KISMİ TÜREVLER

Tanım: $f(x,y)$ fonksiyonunun x ve y değişkenlerine göre birinci mertebeden kısmi türevleri:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h} \quad \text{ve} \quad \lim_{k\to 0} \frac{f(x,y+k)-f(x,y)}{k}$$

limitlerinin mevcut olması koşuluyla sırasıyla $\frac{\partial z}{\partial x}$ ve $\frac{\partial z}{\partial y}$ fonksiyonlarıdır. Burada $\frac{\partial z}{\partial x}$, y sabit bir parametre olmak üzere sadece x'in bir fonksiyonu olarak göz önüne alınan $f(x,y)$ fonksiyonunun x'e göre birinci mertebe türevidir.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = f_1(x,y) = f_x(x,y) \quad , \quad \frac{\partial}{\partial x} = D_x \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = D_x z = D_x f(x,y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = f_2(x,y) = f_y(x,y) \quad , \quad \frac{\partial}{\partial y} = D_y \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = D_y z = D_y f(x,y)$$

Ör/ $z=f(x,y)=x^2\sin y$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x\sin y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2\cos y$$

Ör/ $u=f(x,y,z)=\dfrac{2xy}{1+xz+yz}$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2y(1+xz+yz) - z\cdot 2xy}{(1+xz+yz)^2} = \frac{2y+2y^2z}{(1+xz+yz)^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2x(1+xz+yz) - z\cdot 2xy}{(1+xz+yz)^2} = \frac{2x+2x^2z}{(1+xz+yz)^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{0-(x+y)\cdot 2xy}{(1+xz+yz)^2} = \frac{-2xy(x+y)}{(1+xz+yz)^2}$$

Ör/ $z=f(x,y)=xy^2-x^2+y$ fonksiyonunun $(2,3)$ noktasındaki y'ye göre kısmi türevini tanımdan yararlanarak hesaplayınız.

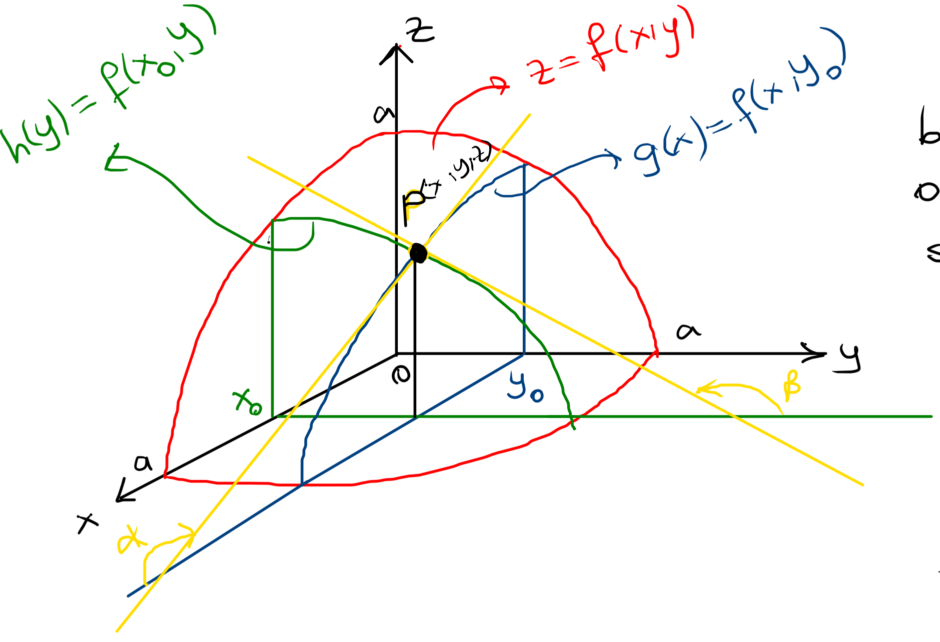
$$\frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{k\to 0}\frac{f(x,y+k)-f(x,y)}{k} \Rightarrow \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(2,3)} = \lim_{k\to 0}\frac{f(2,3+k)-f(2,3)}{k} = \lim_{k\to 0}\frac{\left[2(3+k)^2-4+(3+k)\right]-17}{k}$$

$$= \lim_{k\to 0}\frac{2(9+6k+k^2)-4+3+k-17}{k} = \lim_{k\to 0}\frac{13k+2k^2}{k}$$

$$= \lim_{k\to 0}(13+2k) = 13$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2xy+1 \Rightarrow \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(2,3)} = 13$$

Kısmi türevin geometrik anlamı



$z=f(x,y)$ iki değişkenli fonksiyonu üç boyutlu uzayda bir S yüzeyi gösterir. Bu yüzey üzerindeki bir nokta $P(x,y,z)$ olsun. Yüzeyin denkleminde $y=y_0$ alarak y değişkenini sabit yaparsak elde edilen $z=f(x,y_0)=g(x)$ tek değişkenli fonksiyonu, S yüzeyi üzerinde P noktasından geçen ve xoz-düzlemine paralel olan bir eğrinin denklemidir. Benzer şekilde yüzeyin denkleminde $x=x_0$ alarak x değişkenini sabit kılarsak elde edilen $z=f(x_0,y)=h(y)$ tek değişkenli fonksiyonu, S yüzeyi üzerinde P noktasından geçen ve yoz-düzlemine paralel olan bir eğrinin denklemidir.

$\frac{\partial z}{\partial x}$ ve $\frac{\partial z}{\partial y}$ kısmi türevleri sırasıyla $z=f(x,y_0)$ ve $z=f(x_0,y)$ eğrilerinin göz önüne alınan P noktasındaki türevleri olduğundan, bu kısmi türevlerin geometrik anlamları, bu eğrilerin P noktasındaki teğetlerinin eğimi olur.

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_P=\tan\alpha \qquad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_P=\tan\beta$$

NOT: Toplamlar, çarpımlar ve bölümler için geçerli olan standart tüm türev kuralları kısmi türevler için de geçerlidir.

Ör/ $z = x^3y^2 + x^4y + y^4 \Rightarrow \dfrac{\partial z}{\partial x} = 3x^2y^2 + 4x^3y \quad , \quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = 2x^3y + x^4 + 4y^3$

Ör/ $f(x,y) = e^{xy}\cos(x+y) \Rightarrow \dfrac{\partial f(0,\pi)}{\partial x} = ?$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y.e^{xy}.\cos(x+y) + (-\sin(x+y)).1.e^{xy} = e^{xy}\left[y\cos(x+y) - \sin(x+y)\right]$$

$$\frac{\partial f(0,\pi)}{\partial x} = e^{0.\pi}\left[\pi.\cos(0+\pi) - \sin(0+\pi)\right] = -\pi$$

NOT: Zincir kuralının tek değişkenli versiyonu f fonksiyonunun türevi olan f' fonksiyonu tek değişkenli olmak üzere $f[g(x,y)]$ fonksiyonuna da uygulanabilir.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[f(g(x,y))\right] = \underline{\frac{\partial g}{\partial x}.f'[g(x,y)]} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial y}\left[f(g(x,y))\right] = \underline{\frac{\partial g}{\partial y}.f'[g(x,y)]}$$

Ör: f, her yerde türevlenebilir, tek değişkenli bir fonksiyon olmak üzere $z=f\left(\frac{x}{y}\right)$'nin

$x\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+y\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=0$ denklemini sağladığını gösteriniz.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{y}\cdot f'\left(\frac{x}{y}\right) \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial y}=\left(-\frac{x}{y^2}\right)\cdot f'\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$x\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=x\cdot\frac{1}{y}f'\left(\frac{x}{y}\right)+y\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)f'\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{x}{y}f'\left(\frac{x}{y}\right)-\frac{x}{y}f'\left(\frac{x}{y}\right)=0$$

Kısmi türevler ve Süreklilik

Tek değişkenli bir fonksiyon bir a noktasında türeve sahip ise fonksiyon bu noktada süreklidir denir. Ancak bu özellik kısmi türevler için geçerli değildir. Yani bir $f(x,y)$ fonksiyonu belirli bir noktada hem x'e hemde y'ye göre kısmi türevlere sahip olduğu halde o noktada sürekli olmayabilir.

Ör/ $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ $\quad f(0,0)=0$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h.0}{h^2+0} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,0+k) - f(0,0)}{k} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{0.(0+k)}{0^2+k^2} - 0}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{0}{k} = 0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{\substack{x\to 0 \\ y=kx}} \frac{x.kx}{x^2+k^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x^2}k}{\cancel{x^2}(1+k^2)} = \frac{k}{1+k^2}$$

$y=kx$

k'nın her farklı değeri için limit sonucu değişeceğinden fonksiyon (0,0) noktasında sürekli değildir.

Yüksek Mertebeden Türevler

İki ve daha yüksek mertebeden kısmi türevler hesaplanmış mevcut kısmi türevlerin kısmi türevleri alınarak elde edilir.

$$z = f(x,y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x} \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y} \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}$$

⋮

★ Türev alma sırası kullanılan notasyona göre farklıdır.

$$\frac{\partial z}{\partial x} \to \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial x} \to \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

$$f_x(x,y) \to f_{xx}(x,y), \quad f_x(x,y) \to f_{xy}(x,y)$$

$$u = f(x,y,z)$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial y \partial x^2 \partial z} = f_{zxxy}$$

Ör/ $f(x,y)=x^3y^4$ fonksiyonunun ikinci mertebe kısmi türevlerini bulunuz.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2y^4 \quad\rightarrow\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6xy^4, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=4\cdot 3x^2y^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=4x^3y^3 \quad\rightarrow\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=12x^2y^3, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=12x^3y^2$$

Ör/ $f(x,y)=x\cos y+e^x y$ fonksiyonunun ikinci mertebe kısmi türevlerini bulunuz.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\cos y+e^x y \quad\rightarrow\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=e^x y, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=-\sin y+e^x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=-x\sin y+e^x \quad\rightarrow\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-\sin y+e^x, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-x\cos y$$

Ör/ $f(x,y,z)=e^{x-2y+3z}$ fonksiyonu için f_{yyz}, f_{yzy}, f_{zyy} türevlerini hesaplayınız.

$e^{x-2y+3z}$

$$f_y = -2e^{x-2y+3z} \quad \begin{cases} f_{yy} = 4e^{x-2y+3z} \longrightarrow f_{yyz} = 12e^{x-2y+3z} \\ f_{yz} = -6e^{x-2y+3z} \longrightarrow f_{yzy} = 12e^{x-2y+3z} \end{cases}$$

$$f_z = 3e^{x-2y+3z} \longrightarrow f_{zy} = -6e^{x-2y+3z} \longrightarrow f_{zyy} = 12e^{x-2y+3z}$$

Verilen her üç örnekte karışık türevler aynı değişkenlere göre fakat farklı sırada olmalarına karşın eşittirler. Bunu Schwarz Teoremi ile ifade edebiliriz.

Schwarz Teoremi (Karışık türevlerin eşitliği)

Bir f fonksiyonunun n. mertebe iki karışık türevinin aynı türevleri farklı bir sıralamayla içerdiğini kabul edelim. Eğer bu kısmi türevler bir P noktasında sürekli ve eğer f ve onun n. mertebeden daha yüksek mertebeli kısmi türevleri bu P noktasının komşuluğunda sürekli iseler o zaman bu iki karışık kısmi türev P noktasında eşittir.

Ör/ $f(x,y,z) = 1 - 2xy^2z + x^2y \Rightarrow \dfrac{\partial^4 f}{\partial z \partial y \partial x \partial y} = \dfrac{\partial^4 f}{\partial x \partial y^2 \partial z}$

$\dfrac{\partial f}{\partial z} = -2xy^2 \Rightarrow \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = -4xy \Rightarrow \dfrac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial z} = -4x \Rightarrow \dfrac{\partial^4 f}{\partial x \partial y^2 \partial z} = -4$

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = -4xyz + x^2 \Rightarrow \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -4yz + 2x \Rightarrow \dfrac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y} = -4z \Rightarrow \dfrac{\partial^4 f}{\partial z \partial y \partial x \partial y} = -4$

$\overset{?}{=}$

Ör/ $z = e^{kx}\sin(ky)$ fonksiyonunun $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ Laplace denklemini sağladığını gösteriniz.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= ke^{kx}\sin(ky) \rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = k^2e^{kx}\sin(ky) \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= ke^{kx}\cos(ky) \rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -k^2e^{kx}\sin(ky) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = k^2e^{kx}\sin(ky) + (-k^2)e^{kx}\sin(ky)$$

$$= 0$$

Ör/ f, g iki kez türevlenebilir tek değişkenli fonksiyonlar olmak üzere

$w = f(x-ct) + g(x+ct)$ fonksiyonunun $\underbrace{\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}}_{\text{Dalga denklemi}}$ eşitliğini sağladığını gösteriniz.

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -c f'(x-ct) + c g'(x+ct) \qquad \frac{\partial w}{\partial x} = f'(x-ct) + g'(x+ct)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 f''(x-ct) + c^2 g''(x+ct) \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = f''(x-ct) + g''(x+ct)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \left[f''(x-ct) + g''(x+ct) \right] = c^2 \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

Bileşik Fonksiyonlar ve Türevleri (Zincir kuralı)

$z = f(x,y)$ fonksiyonunda x ve y bağımsız değişkenlerinin herhangi biri veya her ikisi bir başka değişkenin ya da değişkenlerin fonksiyonları iseler z'e bileşik fonksiyon denir. Çok değişkenli bileşik fonksiyonların kısmi türevlerini hesaplamak tek değişkenliye göre daha karmaşıktır. Mümkün olan tüm olasılıkları kapsayacak şekilde kısmi türevler için basit bir formül yoktur.

Teorem: $z=f(x,y)$, $x=x(t,s)$, $y=y(t,s)$ fonksiyonları ve bunların 1. mertebeden kısmi türevleri bir $P(a,b)$ noktasında tanımlı ve sürekli ise

$$z=f(x,y)=f[x(t,s),y(t,s)] = F[t,s]$$

$$\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}, \quad \frac{\partial z}{\partial s}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}$$ dir.

Ör/ $\left.\begin{array}{l} y=f(x) \\ x=h(t)\end{array}\right\}$ $y=f[h(t)]=F(t)$, $\quad \frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}$

Ör/ $\left.\begin{array}{l} z=f(x,y) \\ x=x(r,s,t) \\ y=y(k,m)\end{array}\right\}$ $z=f[x(r,s,t),y(k,m)]=F(r,s,t,k,m)$,

$$\frac{\partial z}{\partial r}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial s}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial k}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot 0+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial k}$$

$$\frac{\partial z}{\partial m}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot 0+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial m}$$

Ör/ $\left.\begin{array}{l} w=f(x,y,z) \\ x=x(u,v) \\ y=(u,v,r) \\ z=z(r)\end{array}\right\}$ $w=f[x(u,v),y(u,v,r),z(r)]=F(u,v,r)$

$$\frac{\partial w}{\partial u}=\frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial z}\cdot 0$$

$$\frac{\partial w}{\partial v}=\frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial w}{\partial z}\cdot 0, \quad \frac{\partial w}{\partial r}=\frac{\partial w}{\partial x}\cdot 0+\frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}+\frac{\partial w}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dr}$$

Ör/ $z=f(x,y)$, $x=x(t)$, $y=y(t)$ $\Big\}$ $z=f[x(t),y(t)]=F(t)$, $\quad \dfrac{dz}{dt}=\dfrac{\partial f}{\partial x}\cdot\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\cdot\dfrac{dy}{dt}$

Ör/ $z=f(x,y)$, $x=x(s,t)$, $y=y(s,t)$ $\Big\}$ $z=f[x(s,t),y(s,t)]=F(s,t)$,

$$\frac{\partial z}{\partial s}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}$$

Ör/ $z=f(u,v,r)$, $u=u(x,y,r)$, $v=v(x,y,r)$, $r=r(x,y)$ $\Big\}$ $z=f[u(x,y,r),v(x,y,r),r(x,y)]=F(x,y)$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\underbrace{\frac{\partial v}{\partial x}}+\frac{\partial z}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\underbrace{\frac{\partial u}{\partial y}}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\underbrace{\frac{\partial v}{\partial y}}+\frac{\partial z}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot 1+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot 0+\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot 0+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot 1+\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial y}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial x}\cdot 1+\frac{\partial v}{\partial y}\cdot 0+\frac{\partial v}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} \qquad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}\cdot 0+\frac{\partial v}{\partial y}\cdot 1+\frac{\partial v}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial y}$$

ÖRNEKLER

1) Çok değişkenli fonksiyonlar için zincir kuralını kullanarak $w=xy$ denkleminin t'ye göre türevini $\left.\begin{matrix} x=\cos t \\ y=\sin t \end{matrix}\right\}$ yolu üzerinde hesaplayınız ve $t=\frac{\pi}{2}$ için değerini bulunuz.

$$w=f(x,y)=xy=F(t)$$
$$x=x(t)=\cos t$$
$$y=y(t)=\sin t$$

$$\frac{dw}{dt}=\frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$$
$$=y\cdot(-\sin t)+x\cdot\cos t$$
$$=-\sin^2 t+\cos^2 t=\cos 2t$$
$$\left.\frac{dw}{dt}\right|_{t=\pi/2}=\left.\cos 2t\right|_{t=\frac{\pi}{2}}=-1$$

2) $\left.\begin{matrix} z=\ln(x^2+y^2) \\ x=e^u\cos v \\ y=e^u\sin v \end{matrix}\right\}\Rightarrow z=f[x(u,v),y(u,v)]=F(u,v)$

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}=\frac{2x}{x^2+y^2}\cdot e^u\cos v+\frac{2y}{x^2+y^2}\cdot e^u\sin v$$

ÖD $\frac{\partial z}{\partial v}=$

$$\frac{2e^u\cos v\cdot e^u\cos v}{e^{2u}(\cos^2 v+\sin^2 v)}+\frac{2e^u\sin v\,(e^u\sin v)}{e^{2u}(\cos^2 v+\sin^2 v)}=\frac{2e^{2u}}{e^{2u}}=2$$

3) $w = f(\underbrace{x^2y}_{u}, \underbrace{x+2y}_{v}) \Rightarrow \dfrac{\partial w}{\partial x} = ? \qquad \dfrac{\partial w}{\partial y} = ?$

$$\left.\begin{aligned} w &= f(u,v) \\ u &= u(x,y) \\ v &= v(x,y) \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} w &= f[u(x,y), v(x,y)] \\ &= F(x,y) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$= f_u(x^2y, x+2y)\cdot 2xy + f_v(x^2y+x+2y)\cdot 1$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} = f_u(x^2y, x+2y)\cdot x^2 + f_v(x^2y, x+2y)\cdot 1$$

4) $$\left.\begin{aligned} T(x,y,z,t) &= \frac{xy}{1+z}(1+t) \\ x &= t \\ y &= 2t \\ z &= t-t^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{dT}{dt} = ?$$

5) $\left.\begin{array}{l} z = \sin(x^2 y) \\ x = st^2 \\ y = s^2 + \dfrac{1}{t} \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{\partial z}{\partial s} = ? \qquad \dfrac{\partial z}{\partial t} = ?$

Kapalı Fonksiyonların Türevleri

$y = f(x) \rightarrow$ açık $\qquad f(x,y) = 0 \rightarrow$ kapalı.

$\begin{cases} f(x_0, y_0) = 0 \\ f'_y(x_0, y_0) \neq 0 \end{cases}$

$f(x,y) = 0 \qquad y = y(x)$

$\downarrow$

$f(x, y(x)) = 0 \Rightarrow F(x) = 0$

$\dfrac{\partial f}{\partial x} \cdot 1 + \dfrac{\partial f}{\partial y} \cdot \dfrac{dy}{dx} = 0$

$\dfrac{dy}{dx} = - \dfrac{df/dx}{df/dy}$

İki değişkenli zincir kuralı kapalı türevin bazı cebirsel formüllerini ortaya çıkarır.
Aşağıdaki koşulları varsayalım:

1- $f(x,y)$ fonksiyonu türevlenebilir bir fonksiyondur.

2- $f(x,y)=0$ denklemi y'yi kapalı bir şekilde x'in türevlenebilir bir fonksiyonu olarak tanımlar.

$z=f(x,y) \rightarrow$ açık form.

$x=x$, $y=y$, $z=f(x,y)$

$w=F(x,y,z)=0 \rightarrow$ kapalı form.

$w=F(x,y,z)=0 \Rightarrow w=F[x,y,f(x,y)]=0$

$w=F_1(\underline{x},\underline{y})$

$$\frac{\partial F}{\partial x}\cdot 1+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot 0+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}\cdot 0+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot 1+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial z}$$

Teorem: $f(x,y,z)$ fonksiyonunun türevlenebilir olduğunu ve $f(x,y,z)=0$ denkleminin z'i x ve y'nin türevlenebilir bir fonksiyonu olarak tanımladığını ve de f'in z'e göre türevinin sıfırdan farklı olduğunu kabul edelim. Bu durumda;

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} = -\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)/\partial x}{\partial f(x_0,y_0,z_0)/\partial z}\,, \qquad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} = -\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)/\partial y}{\partial f(x_0,y_0,z_0)/\partial z} \text{ dir.}$$

Ör/ $f(x,y)=y^2-x^2-\sin(xy)=0 \Rightarrow \dfrac{dy}{dx}=?$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{df/dx}{df/dy} = -\frac{-2x-y\cos(xy)}{2y-x\cos(xy)} = \frac{2x+y\cos(xy)}{2y-x\cos(xy)}$$

Ör/ $F(x,y,z)=x^3+z^2+ye^{xz}+z\cos y=0 \Rightarrow \left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,0,0)}=?$ Ödev $\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,0,0)}=?$

$F(0,0,0)=0$

$\dfrac{\partial F}{\partial z}(0,0,0)\neq 0$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 2z+xye^{xz}+\cos y \qquad \left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{(0,0,0)} = 0+0.1+\cos 0 = 1 \neq 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z} = -\frac{3x^2 + yz\,e^{xz}}{2z + xye^{xz} + \cos y}$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,0,0)} = -\frac{0}{1} = 0$$

Gradyen