

Taylor ve McLaurin Serileri

Bir kuvvet serisi toplamının serinin yakınsaklık aralığı içinde her mertebeden türevelere sahip bir fonksiyona eşit olduğunu biliyoruz. Tersine düşünersek her mertebeden türevelere sahip olan bir fonksiyon bir kuvvet serisi ile ifade edilebilir mi? Eğer fonksiyonu kuvvet serisi ile ifade edebiliyorsak o zaman katsayıları nasıl olacaktır?

Bu soruların cevabını İngiliz matematikçi Brook Taylor, bir I aralığında her mertebeden türevelere sahip bir $f(x)$ fonksiyonunun

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n = a_0 + a_1 (x-c) + a_2 (x-c)^2 + \dots$$

şeklinde bir kuvvet serisiyle ifade edilebildiğini kabul ederek a_n katsayılarının ne olacağını araştırarak vermiş. Bu amaçla $f(x)$ 'in ve türevlerinin $x=c$ 'deki değerlerini hesaplamıştır. ($c \in I$)

$$f(x) = a_0 + a_1 (x-c) + a_2 (x-c)^2 + a_3 (x-c)^3 + a_4 (x-c)^4 + \dots$$

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 (x-c) + 3a_3 (x-c)^2 + 4a_4 (x-c)^3 + \dots$$

$$f''(x) = 2a_2 + 6a_3 (x-c) + 12a_4 (x-c)^2 + \dots$$

$$f'''(x) = 6a_3 + 24a_4 (x-c) + \dots$$

$$\Rightarrow f(c) = a_0 \Rightarrow a_0 = f(c)$$

$$f'(c) = a_1 \Rightarrow a_1 = f'(c)$$

$$f''(c) = 2a_2 \Rightarrow a_2 = \frac{f''(c)}{2} = \frac{f''(c)}{2!}$$

$$f'''(c) = 6a_3 \Rightarrow a_3 = \frac{f'''(c)}{6} = \frac{f'''(c)}{3!}$$

$$f^{(4)}(c) = 24a_4 \Rightarrow a_4 = \frac{f^{(4)}(c)}{24} = \frac{f^{(4)}(c)}{4!}$$

$$f^{(n)}(c) = n! a_n \Rightarrow a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$$

olur ki bu durumda $f(x)$ fonksiyonu

$$\begin{aligned} f(x) &= f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \frac{f'''(c)}{3!}(x-c)^3 + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x-c)^n \end{aligned}$$

şeklindeki bir seri açılımla ifade edilebilir.

Şimdi soru elde edilen bu seri göz önüne alınan I aralığındaki her x için $f(x)$ 'e yakınsar mı?

Bu sorunun cevabı bazı fonksiyonlar için evet, bazıları içinse hayırdır.

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + R_n(x)$$

şeklinde yazarsak burada $R_n \rightarrow$ Taylor kalanı adını alır. $f(x)$ 'in eşit olduğu bu seriye Taylor serisi adı verilir.

$$P_n(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

eşitliğine f tarafından $x=c$ noktasında üretilen n . mertebe Taylor Polinomu denir.

O halde f tarafından $x=c$ noktasında üretilen Taylor serisini

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

şeklinde yazarsak

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$$

olur ki eğer $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ olduğu gösterilebilirse

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (x-c)^k$$

olacaktır. Yani f fonksiyonu ve türevleri alınarak elde edilen Taylor serisi uygun bir aralıkta f fonksiyonuna yakınsayacaktır.

Teorem: $P_n(x)$, $x=c$ civarında f 'in n . mertebeden Taylor polinomu olmak üzere $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$ ve $|x-c| < R$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$ ise $f(x)$,

$|x-c| < R$ aralığındaki Taylor serisinin toplamına eşittir.

Taylor serisinde $c=0$ alınırsa yani $f(x)$ tarafından $x=0$ noktasında üretilen Taylor serisi göz önüne alınırsa

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n$$

şeklinde oluşan seriye de McLaurin Serisi denir.

II ÖRNEKLER -

1°) $f(x) = \frac{1}{x}$ tarafından $c=2$ noktasında üretilen Taylor serisini bulunuz.

$$f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f(2) = \frac{1}{2}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow f'(2) = -\frac{1}{2^2}$$

$$f''(x) = \frac{2}{x^3} \Rightarrow f''(2) = \frac{2}{2^3}$$

$$f'''(x) = -\frac{6}{x^4} \Rightarrow f'''(2) = -\frac{2 \cdot 3}{2^4}$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{24}{x^5} \Rightarrow f^{(4)}(2) = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{2^5}$$

$$\Rightarrow f(x) = f(2) + f'(2)(x-2) + \frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2 + \dots$$

$$f(x) = \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right)(x-2) + \left(\frac{2}{2^3}\right) \frac{1}{2!} (x-2)^2 + \left(-\frac{2 \cdot 3}{2^4}\right) \frac{1}{3!} (x-2)^3$$

$$+ \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{2^5} \cdot \frac{1}{4!} (x-2)^4 + \dots$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2}(x-2) + \frac{1}{2^3}(x-2)^2 - \frac{1}{2^4}(x-2)^3 + \frac{1}{2^5}(x-2)^4 + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} (x-2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} \left[-\frac{(x-2)}{2} \right]^n \text{ olur.}$$

Yakınsaklık aralığı elde edilen kuvvet serisi geometrik seri olduğundan

$$a = \frac{1}{2} \quad r = -\frac{(x-2)}{2} \quad |r| < 1 \text{ için } |x-2| < 2$$

$$0 < x < 4$$

bulunur ve bu yakınsaklık aralığı içerisinde de serinin toplamının

$$\frac{a}{1-r} = \frac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{(x-2)}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{x}{2}} = \frac{1}{x} \text{ olduğu elde edilir.}$$

2) $f(x) = \ln x$ in $c=1$ civarındaki Taylor serisini bulunuz.

$$f(x) = \ln x$$

$$f(1) = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f'(1) = 1$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$f''(1) = -1$$

$$f'''(x) = \frac{2}{x^3}$$

$$f'''(1) = 2$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{6}{x^4}$$

$$f^{(4)}(1) = -6$$

$$f^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1} \cdot (n-1)!}{x^n}$$

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \dots \\
&= 0 + (x-1) - \frac{1}{2!}(x-1)^2 + \frac{2}{3!}(x-1)^3 - \frac{6}{4!}(x-1)^4 + \dots \\
&= (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4 + \dots \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (x-1)^n
\end{aligned}$$

olarak Taylor serisi elde edilir. Ancak burada bir önceki soruda olduğu gibi yakınsaklık aralığı içinde kuvvet serisinin $\ln x$ fonksiyonu ile ifade edilebileceğini söyleyemiz. Bunun için R_n Taylor kalanının ∞ için limitinin sıfır olduğunu göstermemiz gerekir.

NOT: $R_n = \frac{f^{(n+1)}(\lambda)}{(n+1)!} (x-c)^{n+1} \quad (c < \lambda < x)$

ifadesine Taylor kalanı ya da Lagrange kalanı denir.

Ayrıca $R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_0^x f^{(n+1)}(t) (x-t)^n dt$

ile de verilmektedir.

3) $f(x)=e^x$ tarafından üretilen $x=0$ 'daki Taylor serisini (McLaurin serisini) bulunuz.

$$f(x)=e^x = f'(x) = f''(x) = f'''(x) = \dots = f^{(n)}(x) = \dots$$
$$\Rightarrow f(0) = 1 = f'(0) = f''(0) = f'''(0) = \dots = f^{(n)}(0) = \dots$$

$$\Rightarrow f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

$x=0$ 'daki Taylor serisidir. Yani

$$\text{Taylor serisi} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \text{ dir.}$$

4) $f(x)=\cos x$ in McLaurin serisini bulunuz.

$$f(x) = \cos x$$

$$f'(x) = -\sin x$$

$$f''(x) = -\cos x$$

$$f'''(x) = \sin x$$

$$f^{(4)}(x) = \cos x$$

⋮

$$f(0) = 1$$

$$f'(0) = 0$$

$$f''(0) = -1$$

$$f'''(0) = 0$$

$$f^{(4)}(0) = 1$$

⋮

$$\Rightarrow \text{McLaurin Serisi} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

5) $f(x) = \sin x$ -in McLaurin serisini bulunuz.

$$f(x) = \sin x$$

$$f'(x) = \cos x$$

$$f''(x) = -\sin x$$

$$f'''(x) = -\cos x$$

$$f^{(4)}(x) = \sin x$$

$\vdots$

$$f(0) = 0$$

$$f'(0) = 1$$

$$f''(0) = 0$$

$$f'''(0) = -1$$

$$f^{(4)}(0) = 0$$

$\vdots$

$\Rightarrow \sin x$ için McLaurin serisi

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

şeklindedir.

Bu son üç örnekte elde edilen kuvvet serileri yakınsaklık aralıkları içinde üretildikleri fonksiyonlara esittirler.

Taylor-Mclaurin Serilerinin Uygulamaları

1) Yaklaşık Değer Hesabı

ÖR $\Rightarrow f(x) = \ln x$ fonksiyonunun $x=1$ civarında yazılmış 3. derece Taylor polinomunu kullanarak $\ln(1.2)$ için yaklaşık bir değer elde ediniz.

$$P_3(x) = f(1) + f'(1) \cdot (x-1) + \frac{f''(1)}{2!} (x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!} (x-1)^3$$

$$f(x) = \ln x$$

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$f'''(x) = \frac{2}{x^3}$$

$$f(1) = 0$$

$$f'(1) = 1$$

$$f''(1) = -1$$

$$f'''(1) = 2$$

$$P_3(x) = (x-1) - \frac{1}{2!} (x-1)^2 + \frac{2}{3!} (x-1)^3$$

$$= (x-1) - \frac{1}{2} (x-1)^2 + \frac{1}{3} (x-1)^3$$

$$\Rightarrow \ln(1.2) \approx (1.2-1) - \frac{1}{2} (1.2-1)^2 + \frac{1}{3} (1.2-1)^3$$

$$\approx 0.182667$$

2) Belirsiz Şekiller

Bir kuvvet serisi türevlenebilir olduğundan yakınsaklık aralığı içinde sürekli. Bu nedenle $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$

ve $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ olmak üzere $\frac{f(x)}{g(x)}$ 'in $x \rightarrow a$ iken

limitini bulmak için f ve g fonksiyonlarını temsil eden kuvvet serilerini kullanırız.

$$\begin{aligned} \underline{\text{ÖR}} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - 2x - 1}{\sin x} & \stackrel{0/0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + \sin x + \frac{\sin^2 x}{2!} + \dots) - 2x - 1}{\sin x} \\ & = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x + \frac{\sin^2 x}{2!} + \dots) - 2x}{\sin x} \\ & = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\cancel{\sin x} (1 + \frac{\sin x}{2!} + \dots)}{\cancel{\sin x}} - \frac{2x}{\sin x} \right] \\ & = 1 - 2 \\ & = -1 \end{aligned}$$

NOT:

e^x 'in açılımı bilindiğine göre $e^{u(x)}$ gibi bir fonksiyonun seri açılımı sorulduğunda e^x 'in açılımında x görülen yere $u(x)$ yazılarak $e^{u(x)}$ 'in seri açılımı elde edilir. Aynı durum $\cos[u(x)]$, $\sin[u(x)]$ içinde geçerlidir.

Örneğin;

$\cos 3x$ 'in açılımı;

$$\cos 3x = 1 - \frac{(3x)^2}{2!} + \frac{(3x)^4}{4!} - \dots$$

veya

$\sin x^2$ 'nin açılımı;

$$\sin x^2 = x^2 - \frac{(x^2)^3}{3!} + \frac{(x^2)^5}{5!} - \dots$$

gibi.

$f(x) = \sin^2 x$ 'in açılımı ise

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left[1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \dots \right]$$

şeklinde göz önüne alınır.

3) Yaklaşık İntegral Hesabı

ÖR $\Rightarrow E(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$ olduğuna göre $E(1)$ 'in

değerini üç ondalık yaklaşımla hesaplayınız.

$$E(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$$

$$= \int_0^x \left(1 + (-t^2) + \frac{(-t^2)^2}{2!} + \frac{(-t^2)^3}{3!} + \dots \right) dt$$

$$= \int_0^x \left(1 - t^2 + \frac{t^4}{2!} - \frac{t^6}{3!} + \dots \right) dt$$

$$\Rightarrow = t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5 \cdot 2!} - \frac{t^7}{7 \cdot 3!} + \dots \Big|_0^x$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \dots$$

$$E(1) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5 \cdot 2!} - \frac{1}{7 \cdot 3!} + \frac{1}{9 \cdot 4!} - \frac{1}{11 \cdot 5!}$$

$$E(1) \approx 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} - \frac{1}{1320}$$

$$\approx 0,747$$

BİNOM SERİSİ-

$f(x) = (1+x)^m$ 'in McLaurin serisi $|x| < 1$ olmak üzere

$$(1+x)^m = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-k+1)}{k!} x^k$$

şeklinde ki buna Binom Serisi denir.

ÖR $\Rightarrow f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ 'in kuvvet serisi temsilini bulunuz.

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-1/2}$$

$m = -\frac{1}{2}$ olan Binom serisi olarak düşünersek.

$$(1+x)^{-1/2} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{1}{2}-1\right) \left(-\frac{1}{2}-2\right) \dots \left(-\frac{1}{2}+k-1\right)}{k!} x^k$$

$$= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2^2 2!} x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 3!} x^3 + \dots$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2^n \cdot n!} (-x)^n \quad (-1 < x < 1)$$

Bazı Maclaurin Serileri

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \quad -1 < x < 1$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = 1 + 2x + 3x^2 + \dots \quad -1 < x < 1$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad -1 < x \leq 1$$

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad -1 \leq x \leq 1$$

ÖR $\Rightarrow$ $f(x) = \ln x$ -in $(x-2)$ -nin kuvvetlerine göre kuvvet seri temsilini bulunuz.

$$\begin{aligned} \ln x &= \ln[2 + x - 2] = \ln\left[2 \cdot \left[1 + \frac{x-2}{2}\right]\right] \\ &= \ln 2 + \ln\left(1 + \frac{x-2}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \ln\left(1 + \frac{x-2}{2}\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\frac{x-2}{2}\right)^n \\ &= \ln 2 + \frac{x-2}{2} - \frac{(x-2)^2}{2^2 \cdot 2} + \frac{(x-2)^3}{2^3 \cdot 3} - \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -1 < \frac{x-2}{2} \leq 1 &\Rightarrow -2 < x-2 < 2 \\ &0 < x \leq 4 \quad \text{yakınsaklık aralığıdır.} \end{aligned}$$