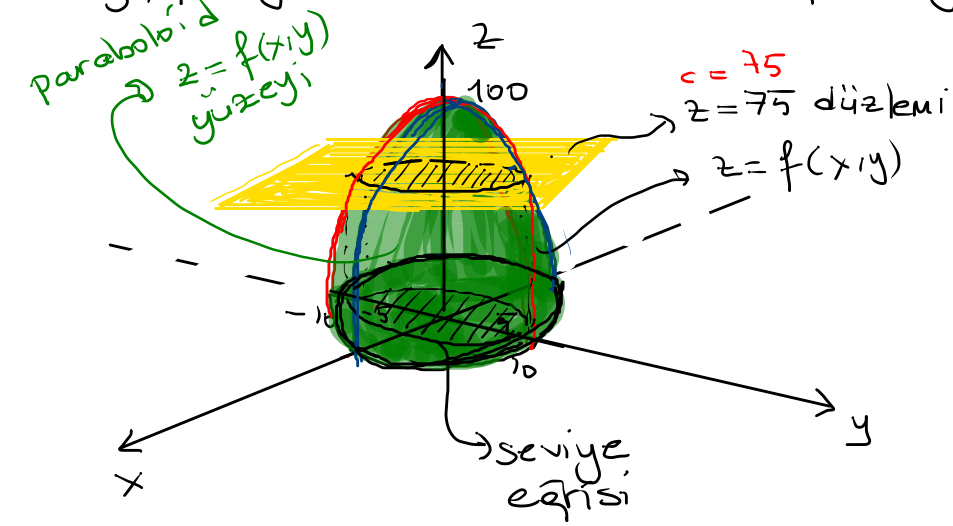


Bir $f(x,y)$ fonksiyonunun bir $f(x,y)=c$ sabit değerine sahip olduğu düzlemdaki noktaların kümesi f 'in seviye eğrisi olarak adlandırılır. f 'in tanım kümesindeki (x,y) için uzaydaki bütün $(x,y,f(x,y))$ noktaları kümesi f 'in grafiğidir. f 'in grafiğine $z=f(x,y)$ yüzeyi denir.



$$z = 100 - x^2 - y^2$$

$$c = 75 \Rightarrow 75 = 100 - x^2 - y^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 25$$

$$x = 0 \Rightarrow z = 100 - y^2 \text{ parabol.}$$

$$y = 0 \Rightarrow z = 100 - x^2 \text{ parabol.}$$

$$z = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 100 \text{ daire}$$

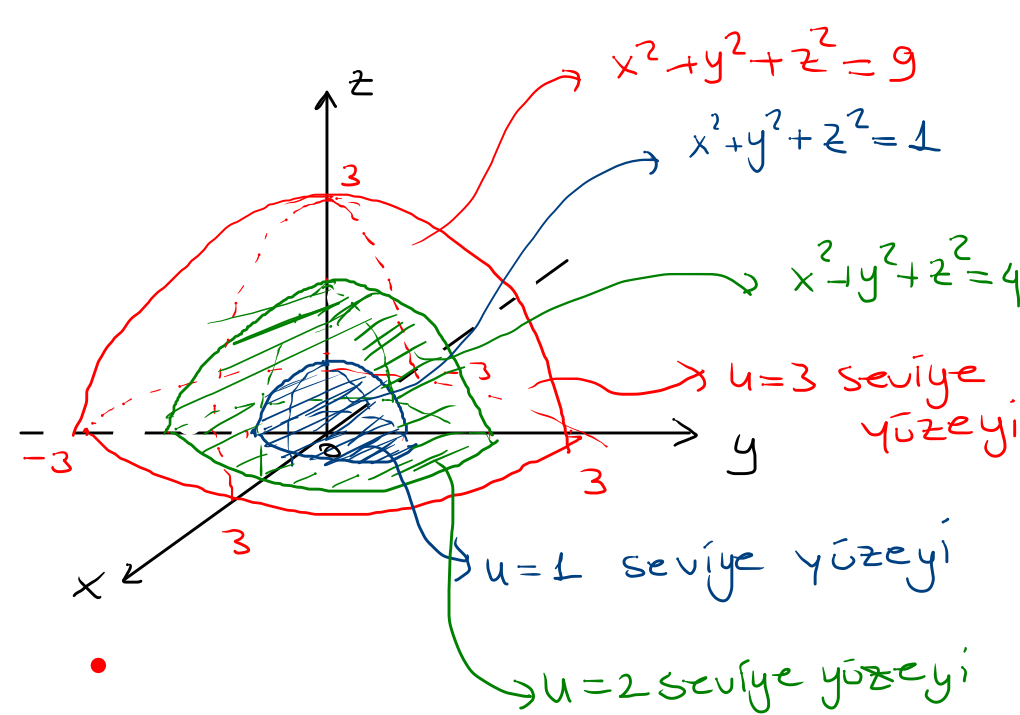
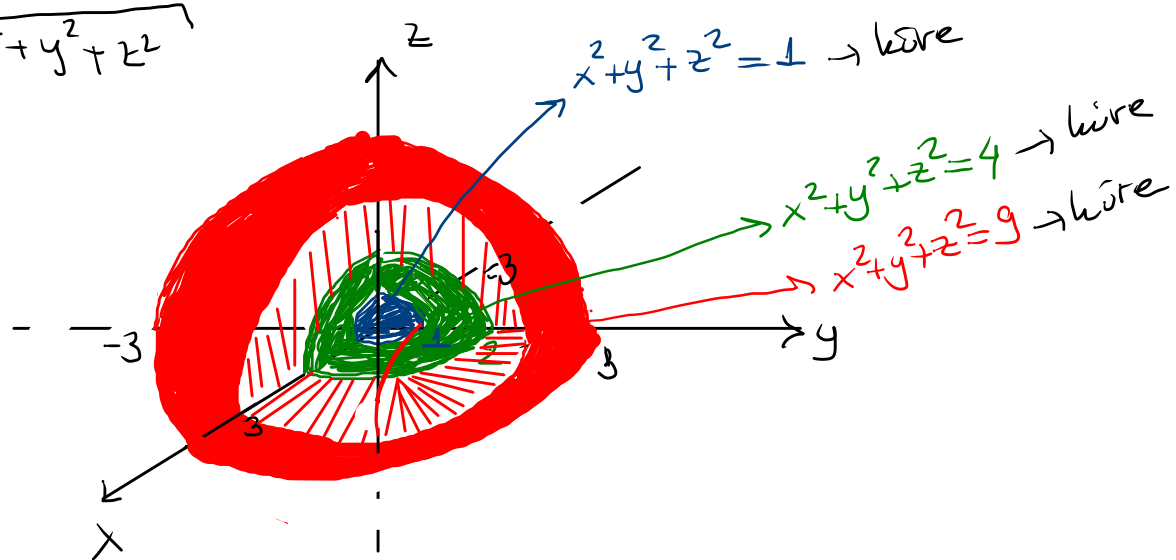
Uzayda, üç bağımsız değişkenli bir fonksiyonun sabit bir $f(x,y,z)=c$ değerine sahip olduğu (x,y,z) noktaları kümesi, f 'in seviye yüzeyi olarak tanımlanır. f 'in grafiğine $u=f(x,y,z)$ hiper yüzeyi denir.

$$u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad c = u = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

$$c = u = 2 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

$$c = u = 3 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 9$$

$$u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$



Lineer ve kuadratik yüzeyler

Düzlem

1°) $ax+by+cz+d=0$

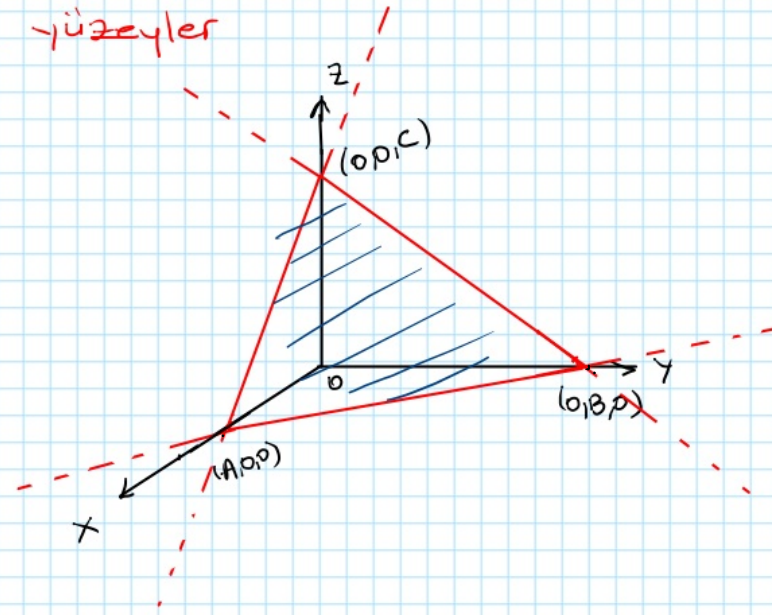
$$ax+by+cz=-d \quad (d \neq 0)$$

$$\frac{a}{-d}x + \frac{b}{-d}y + \frac{c}{-d}z = 1$$

$$-\frac{a}{d} = \frac{1}{A}, \quad -\frac{b}{d} = \frac{1}{B}, \quad -\frac{c}{d} = \frac{1}{C}$$

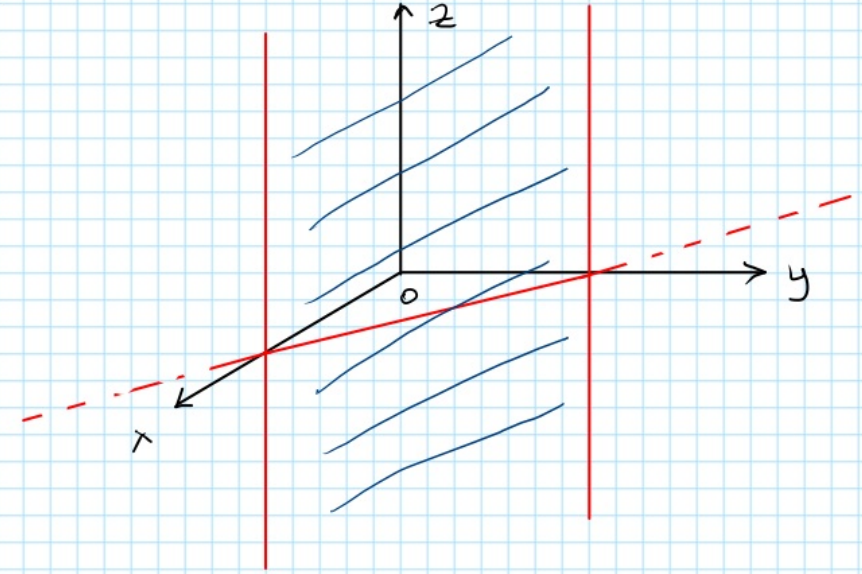
$$\Rightarrow \frac{x}{A} + \frac{y}{B} + \frac{z}{C} = 1$$

Düzlemin kesen formu



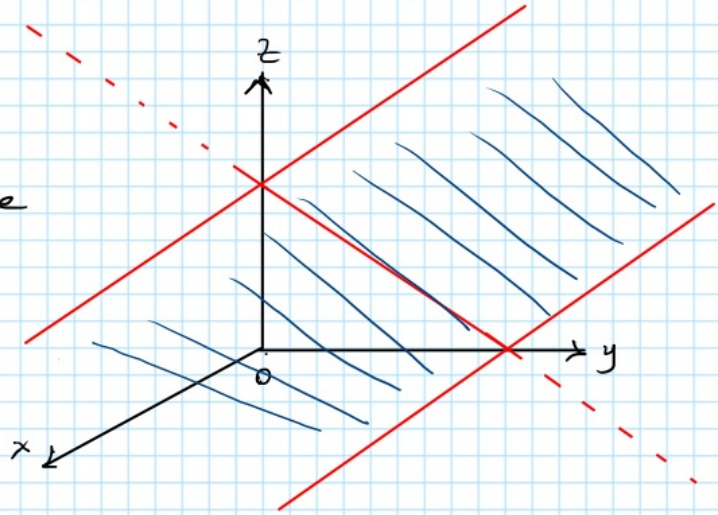
2°) $ax+by+d=0$

$z=0$ olduğu için z -eksenine paralel hareket eder.

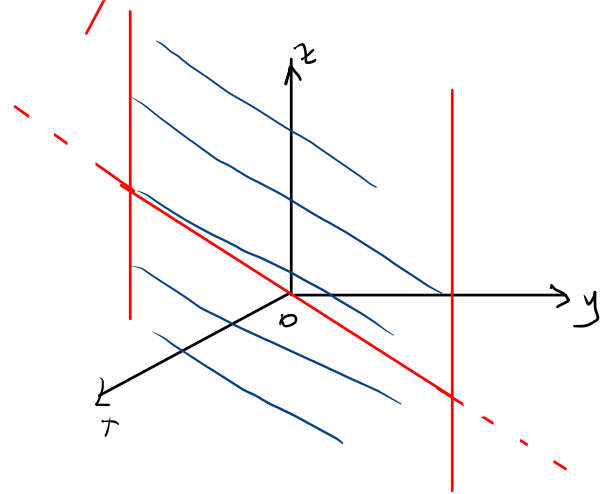
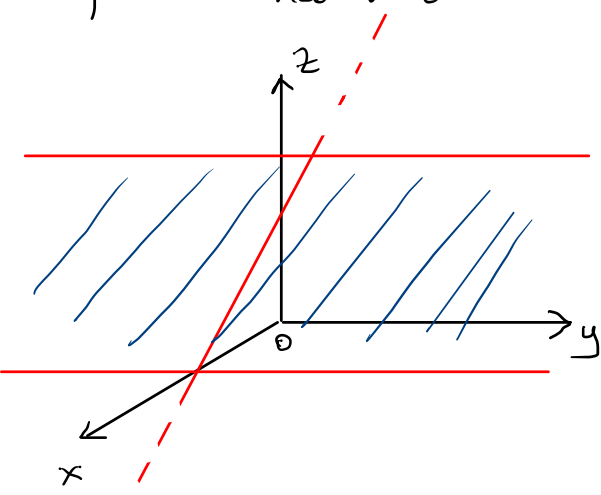


3°) $by+cz+d=0$

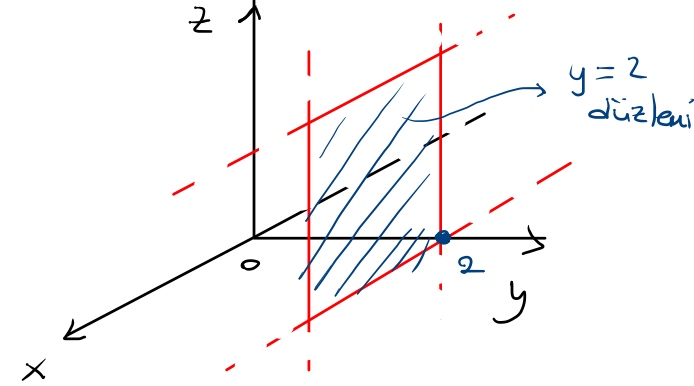
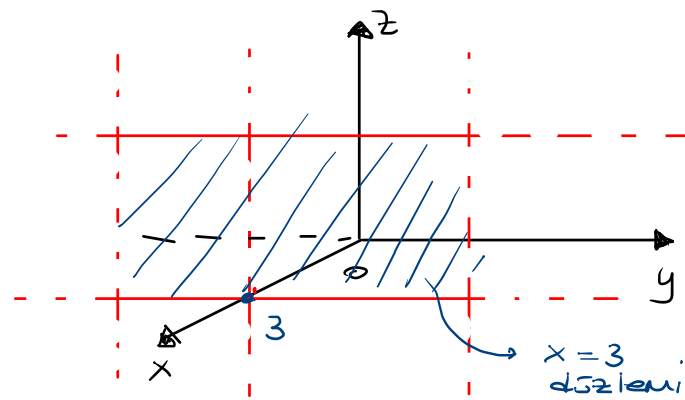
$x=0$ olduğu için x -eksenine paralel hareket eder.



- 4°) $ax + cz + d = 0$
 $y = 0$ olduğundan y -eksenine paralel hareket eder.



- 5°) $d \neq 0, b = c = 0, a \neq 0 \Rightarrow ax + d = 0 \Rightarrow x = -\frac{d}{a}$ düzlemi
 yz -düzlemine paralel, x eksenine dik bir düzendir.



- 6°) $d \neq 0, a = c = 0, b \neq 0 \Rightarrow by + d = 0 \Rightarrow y = -\frac{d}{b}$ düzlemi
 xoz -düzlemine paralel, y -eksenine dik bir düzendir.

- 7°) $d \neq 0, a = b = 0, c \neq 0 \Rightarrow cz + d = 0 \Rightarrow z = -\frac{d}{c}$ düzlemi
 xoy -düzlemine paralel, z -eksenine dik bir düzendir.

- 8°) $d = 0, a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$ ise düzlem orijinden geçer.
 $ax + by + cz = 0$

Küre

Genel denklemi $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$

Merkez $M(a, b, c)$

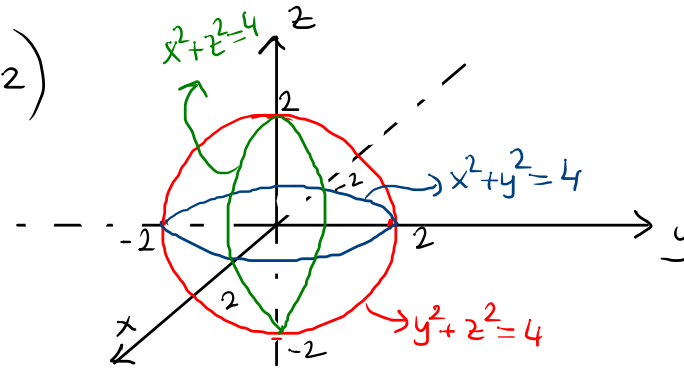
Yarıçap r

$x^2 + y^2 + z^2 = 4 \cdot (M(0,0,0) \quad r=2)$

$x=0 \Rightarrow y^2 + z^2 = 4 \rightarrow \text{çember}$

$y=0 \Rightarrow x^2 + z^2 = 4 \rightarrow \text{''}$

$z=0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4 \rightarrow \text{''}$



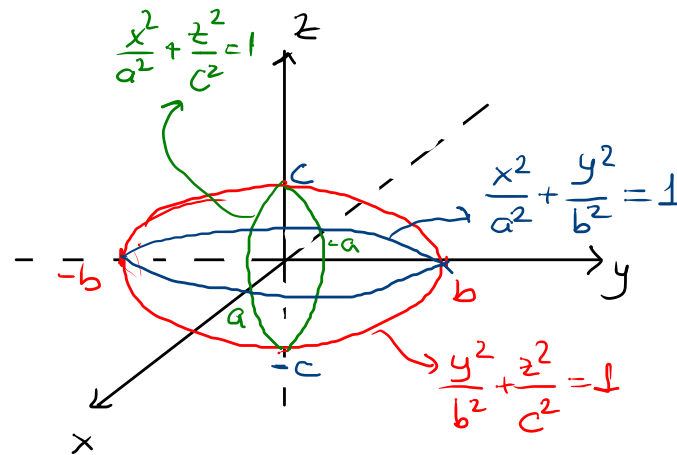
Elipsoid

Genel denklemi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

$x=0 \Rightarrow \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \rightarrow \text{Elips}$

$y=0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \rightarrow \text{Elips}$

$z=0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow \text{Elips}$



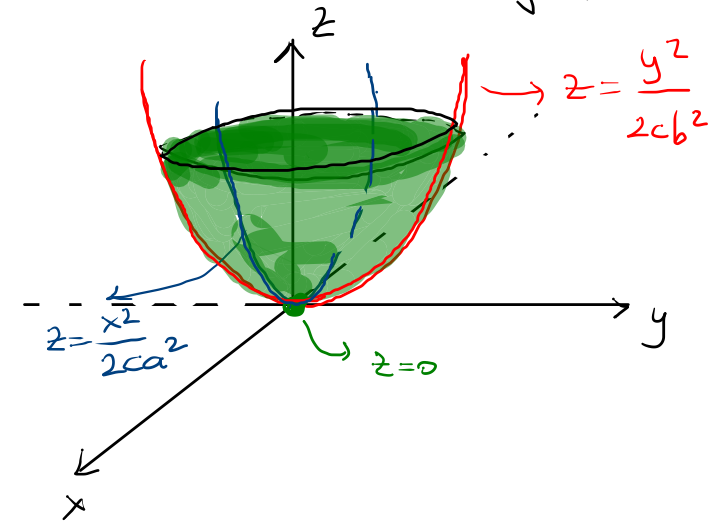
Paraboloid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2cz$$

$x=0 \Rightarrow z = \frac{y^2}{2cb^2} \rightarrow \text{parabol}$

$y=0 \Rightarrow z = \frac{x^2}{2ca^2} \rightarrow \text{parabol}$

$z=0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0 \rightarrow x=0, y=0$
orijin.



Koni

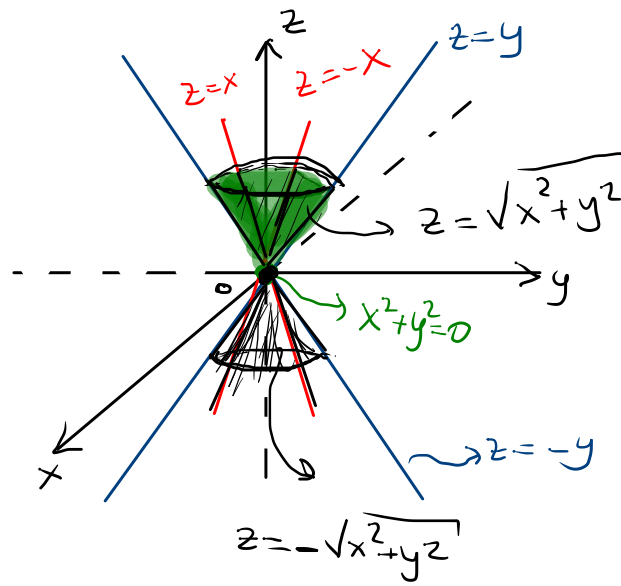
$$a^2x^2 + b^2y^2 = c^2z^2$$

Ör/ $x^2 + y^2 = z^2$

$$x=0 \Rightarrow y^2 = z^2 \Rightarrow z = \pm y$$

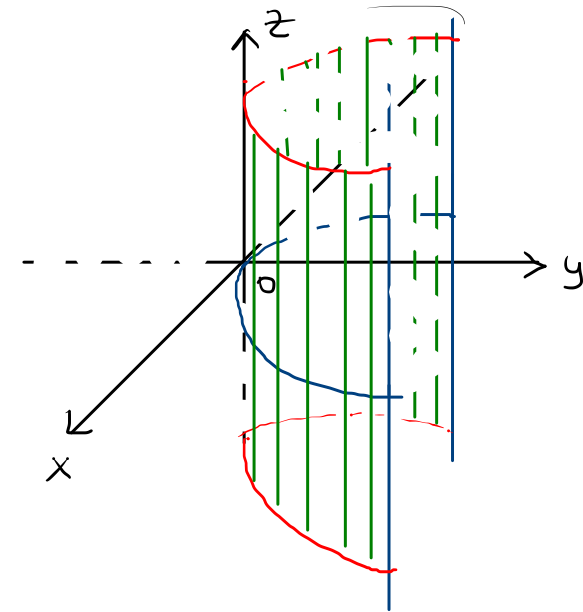
$$y=0 \Rightarrow x^2 = z^2 \Rightarrow z = \pm x$$

$$z=0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 0 \rightarrow \text{orijin}$$



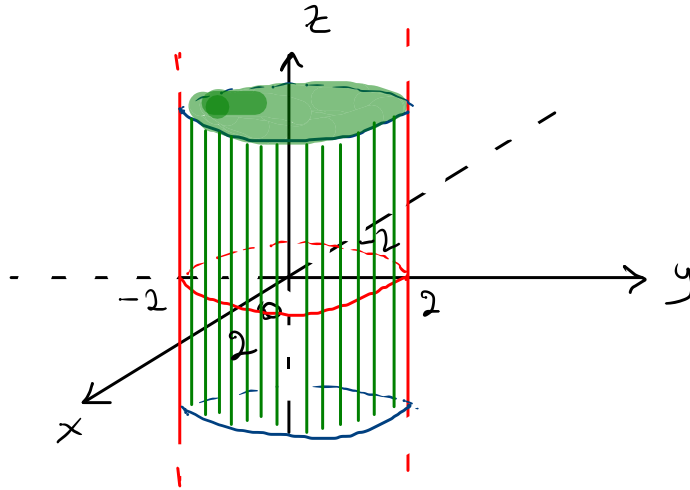
Parabolik Silindir

Ör/ $y = x^2$



Silindir

Ör/ $x^2 + y^2 = 4$



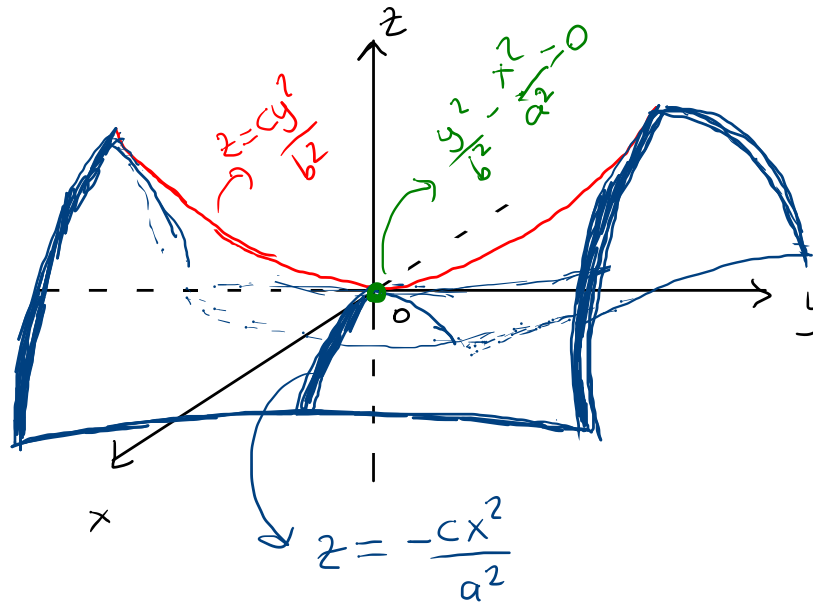
Hiperbolik Paraboloid

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = \frac{z}{c} \quad (c > 0)$$

$$x=0 \Rightarrow z = \frac{cy^2}{b^2} \rightarrow \text{parabol}$$

$$y=0 \Rightarrow z = -\frac{cx^2}{a^2} \rightarrow \text{parabol}$$

$$z=0 \Rightarrow \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 0 \text{ orijin}$$



Limit ve Süreklilik

Tanım: Eğer (a,b) noktasına yeterince yakın tüm (x,y) noktaları için $f(x,y)$ 'nin değerleri belli bir reel L sayısına keyfî derecede yakın ise (x,y) , (a,b) 'ye yaklaşırken $f(x,y)$, L limitine yaklaşır denir.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = L$$

şeklinde gösterilir.

Tanım (ϵ - δ)

Eğer

i) (a,b) noktasının her komşuluğu f fonksiyonunun tanım kümesinden (a,b) noktasından farklı) noktalar içeriyorsa

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 < \delta^2$$

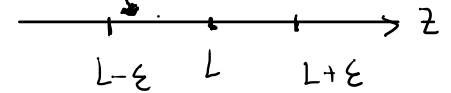
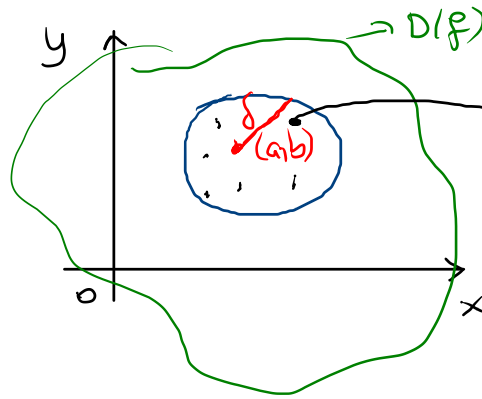
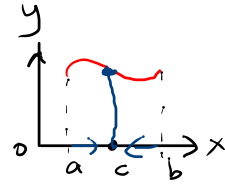
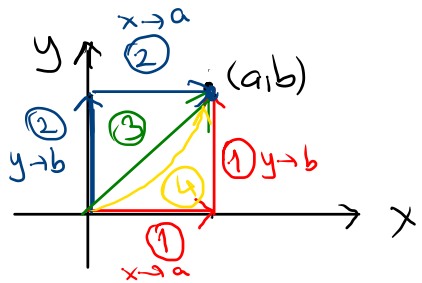
ve

ii) Her $\epsilon > 0$ sayısı için $0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$ iken $|f(x,y) - L| < \epsilon$ olacak şekilde bir $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ sayısı bulunabiliyorsa o zaman (x,y) , (a,b) 'ye yaklaşırken $f(x,y)$, L limitine yaklaşır ve

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = L \quad / \quad \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} f(x,y) = L$$

şeklinde gösterilir.

NOT: Limit varsa tektir.



iki değişkenli bir fonksiyon için (x,y) noktasının, fonksiyonun tanım kümesinde (a,b) noktasına yaklaşımı nasıl olursa olsun eğer $f(x,y)$ aynı L sayısına yaklaşıyorsa o zaman fonksiyon limit sahiptir denir. Yani limit yola bağlı olmalıdır.

Çift yol testi

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = \lim_{x \rightarrow a} \left[\lim_{y \rightarrow b} f(x,y) \right] \neq \Rightarrow \text{limit yoktur.}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = \lim_{y \rightarrow b} \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x,y) \right] \quad \text{(Ancak eşit çıkmaları limitin var olduğunu göstermez)}$$

$f(x,y)$, (a,b) noktasında limite sahip değildir.

Teorem (a,b) 'nin her komşuluğu $D(f) \cap D(g)$ 'den noktalar içermek üzere

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = L, \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x,y) = M \quad \text{olsun. } k \in \mathbb{R} \text{ olsun.}$$

$$1) \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} [f(x,y) \mp g(x,y)] = \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) \mp \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x,y) = L \mp M$$

$$2) \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} (k f(x,y)) = k \cdot \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = k \cdot L$$

$$3) \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} [f(x,y) \cdot g(x,y)] = \left[\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) \right] \left[\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x,y) \right] = L \cdot M$$

$$4^{\circ}) \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y)}{\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x,y)} = \frac{L}{u} \quad (u \neq 0 \text{ olmak koşuluyla})$$

$$5^{\circ}) \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} [f(x,y)]^n = \left[\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) \right]^n = L^n$$

$$6^{\circ}) \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \sqrt[n]{f(x,y)} = \sqrt[n]{L} \quad (n \in \mathbb{Z}^+ \text{ ve } n \text{ çift ise } L > 0 \text{ olmak koşuluyla})$$

ÖRNEKLER

$$1^{\circ}) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{x - xy + 3}{x^2y + 5xy - y^3} = \frac{0 - 0 \cdot 1 + 3}{0 \cdot 1 + 5 \cdot 0 \cdot 1 - 1^3} = -3$$

$$2^{\circ}) \lim_{(x,y) \rightarrow (3,-4)} \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$$

$$\begin{aligned} 3^{\circ}) \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ x \neq y}} \frac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} &\stackrel{0}{=} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x^2 - xy)(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x(x-y)(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{x-y} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = 0 \end{aligned}$$

$$4) \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (1,1) \\ (x \neq y)}} \frac{x^2 - 2xy + y^2}{x-y} = \frac{1-2+1}{1-1} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{(x-y)^2}{x-y} = \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} (x-y) = 0$$

$$5) \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (1,2) \\ (2x \neq y)}} \frac{2x^2 - 3xy + y^2}{2x^2 + xy - y^2} = \frac{0}{0} = \lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{2x^2 - 2xy - xy + y^2}{2x^2 + xy - y^2 + xy - xy} = \lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{x(2x-y) - y(2x-y)}{x(2x-y) + y(2x-y)} = \lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{x-y}{x+y} = \frac{-1}{3}$$

6) $f(x,y) = \frac{2x^2y}{x^4+y^2}$ fonksiyonunun $(x,y) \rightarrow (0,0)$ iken limitinin varlığını araştırınız.

1.yol

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^2y}{x^4+y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2y}{x^4+y^2} \right] = \lim_{y \rightarrow 0} \left[\frac{0}{\underbrace{y^2}_0} \right] = 0$$

3.yol

$$y = kx \Rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^2y}{x^4+y^2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y=kx}} \frac{2kx^3}{x^4+k^2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2kx^3}{x^2(x^2+k^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2kx}{x^2+k^2} = \frac{0}{k^2} = 0$$

2.yol

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^2y}{x^4+y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\lim_{y \rightarrow 0} \frac{2x^2y}{x^4+y^2} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{0}{\underbrace{x^4}_0} \right] = 0$$

4.yol

$$y = kx^2 \Rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^2y}{x^4+y^2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y=kx^2}} \frac{2kx^4}{x^4+k^2x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2kx^4}{x^4(1+k^2)} = \frac{2k}{1+k^2}$$

k 'nin her farklı değeri için limit değeri farklı olacağından fonksiyonun $(0,0)$ noktasında limiti yoktur.

7) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{y \sin(\pi x)}{x+y-2}$ fonksiyonunun limitinin mevcut olup olmadığını araştırınız.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{y \sin(\pi x)}{x+y-2} = \lim_{y \rightarrow 1} \left[\lim_{x \rightarrow 1} \frac{y \sin(\pi x)}{x+y-2} \right] = \lim_{y \rightarrow 1} \left[\frac{y \sin \pi}{y-1} \right] = \lim_{y \rightarrow 1} \left[\frac{0}{\underset{=0}{y-1}} \right] = 0$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{y \sin(\pi x)}{x+y-2} = \lim_{x \rightarrow 1} \left[\lim_{y \rightarrow 1} \frac{y \sin(\pi x)}{x+y-2} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{\sin(\pi x)}{x-1} \right] \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{0}{0} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\pi \cos \pi x}{1} = -\pi$$

} $\neq$ limit yoktur.

8) $f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$ fonksiyonunun orjinde limite sahip olduğunu gösteriniz

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{0}{\underset{=0}{x^2}} \right] = 0 = L$$

$\forall \varepsilon > 0$ sayısı için $0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$ iken $\left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} - 0 \right| < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ bulabiliriz.

$$\begin{aligned} x^2 &\leq x^2 + y^2 \\ y^2 &\leq x^2 + y^2 \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right| \leq |y| \leq \sqrt{x^2 + y^2} < \delta = \varepsilon > 0 \text{ olduğundan } \varepsilon - \delta \text{ tanımına göre fonksiyon orjinde limite sahiptir ve limit değeri sıfırdır.}$$

Süreklilik

Tanım:

$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = f(a,b)$ ise fonksiyon (a,b) noktasında süreklidir denir.

- $f(x,y)$, (a,b) noktasında tanımlı olmalı
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y)$ mevcut olmalı
- Fonksiyonun (a,b) noktasındaki limit değeri bu noktadaki değerine eşit olmalı.

Tanım:

Her $\varepsilon > 0$ sayısı için $0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$ iken $|f(x,y) - f(a,b)| < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı bulunabiliyorsa $f(x,y)$, (a,b) noktasında süreklidir denir.

ÖRNEKLER

$$1) f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

İki farklı yoldan alınan limitlerin değerleri farklı olduğundan fonksiyonun $(0,0)$ 'da limiti yoktur. Dolayısıyla fonksiyon bu noktada süreksizdir.

Fonksiyonunun $(0,0)$ noktasındaki sürekliliğini inceleyiniz.

$$f(0,0) = 0 \checkmark$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\lim_{y \rightarrow 0} \frac{2xy}{x^2+y^2} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{0}{x^2} \right] = 0$$
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y=x}} \frac{2x^2}{x^2+x^2} = 1$$

} $\neq$

2) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy-y^2}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} & x>0, y>0 \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ Fonksiyonunun orijinde sürekli olduğunu gösteriniz.
 $f(0,0)=0 \checkmark$

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ x \neq y}} \frac{xy-y^2}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ x \neq y}} \frac{y(x-y) \cdot (\sqrt{x}-\sqrt{y})}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})} = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ x \neq y}} \frac{y(\cancel{x-y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{\cancel{x-y}} = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ x \neq y}} y(\sqrt{x}-\sqrt{y}) = 0 = f(0,0)$$

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=x}} \frac{xy-y^2}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{x^2-x^2}{2\sqrt{x}} \right] = 0 = f(0,0)$$

Fonksiyon orijinde sürekli dir.

3) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 - xy^2}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ fonksiyonunun $(0,0)$ 'da sürekli olduğunu gösteriniz.

$f(0,0) = 0 \checkmark$

$\forall \varepsilon > 0$ için $0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$ iken $\left| \frac{x^3 - xy^2}{x^2 + y^2} - 0 \right| < \varepsilon$ o.ş. bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı bulunmalıdır.

$$\left| \frac{x^3 - xy^2}{x^2 + y^2} - 0 \right| = \left| \frac{x(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} \right| = |x| \cdot \left| \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right| \leq |x| \left| \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} \right| = |x| < \delta = \varepsilon > 0$$

olduğundan $f(x,y)$ fonksiyonu $(0,0)$ noktasında sürekli dir.

$$|x| \leq \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$$

$$|y| \leq \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$$

Bileşkelerin sürekliliği

Eğer $f(x,y)$ fonksiyonu (x_0, y_0) noktasında sürekli ve g fonksiyonu da $f(x_0, y_0)$ 'da sürekli olan tek değişkenli bir fonksiyon ise bu durumda $g[f(x,y)]$ fonksiyonu (x_0, y_0) 'da süreklidir.

Ör/ e^{x-y} , $\ln(1+x^2+y^2)$

$\downarrow$	$\downarrow$
$f(x,y) = x-y$	$f(x,y) = 1+x^2+y^2$
$g(u) = e^u$	$g(u) = \ln u$

