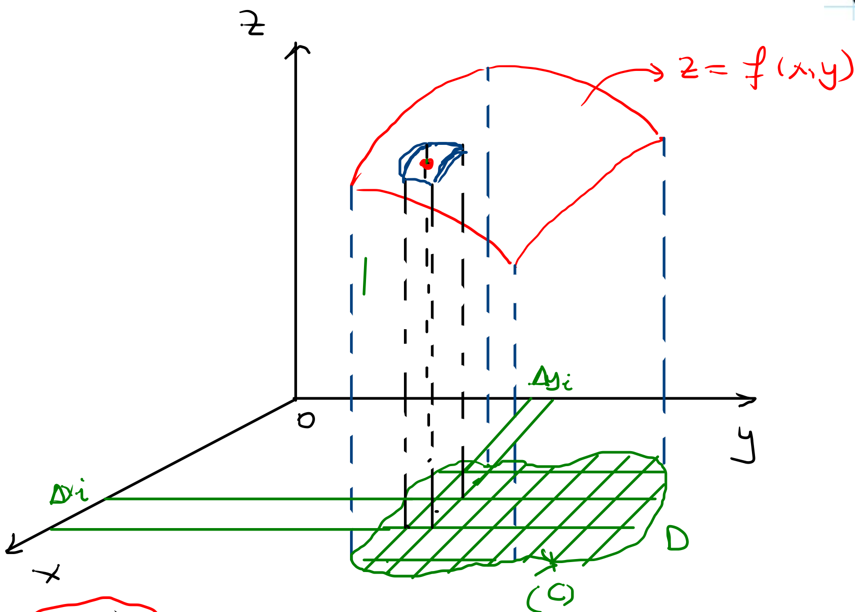
İki katlı integraller

xoy düzleminde bir c eğrisi ile sınırlı kapalı bir D bölgesinde tanımlı ve sürekli olan $z=f(x,y)$ fonksiyonunu gözönüne alalım.



D bölgesini, alanları ΔA_i $(i=1,2,\dots,n)$ olan kısmi bölgelere ayırıp bu bölgelerden keyfi (x_i, y_i) noktaları seçelim. Ve

$$f(x_1,y_1)\cdot\Delta A_1 + f(x_2,y_2)\,\Delta A_2 + \dots + f(x_n,y_n)\,\Delta A_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\,\Delta A_i$$

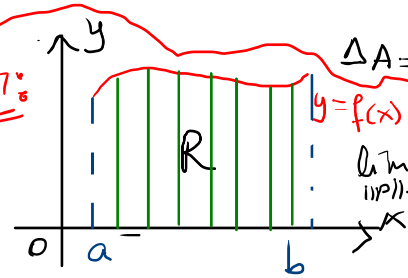
toplamını oluşturalım. Bu toplam, tabanı ΔA_i ve yüksekliği $f(x_i,y_i)$ olan silindir elemanlarının hacimleri toplamıdır. ΔA_i alanlarının herbirinin sıfıra yaklaşması halinde bu toplamın limitine $z=f(x,y)$ fonksiyonunun D bölgesinde iki katlı integrali denir ve

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\cdot\Delta A_i = \iint_D f(x,y)\, dA$$

$(\Delta A_i \to 0)$

şeklinde gösterilir. Bu integralin değeri, D bölgesinin çevresi üzerinde üstten $z=f(x,y)$ ve alttan xoy-düzlemi ile sınırlı cismin hacmini verir. Bu limit D bölgesinin kısmi bölgelere bölünüş şekline ve (x_i,y_i) noktalarının ΔA_i içindeki seçiliş şekline bağlı değildir. Eğer D bölgesi eksenlere paralel doğrularla kısmi bölgelere ayrılırsa, kısmi bölgeler birer dikdörtgen olur ve bu dikdörtgenlerin alanları $\Delta A_i = \Delta x_i\,\Delta y_i$ ve dolayısıyla

NOT:



$\Delta A = \Delta x_i\,\Delta y_i$

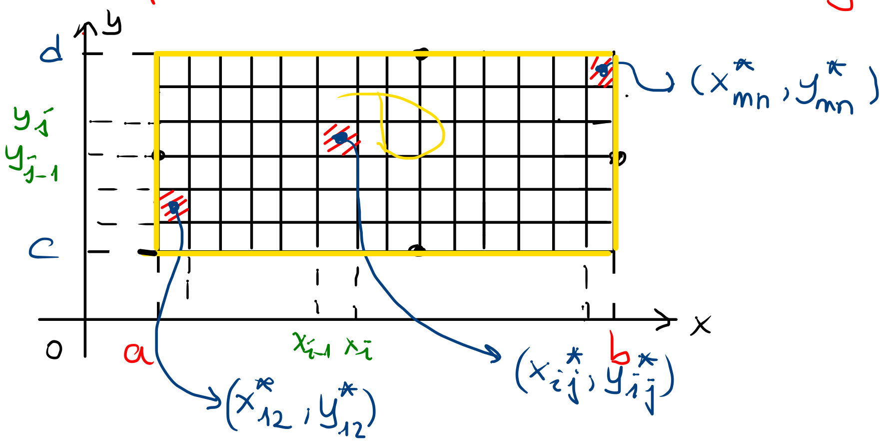
$$\lim_{\|P\|\to 0} R(f,P) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\cdot\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\, \Delta A_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \cdot \Delta x_i \Delta y_i = \iint_D f(x,y)\, dx\, dy$$

olur. D bölgesine integrasyon bölgesi denir.

Düzgün bölge : Eğer, D bölgesinin çevresi, eksenlere dik doğrularla en çok iki noktada kesiliyorsa bölgeye düzgün bölge denir.

Dikdörtgenler üzerinde iki katlı integraller



D bölgesinin; kenarları xy-düzlemindeki koordinat eksenlerine paralel olan bir dikdörtgensel bölge olduğunu $f(x,y)$ fonksiyonunun da bu bölge üzerinde sınırlı bir fonksiyon olduğunu gözönüne alalım. Eğer D bölgesi $a \le x \le b$, $c \le y \le d$ şeklindeki (x,y) noktalarından oluşuyorsa o zaman $[a,b]$ ve $[c,d]$ aralıklarının herbirini

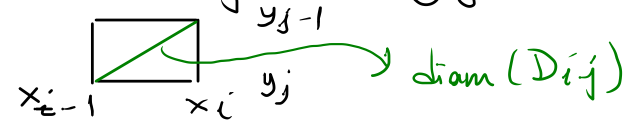
$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_i < \dots < x_m = b$

$c = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_j < \dots < y_n = d$ şeklinde parçalayarak

D bölgesinin küçük dikdörtgenlerden oluşan bir P parçalanışını oluşturabiliriz. P parçalanışı mn tane D_{ij} $(1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n)$ dikdörtgenlerinden oluşur. Dikdörtgenlerin herbiri $x_{i-1} \le x \le x_i$, $y_{j-1} \le y \le y_j$

noktalarından oluşur. D_{ij} dikdörtgenin alanı $\Delta A_{ij} = \Delta x_i \, \Delta y_j$ ve diyagonal uzunluk

$$\mathrm{diam}\,(D_{ij}) = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_j - y_{j-1})^2}$$



şeklindedir. P parçalanışının normu $\|P\| = \max\limits_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}} (\mathrm{diam}\,(D_{ij}))$ dir. Her bir D_{ij} dikdörtgeninden bir (x_{ij}^*, y_{ij}^*) noktası alarak her bir parçalanıştaki dikdörtgene karşı gelen mn terimin toplamı olan

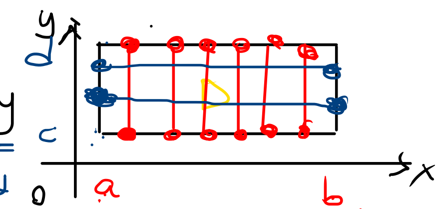
$$R(f,P) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\,\Delta A_{ij}$$

Riemann toplamını oluşturalım. Her bir D_{ij} dikdörtgenine karşılık gelen terim eğer $f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \geq 0$ ise tabanı D_{ij} ve yüksekliği $f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)$'ın değeri olan dikdörtgensel kutunun hacmidir.

$$\lim_{\|P\|\to 0} R(f,P) = \iint_D f(x,y)\,dA = \int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dy\,dx = \int_c^d\int_a^b f(x,y)\,dx\,dy$$

x'e göre düzgün.

y'ye göre düzgün.



dir.

Teorem: (Fubini'nin 1. teoremi)

Eğer $f(x,y)$, $a \le x \le b$, $c \le y \le d$ dikdörtgensel bölgesi üzerinde sürekli ise;

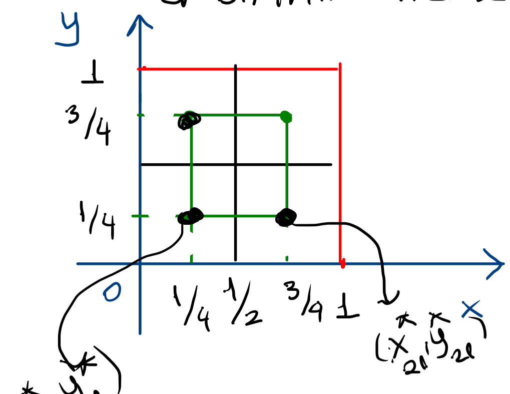
$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_a^b\left[\int_c^d f(x,y)\,dy\right]dx = \int_c^d\left[\int_a^b f(x,y)\,dx\right]dy$$

dir.

NOT: D bölgesi üzerinde sürekli olan fonksiyonlar bu bölgede integrallenebilirdirler.

Ör/ D bölgesi $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$ karesi olsun. $\iint_D (x^2+y)\, dA$ integraline yaklaşık bir değer bulmak için bölgenin 4 tane küçük kareye parçalanışına karşılık gelen Riemann toplamını her birinin merkezindeki noktaları seçerek kullanınız.

$$f(x,y) = x^2+y$$



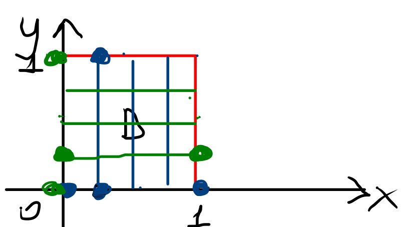
$$R(f,P) = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \cdot \Delta A_{ij}$$

$$= f(x_{11}^*, y_{11}^*) \cdot \Delta A_{11} + f(x_{12}^*, y_{12}^*)\Delta A_{12} + f(x_{21}^*, y_{21}^*)\Delta A_{21} + f(x_{22}^*, y_{22}^*)\Delta A_{22}$$

$$= \left[\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}\right] \cdot \frac{1}{4} + \left[\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{4}\right] \cdot \frac{1}{4} + \left[\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}\right] \cdot \frac{1}{4} + \left[\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{3}{4}\right] \cdot \frac{1}{4}$$

$$\Delta A_{ij} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{5}{16} + \frac{13}{16} + \frac{13}{16} + \frac{21}{16}\right] = \frac{52}{64} = \frac{13}{16} \cong \iint_D (x^2+y)\, dA$$



x'e dik doğrularla bölgeyi tararsak; (x'e göre düzgün)

$$\iint_D (x^2+y)\, dA = \int_0^1 \left[\int_0^1 (x^2+y)\, dy\right] dx = \int_0^1 \left(x^2 y + \frac{y^2}{2} \Big|_0^1\right) dx = \int_0^1 \left(x^2 + \frac{1}{2}\right) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$$

y'ye dik doğrularla bölgeyi tararsak; (y'ye göre düzgün)

$$\iint_D (x^2+y)\, dA = \int_0^1 \left[\int_0^1 (x^2+y)\, dx\right] dy = \int_0^1 \left(\frac{x^3}{3} + yx \Big|_0^1\right) dy = \int_0^1 \left(\frac{1}{3} + y\right) dy = \frac{y}{3} + \frac{y^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$$

Ö5/ $D: \begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ -1 \le y \le 2 \end{cases}$ ve $f(x,y) = 100 - 6x^2y$ olduğuna göre $\iint_D f(x,y)\,dA = ?$

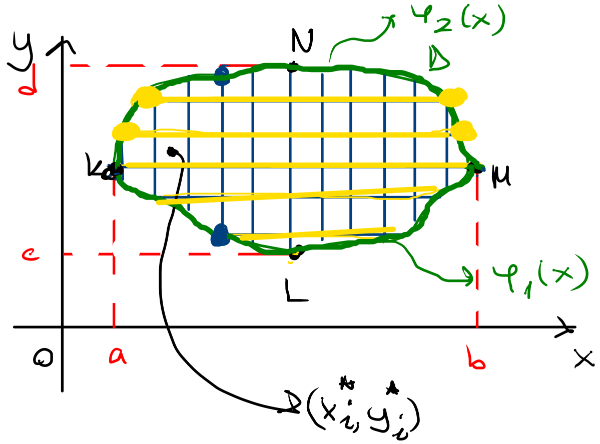
$$\iint_D (100 - 6x^2y)\,dA = \int_0^2 \int_{-1}^2 (100 - 6x^2y)\,dy\,dx = \int_0^2 \left(100y - \frac{6x^2y^2}{2} \Big|_{-1}^{2}\right) dx = \int_0^2 \left[(200 - 12x^2) - (-100 - 3x^2)\right] dx$$

$$= \int_0^2 [300 - 9x^2]\,dx = 300x - 3x^3 \Big|_0^2 = 600 - 24 = 576$$

$$= \int_{-1}^2 \int_0^2 (100 - 6x^2y)\,dx\,dy = \int_{-1}^2 \left[100x - 2x^3y \Big|_0^2\right] dy = \int_{-1}^2 (200 - 16y)\,dy = 200y - 8y^2 \Big|_{-1}^2$$

$$= [400 - 32] - [-200 - 8] = 600 - 24 = 576$$

Genel Bölgeler Üzerinde İki Katlı İntegraller. (Dik kesitler kullanarak iki katlı integrali hesaplamak)



$\widehat{KLM} : \varphi_1(x)$

$\widehat{KNM} : \varphi_2(x)$

$\widehat{NKL} = g_1(y)$

$\widehat{NML} = g_2(y)$

$$R(f,P) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\,\Delta A_{ij}$$

$$\lim_{m,n \to \infty} R(f,P) = \iint_D f(x,y)\,dA$$

x'e dik doğrularla bölge taranırsa;
(x'e göre düzgün)

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_{\widehat{KLM}}^{\widehat{KNM}} f(x,y)\,dy\,dx = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$

y'ye dik doğrularla bölge taranırsa;
(y'ye göre düzgün)

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_c^d \int_{\widehat{NKL}}^{\widehat{NML}} f(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \int_c^d \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$

Teorem: (Fubini'nin 2. teoremi)

$f(x,y)$ bir D bölgesi üzerinde sürekli olsun.

1) Eğer D bölgesi $\varphi_1(x)$ ve $\varphi_2(x)$ $[a,b]$ aralığında sürekli olmak üzere $a \le x \le b$, $\varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)$ ile tanımlı ise;

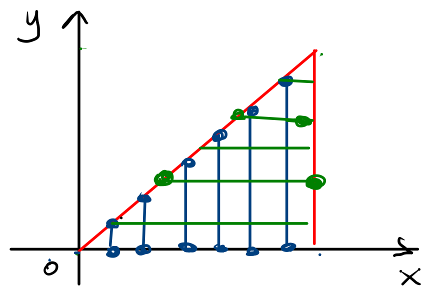
$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\right] dx$$

2) Eğer D bölgesi $g_1(y)$ ve $g_2(y)$ $[c,d]$ aralığında sürekli olmak üzere $g_1(y) \le x \le g_2(y)$, $c \le y \le d$ ile tanımlı ise

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_c^d \left[\int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)\,dx\right] dy$$

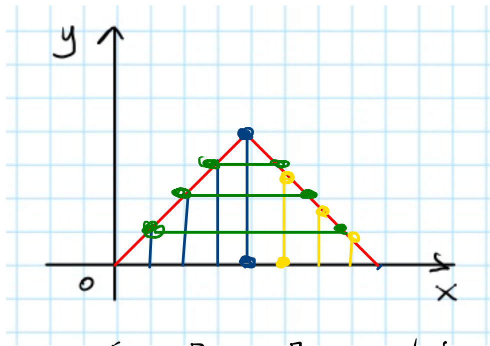
dir.

Düzgün bölge örnekleri



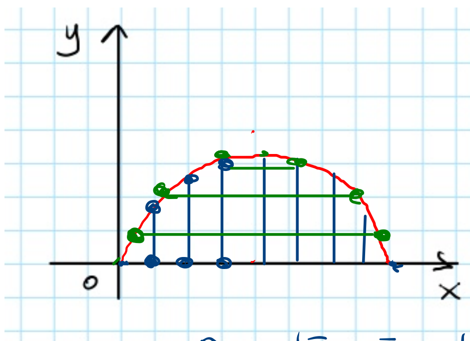
x'e göre bölge düzgündür.

y'ye göre de bölge düzgündür.



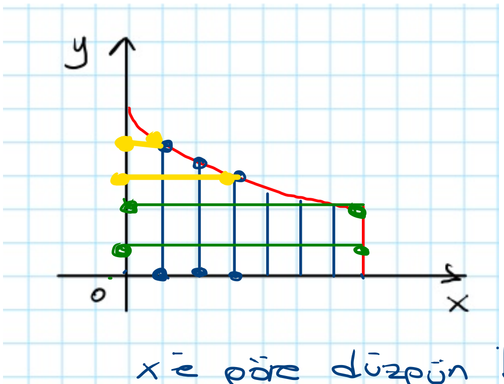
x'e göre düzgün bir bölge değildir.

y'ye göre düzgün bölgedir.



x'e göre düzgün bölge.

y'ye göre de düzgün bölge



x'e göre düzgün bölgedir.

y'ye göre düzgün bir bölge değildir.

Ör/ $I = \int_{-2}^{1} \int_{y^2}^{2-y} dx\,dy$

a) verildiği şekliyle hesaplayınız.

b) integrasyon sırasını değiştirerek integrali yeniden yazınız.

a) $I = \int_{-2}^{1} \left[\int_{y^2}^{2-y} dx \right] dy = \int_{-2}^{1} \left(x \Big|_{y^2}^{2-y} \right) dy = \int_{-2}^{1} \left[2 - y - y^2 \right] dy$

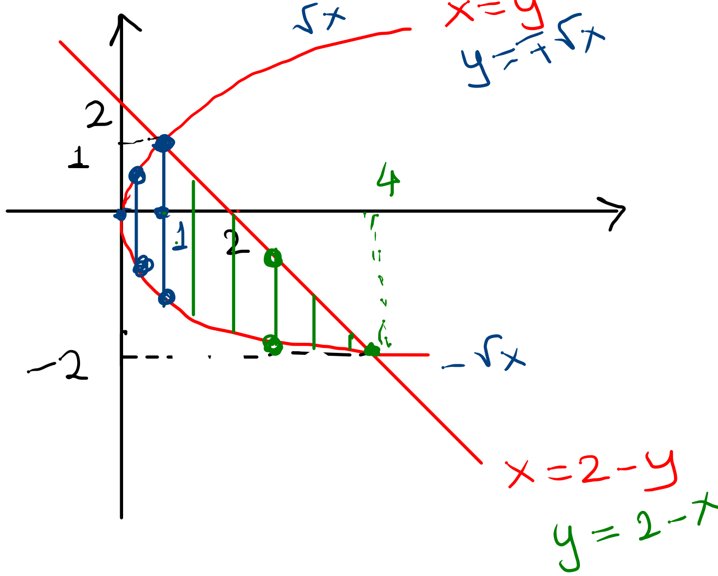
$= 2y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \Big|_{-2}^{1}$

$= \left(2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - \left(-4 - 2 + \frac{8}{3}\right)$

$= 8 - \frac{5}{6} - \frac{8}{3} = 8 - \frac{21}{6} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2}$

b) $y^2 \le x \le 2-y$

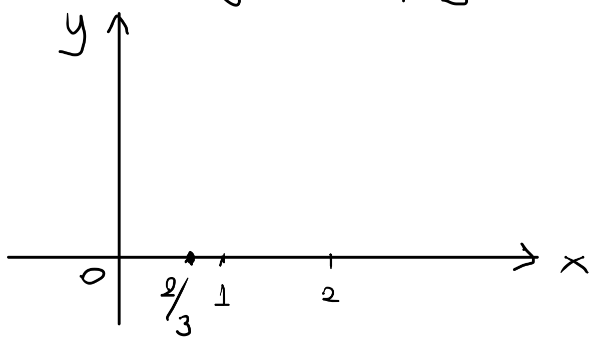
$-2 \le y \le 1$



$$I = \int_{-2}^{1}\int_{y^2}^{2-y} dx\,dy = \int_{0}^{1}\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} dy\,dx + \int_{1}^{4}\int_{-\sqrt{x}}^{2-x} dy\,dx$$

$I = \int_0^{2/3} \int_{2x}^{2-x} f(x,y)\,dy\,dx$ integralinde integrasyon sırası değiştirildiğinde elde edilen yeni integral aşağıdakilerden hangisidir?

$$D: \begin{cases} 0 \le x \le \frac{2}{3} \\ 2x \le y \le 2-x \end{cases}$$



a) $\int_0^{2/3} \int_{2y}^{2-y} f(x,y)\,dx\,dy$

b) $\int_0^{2/3} \int_0^{y/2} f(x,y)\,dx\,dy + \int_0^{4/3} \int_0^{2-y} f(x,y)\,dx\,dy$

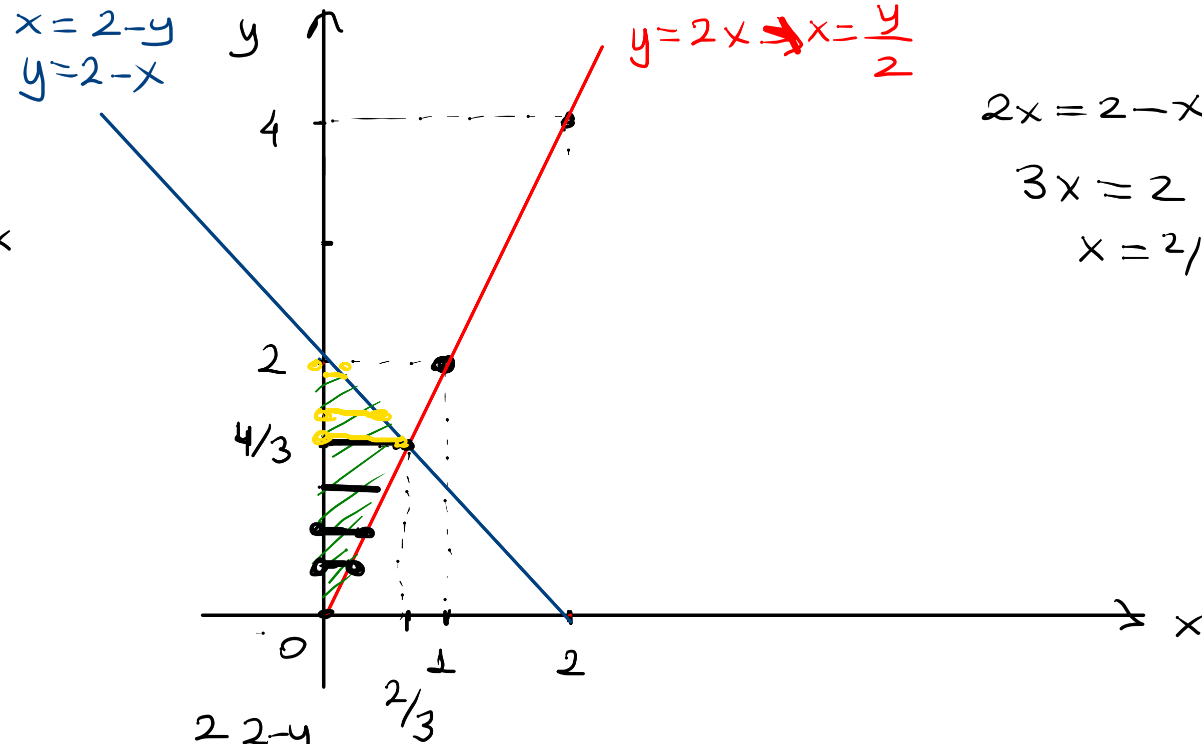
c) $\int_0^{4/3} \int_0^{y/2} f(x,y)\,dx\,dy + \int_{4/3}^{2} \int_0^{2-y} f(x,y)\,dx\,dy$

d) $\int_0^{2/3} \int_0^{y/2} f(x,y)\,dx\,dy + \int_{2/3}^{2} \int_0^{2-y} f(x,y)\,dx\,dy$

e) $\int_0^{4/3} \int_{2-y}^{y/2} f(x,y)\,dx\,dy$

$D: \quad 0 \leq x \leq \frac{2}{3}$

$2x \leq y \leq 2 - x$



$2x = 2 - x$

$3x = 2$

$x = 2/3$

$$I = \int_0^{4/3} \int_0^{y/2} f(x,y)\,dx\,dy + \int_{4/3}^{2} \int_0^{2-y} f(x,y)\,dx\,dy$$

$$I=\int_0^{\sqrt{2}}\int_{\frac{y^2}{2}}^{\sqrt{3-y^2}} f(x,y)\,dx\,dy$$ integralinde integrasyon sırasını değiştirerek integrali yeniden yazınız.

$0 \le y \le \sqrt{2}$

$\frac{y^2}{2} \le x \le \sqrt{3-y^2}$

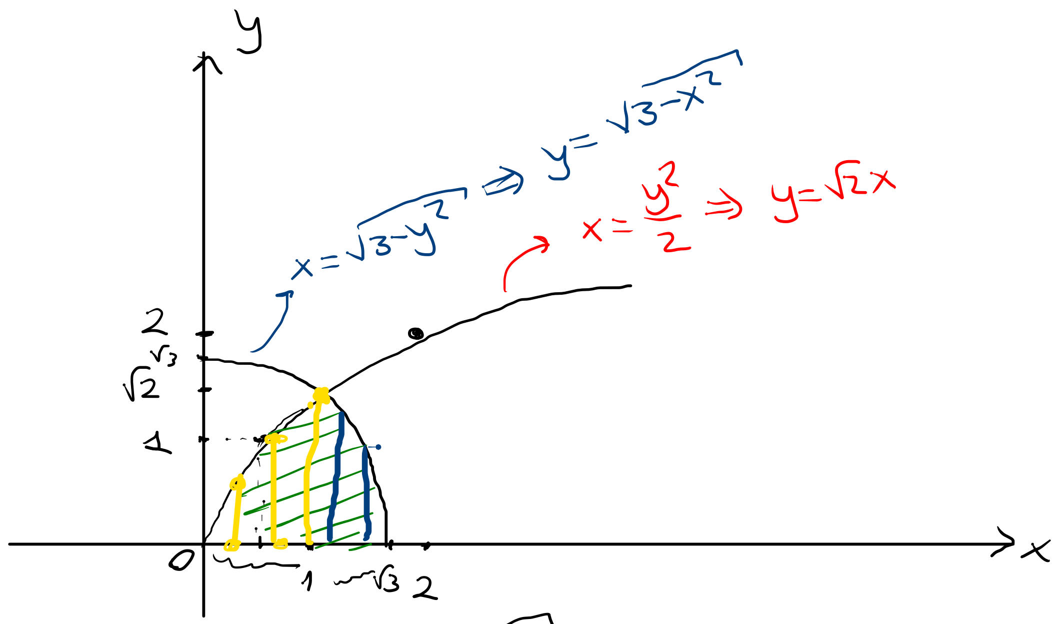
$x=\frac{y^2}{2} \Rightarrow y^2=2x$

$x^2+y^2=3$

$x^2+2x=3$

$x^2+2x-3=0$

$x=-3 \quad x=1$



$$I=\int_0^1\int_0^{\sqrt{2x}} f(x,y)\,dy\,dx+\int_1^{\sqrt{3}}\int_0^{\sqrt{3-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx$$

$$\underbrace{\int_0^1 \int_{\frac{x^2}{9}}^{x} f(x,y)\,dy\,dx}_{D_1} + \underbrace{\int_1^3 \int_{\frac{x^2}{9}}^{1} f(x,y)\,dy\,dx}_{D_2}$$

integrasyon sırası değiştirildiğinde elde edilen yeni integral aşağıdakilerden hangisidir?

a) $\displaystyle\int_0^1 \int_{\frac{y^2}{9}}^{y} f(x,y)\,dx\,dy + \int_1^3 \int_{y^2/9}^{1} f(x,y)\,dx\,dy$

b) $\displaystyle\int_0^1 \int_{y}^{3\sqrt{y}} f(x,y)\,dx\,dy$

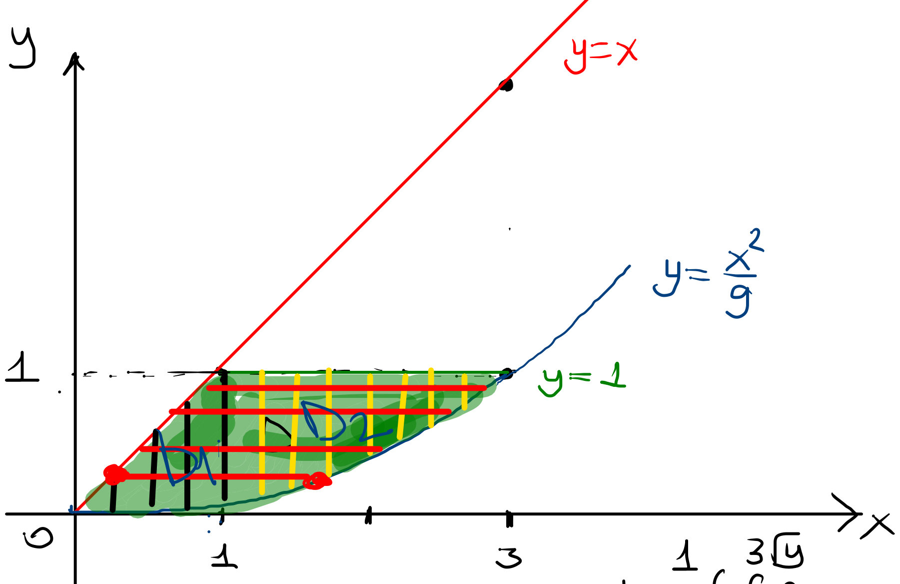
c) $\displaystyle\int_0^1 \int_{3\sqrt{y}}^{y} f(x,y)\,dx\,dy$

d) $\displaystyle\int_1^3 \int_{x}^{3\sqrt{x}} f(x,y)\,dx\,dy$

e) $\displaystyle\int_0^1 \int_{y}^{y^2/9} f(x,y)\,dx\,dy + \int_1^3 \int_1^{y^2/9} f(x,y)\,dx\,dy$

$D_1:\ 0 \le x \le 1$, $\ \frac{x^2}{9} \le y \le x$

$D_2:\ 1 \le x \le 3$, $\ \frac{x^2}{9} \le y \le 1$



$$I = \int_0^1 \int_{y}^{3\sqrt{y}} f(x,y)\,dx\,dy$$

İki katlı integralin özellikleri

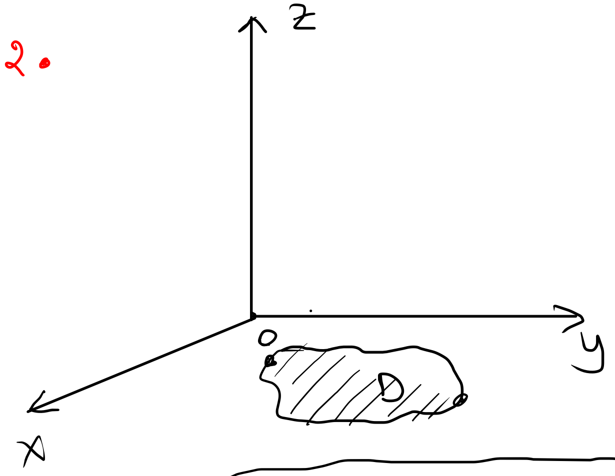
f ve g bir D bölgesi üzerinde integrallenebilir fonksiyonlar, L ve M herhangi reel sabitler olmak üzere

1) $D=0 \Rightarrow \iint_D f(x,y)\, dA = 0 \longrightarrow D: \; 0 \le \overset{x=0}{x \le 0} \quad 0 \le \overset{y=0}{y \le 0}$

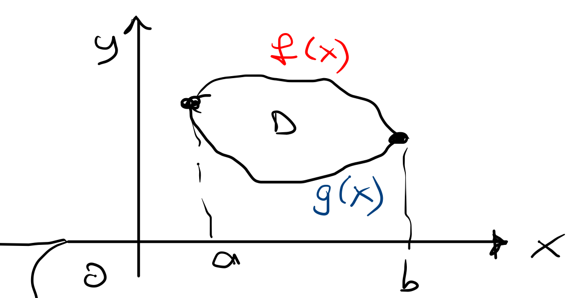
2) $f(x,y) \equiv 1 \Rightarrow \iint_D 1 . dA \rightarrow$ D bölgesinin alanını verir. $\rightarrow \iint_D dA$.

3) Eğer D bölgesi üzerinde $f(x,y) \geq 0$ ise $\iint_D f(x,y)\, dA = V$ dir. V, D bölgesinin üzerinde $f(x,y)$ nin grafiği

2.

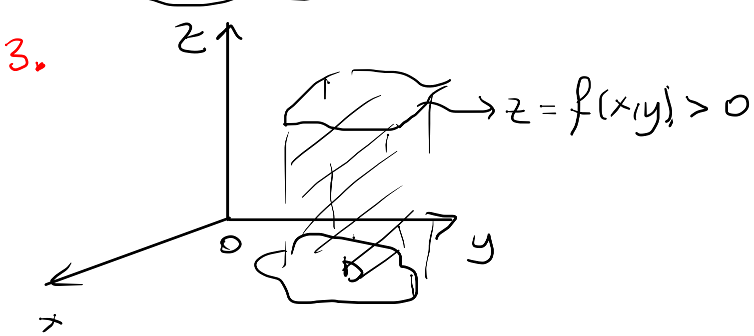


$$A = \iint_D dA = \int_a^b \left[\int_{g(x)}^{f(x)} dy \right] dx$$



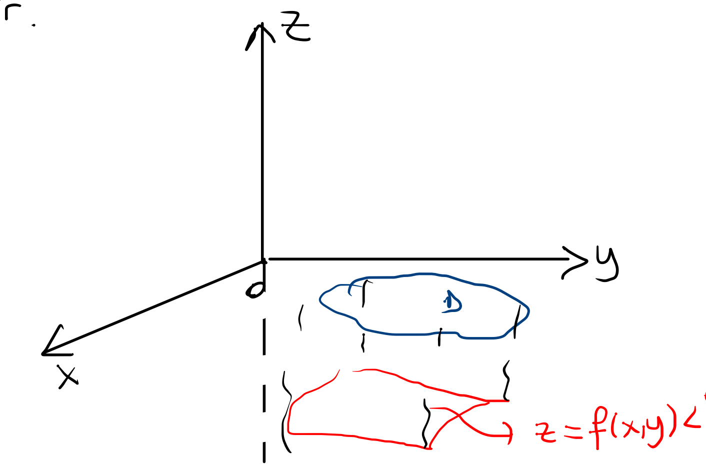
$$A = \int_a^b \left[f(x) - g(x) \right] dx$$

3.



altında dikey olarak oluşan cismin hacmidir.

4) Eğer D bölgesinde $f(x,y) \le 0$ ise, $\iint_D f(x,y)\,dA = -V \le 0$ dır. $-V$, D bölgesinin altında $f(x,y)$'nin grafiği üstünde dikey olarak oluşan cismin hacmidir.



5) $\iint_D \left[L f(x,y) \mp M g(x,y) \right] dA = L \iint_D f(x,y)\,dA + M \iint_D g(x,y)\,dA$

6) $f(x,y) \le g(x,y) \Rightarrow \iint_D f(x,y)\,dA \le \iint_D g(x,y)\,dA$

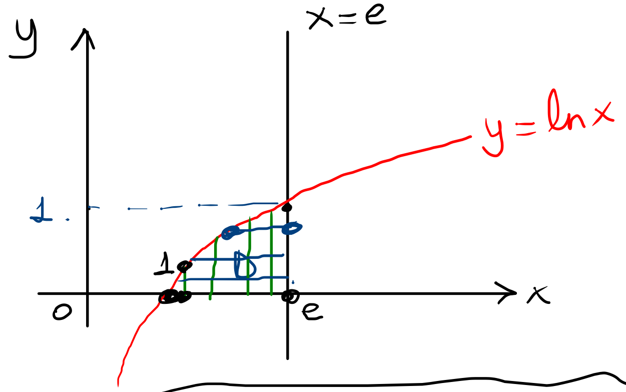
7) $\left| \iint_D f(x,y)\,dA \right| \le \iint_D |f(x,y)|\,dA$

8) Eğer $D_1, D_2, \dots, D_k$ bölgeleri üst üste gelmeyen (kesişmeyen veya çakışmayan) bölgeler ve $f(x,y)$ bu bölgelerin her birinde integrallenebilir bir fonksiyon ise $D = D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_k$ birleşim bölgesinde de integrallenebilirdir.

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \iint_{D_1} f(x,y)\,dA + \iint_{D_2} f(x,y)\,dA + \dots + \iint_{D_k} f(x,y)\,dA$$

(Kesişmeyen bölgeler ortak sınır noktasına sahip olabilirler ancak ortak iç noktaya sahip değildirler)

Ör/ x-ekseni, $x=e$ doğrusu ve $y=\ln x$ eğrisi arasında kalan alanı veren iki katlı integrali yazınız ve alanın değerini bulunuz.



x'e göre düzgün alınırsa;

$$A=\int_1^e\left[\int_0^{\ln x} dy\right]dx = \int_1^e \left[\, y\Big|_0^{\ln x}\right]dx = \int_1^e \ln x\, dx$$

$$= x\ln x - x\Big|_1^e = (e-e)-(1.0-1)$$

$$= 1\ br^2$$

y'ye göre düzgün alınırsa;

$$A=\int_0^1\int_{e^y}^{e} dx\,dy = \int_0^1 \left(x\Big|_{e^y}^{e}\right)dy = \int_0^1 (e-e^y)dy$$

$$= e.y - e^y\Big|_0^1 = (e-e)-(e.0-1)$$

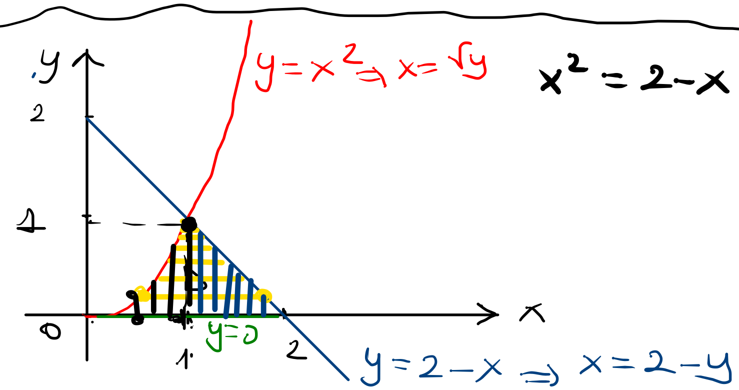
$$= 1\ br^2$$

Ör/ İki katlı integral ile $y=x^2$ eğrisi, $y=2-x$ ve $y=0$ doğruları ile sınırlandırılmış bölgenin alanını veren integrali

a) y'ye dik kesitler kullanarak yazınız.

b) x'e dik kesitler kullanarak yazınız.

a) $\displaystyle\int_0^1\int_{\sqrt{y}}^{2-y} dx\,dy$ b) $\displaystyle\int_0^1\int_0^{x^2} dy\,dx + \int_1^2\int_0^{2-x} dy\,dx$



$x^2 = 2-x \Rightarrow x^2+x-2=0$

$x=-2 \quad x=1$

a) $\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^{2-y} dx\, dy = \int_0^1 \left(x \Big|_{\sqrt{y}}^{2-y} \right) dy = \int_0^1 (2 - y - \sqrt{y})\, dy = 2y - \frac{y^2}{2} - \frac{2}{3} y^{3/2} \Big|_0^1$

$= 2 - \frac{1}{2} - \frac{2}{3}$

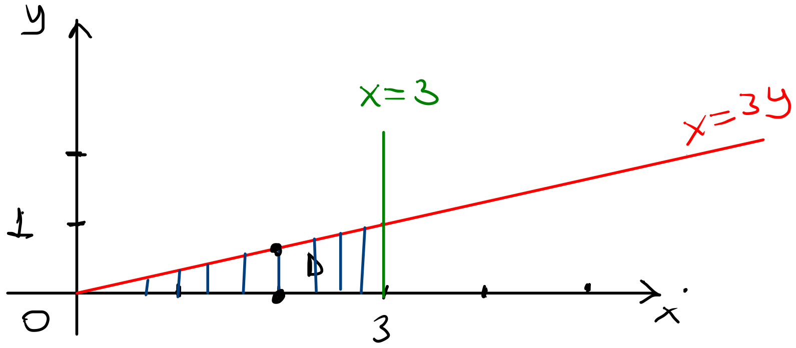
$= \frac{12 - 3 - 4}{6} = \frac{5}{6}\, br^2$

Ör/ $I = \int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^2}\,dx\,dy = ?$

İntegral verildiği şekliyle hesaplanamaz. Çünkü içte alınacak olan integral bildiğimiz elemanter yöntemlerle hesaplanabilecek bir integral değildir. Yani eliptik integraldir. Verilen integrali integrasyon sırasını değiştirerek çözmeye çalışabiliriz.

$0 \le y \le 1$

$3y \le x \le 3$



$$I = \int_0^3 \left[\int_0^{x/3} e^{x^2}\,dy \right] dx = \int_0^3 \left(e^{x^2} y \Big|_0^{x/3} \right) dx$$

$$= \int_0^3 \left[\left(\frac{x}{3} - 0 \right) e^{x^2} \right] dx$$

$x^2 = t$

$2x\,dx = dt$

$x\,dx = \frac{dt}{2}$

$x = 0 \Rightarrow t = 0$

$x = 3 \Rightarrow t = 9$

$$= \frac{1}{3} \int_0^3 x \cdot e^{x^2}\,dx$$

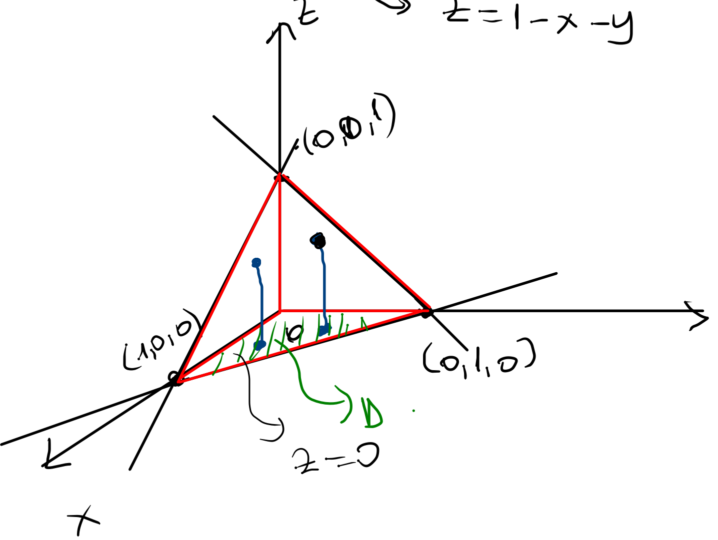
$$= \frac{1}{3} \int_0^9 e^t \cdot \frac{dt}{2} = \frac{1}{6} e^t \Big|_0^9$$

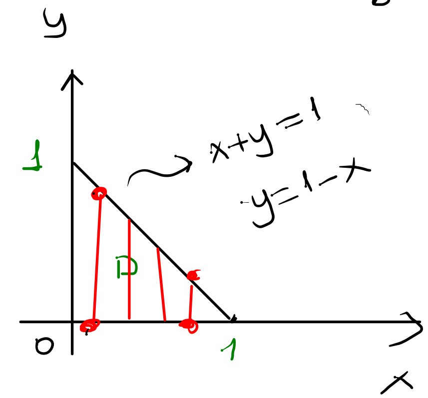
$$= \frac{1}{6} (e^9 - e^0) = \frac{1}{6} (e^9 - 1)$$

Ör/ $x+y+z=1$ düzlemi $x=0$, $y=0$ ve $z=0$ düzlemleri arasında kalan cismin hacmini bulunuz.

$z = 1-x-y$

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$ (düzlemin kesen formundaki denklemidir)





$$V = \iint_D (1-x-y)\, dA$$

$$= \int\int (1-x-y)\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} (1-x-y)\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \left[\left(y - xy - \frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^{1-x} \right] dx = \int_0^1 \left[1-x - x\cdot(1-x) - \frac{(1-x)^2}{2} \right] dx$$

$$= \int_0^1 \left[1 - x - x + x^2 - \frac{1}{2}(x^2 - 2x - 1) \right] dx$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2} - x + \frac{3}{2} \right] dx = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + \frac{3x}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{6} - \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = \frac{1}{6} + 1 = \frac{7}{6}\, br^3$$

Ör/ $I = \int_1^2 \int_0^{\sqrt{3-y}} \frac{x}{y}\, dx\, dy = ?$

a) Verildiği şekliyle integrali hesaplayınız.

b) Integrasyon sırasını değiştirerek yeni integrali yazınız.

a) $$I = \int_1^2 \left[\int_0^{\sqrt{3-y}} \frac{x}{y}\, dx \right] dy = \int_1^2 \left(\frac{x^2}{2y} \Big|_0^{\sqrt{3-y}} \right) dy = \int_1^2 \left(\frac{3-y}{2y} \right) dy$$

$$= \frac{3}{2} \int_1^2 \frac{dy}{y} - \frac{1}{2} \int_1^2 dy$$

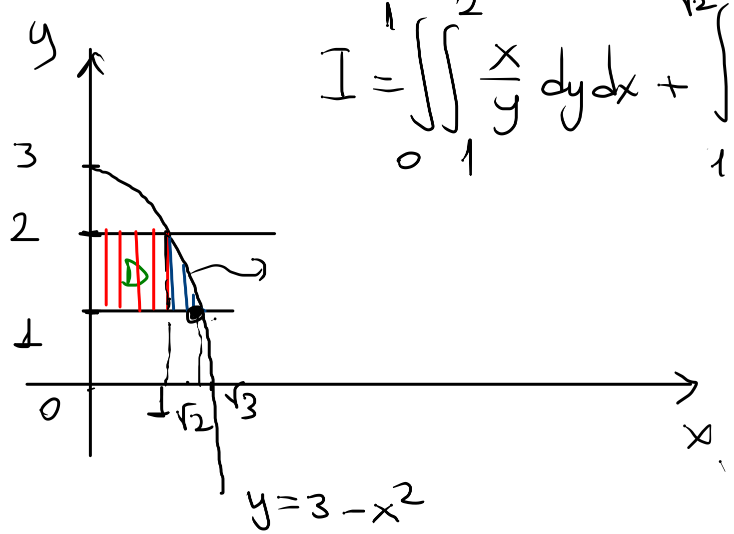
$$= \frac{3}{2}\left(\ln|y| \Big|_1^2 \right) - \left(\frac{y}{2} \Big|_1^2 \right)$$

$$= \frac{3}{2}\left[\ln|2| - \cancel{\ln|1|}^{\,0} \right] - \frac{1}{2}(2-1)$$

$$= \frac{3}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}$$

b) $1 \leq y \leq 2$

$0 \leq x \leq \sqrt{3-y}$



$$I = \int_0^1 \int_1^2 \frac{x}{y}\, dy\, dx + \int_1^{\sqrt{2}} \int_1^{3-x^2} \frac{x}{y}\, dy\, dx$$

Ör/ $\displaystyle\int_0^3 \int_1^{e^y} (x+y)\,dx\,dy$

$y = u \Rightarrow dy = du$

$e^y dy = dv \Rightarrow e^y = v$

a) Verildiği şekliyle integrali hesaplayınız.

b) Integrasyon sırasını değiştirerek yeni integrali yazınız.

a) $\displaystyle\int_0^3 \left[\frac{x^2}{2} + xy \Big|_1^{e^y} \right] dy = \int_0^3 \left[\left(\frac{e^{2y}}{2} + ye^y\right) - \left(\frac{1}{2} - y\right) \right] dy = \frac{1}{2}\int_0^3 \left(e^{2y} - 1 + y\right) dy + \int_0^3 ye^y dy$

$\displaystyle = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}e^{2y} - y + \frac{y^2}{2} \Big|_0^3 \right] + \left[ye^y \Big|_0^3 - \int_0^3 e^y dy \right]$

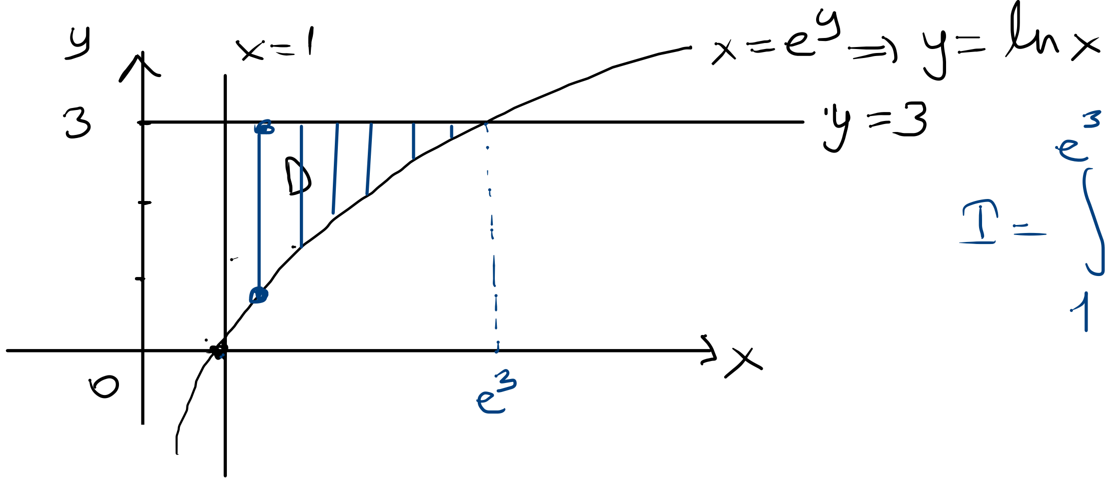
$\displaystyle = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{e^6}{2} - 3 + \frac{9}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} - 0 + 0\right) \right] + \left[(3e^3 - 0) - \left(e^y \Big|_0^3\right) \right]$

$\displaystyle = \frac{e^6}{4} - \frac{3}{2} + \frac{9}{4} - \frac{1}{4} + 3e^3 - (e^3 - 1)$

$\displaystyle = \frac{e^6}{4} + 2e^3 + \frac{3}{2}$

$0 \leq y \leq 3$

$1 \leq x \leq e^y$



$$I = \int_1^{e^3}\int_{\ln x}^{3} (x+y)\, dy\, dx$$

Ör/ Üçgen tabanı xoy düzleminde olan ve x-ekseni $y=x$, $x=1$ doğruları ile sınırlanan, tepesi $z = 3-x-y$ düzleminde bulunan prizmanın hacmini bulunuz.