Örnekler :

1) $y=\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

$D(f)$: $\dfrac{1+x}{1-x} \geq 0$

1°) $1+x \geq 0$, $1-x \geq 0$

2°) $1+x \leq 0$, $1-x \leq 0$

$\to [-1,1)$

x		-1		1	
$1+x$	$-$	•	$+$		$+$
$1-x$	$+$		$+$	•	$-$
$\dfrac{(1+x)}{(1-x)}$	$-$		$+$		$-$

Yatay ve eğik asimptot yoktur.

$(h>0)$

$$\lim_{x\to 1^-}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=\lim_{h\to 0}\sqrt{\frac{1+(1-h)}{1-(1-h)}}=\lim_{h\to 0}\sqrt{\frac{2-h}{h}}=\infty$$

$x=1$ doğrusu D.A.

$x=0 \Rightarrow y=1$

$y=0 \Rightarrow x=-1$

$x\to -x \Rightarrow \sqrt{\dfrac{1+(-x)}{1-(-x)}}=\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}} \neq y$, $\neq -y$

$$f'=\frac{1}{2}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{-1/2}\cdot\left(\frac{1+x}{1-x}\right)'=\frac{1}{2}\;\frac{1-x+(1+x)}{(1-x)^2}\cdot\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{-1/2}$$

$$=\frac{1}{(1-x)^2\cdot\dfrac{(1+x)^{1/2}}{(1-x)^{1/2}}}=\frac{1}{(1-x)^{3/2}(1+x)^{1/2}}>0$$

$$=(1-x)^{-3/2}\cdot(1+x)^{-1/2}$$

$f''=$

$$f' = (1-x)^{-3/2}(1+x)^{-1/2}$$

$$f'' = \left(-\frac{3}{2}\right)\cdot(1-x)^{-5/2}\cdot(-1)\,(1+x)^{-1/2} + \left(-\frac{1}{2}\right)(1+x)^{-3/2}(1)\cdot(1-x)^{-3/2}$$

$$= -\frac{(1-x)^{-5/2}(1+x)^{-3/2}}{2}\left[-3\cdot(1+x) + (1-x)\right]$$

$$= -\frac{(1-x)^{-5/2}(1+x)^{-3/2}}{2}(-4x-2)$$

$$= \frac{1+2x}{(1-x)^{-5/2}(1+x)^{-3/2}}$$

$$f''=0 \Rightarrow 1+2x=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{2}$$

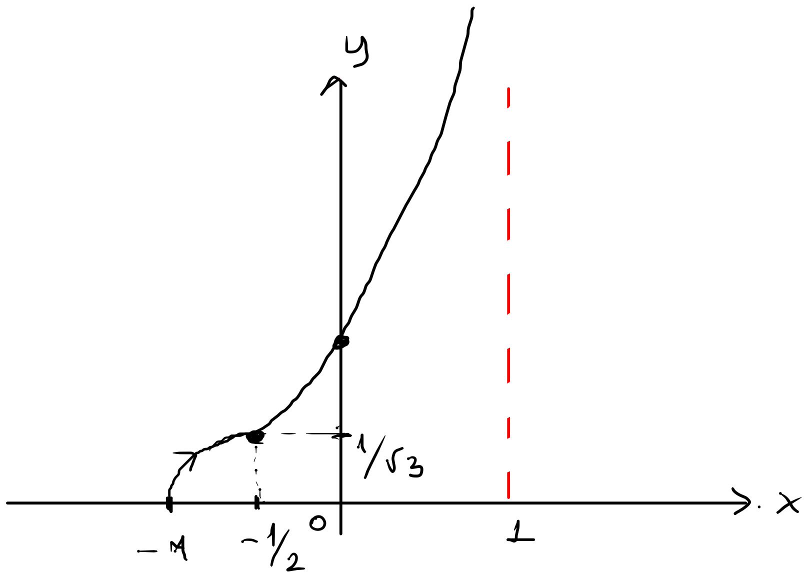
x	-1		$-1/2$		1
f''		$-$	$\bullet$	$+$	

$x=-1/2$

$$y=\sqrt{\frac{1+(-1/2)}{1-(-1/2)}} = \sqrt{\frac{1/2}{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

B.N

x	-1		$-1/2$		0		1
f''		$-$	$\bullet$	$+$		$+$	
f'		$+$		$+$		$+$	
f		aşağı		yukarı		yukarı	
	0 min.	$\nearrow$	$1/\sqrt{3}$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$



2) $y = \cot x$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

$$y = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$D(f): \mathbb{R} - \{n\pi\} \quad (n = 0, \mp 1, \mp 2, \dots)$

Periyodu $T = \pi$ olduğundan π'ye eşit uzunlukta bir aralıkta inceleme yapılabilir.

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\cos x}{\sin x} = \infty$$

$\left.\begin{matrix} x = 0 \\ x = \pi \end{matrix}\right\}$ D.A. $\quad \lim_{x \to \pi^-} \frac{\cos x}{\sin x} = -\infty$

$D(f): [0, \pi]$ olarak aldığımızdan

Yatay ve eğik asimptotu yoktur.

$$x \to -x \Rightarrow \frac{\cos(-x)}{\sin(-x)} = \frac{\cos x}{-\sin x} = -y$$

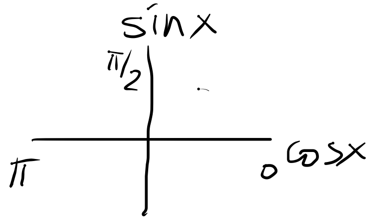
orjine göre simetrik.

$y = 0 \Rightarrow \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \in (0, \pi)$

$y' = -(1 + \cot^2 x) < 0$ azalan bir fonk.

$$= -\csc^2 x = \frac{-1}{\sin^2 x}$$

$$y'' = \frac{2 \sin x \cos x}{\sin^4 x} = \frac{2 \cos x}{\sin^3 x}$$



$y'' = 0 \Rightarrow \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$

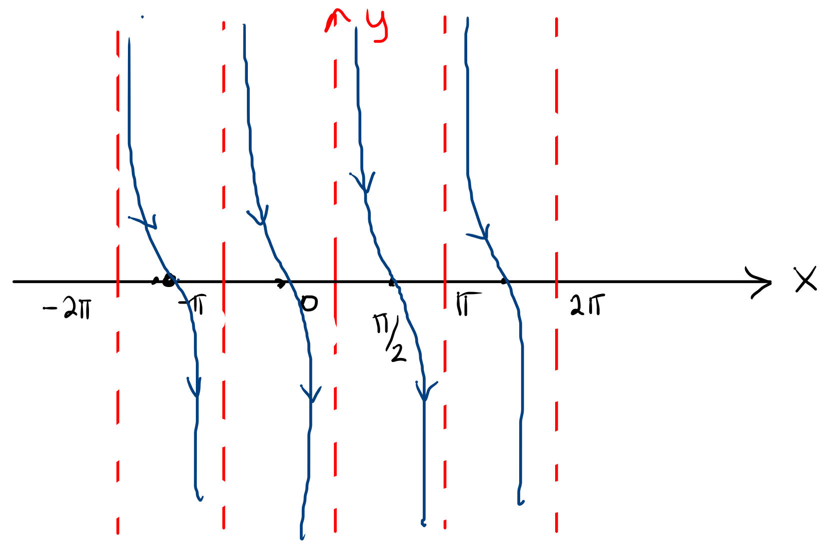
x		$\pi/2$	
y''	$+$	$\bullet$	$-$

B.N.

x	0		$\pi/2$		π
y''		$+$		$-$	
y'		$-$		$-$	
y	$+\infty$	yukarı $\searrow$	0	aşağı $\searrow$	$-\infty$

B.N.

x	0		$\pi/2$		π
y''		$+$		$-$	
y'		$-$		$-$	
y	∞	yukarı $\searrow$	0	aşağı $\searrow$	$-\infty$



ör/ $y = x \ln x$ 'in grafiğini çiziniz.

$D(f): (0,\infty)$

$$\lim_{x\to 0^+} x.\ln x \overset{0.\infty}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/x} \underset{L'H}{\overset{\infty/\infty}{=}} \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0^+} -x = 0$$

D.A. yoktur.

$x=0 \Rightarrow y=0$

$y=0 \Rightarrow x \ln x = 0$ → $x=0$; → $\ln x = 0 \Rightarrow x = e^0 = 1$

$$\lim_{x\to\infty} x.\ln x = \infty$$ Y.A yoktur.

E.A olabilir.

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x}.\ln x}{\cancel{x}} = \infty$$

E.A yoktur. Eğri kolu paraboliktir.

$$y' = (x\ln x)' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

$$y' = 0 \Rightarrow \ln x + 1 = 0 \Rightarrow \ln x = -1$$

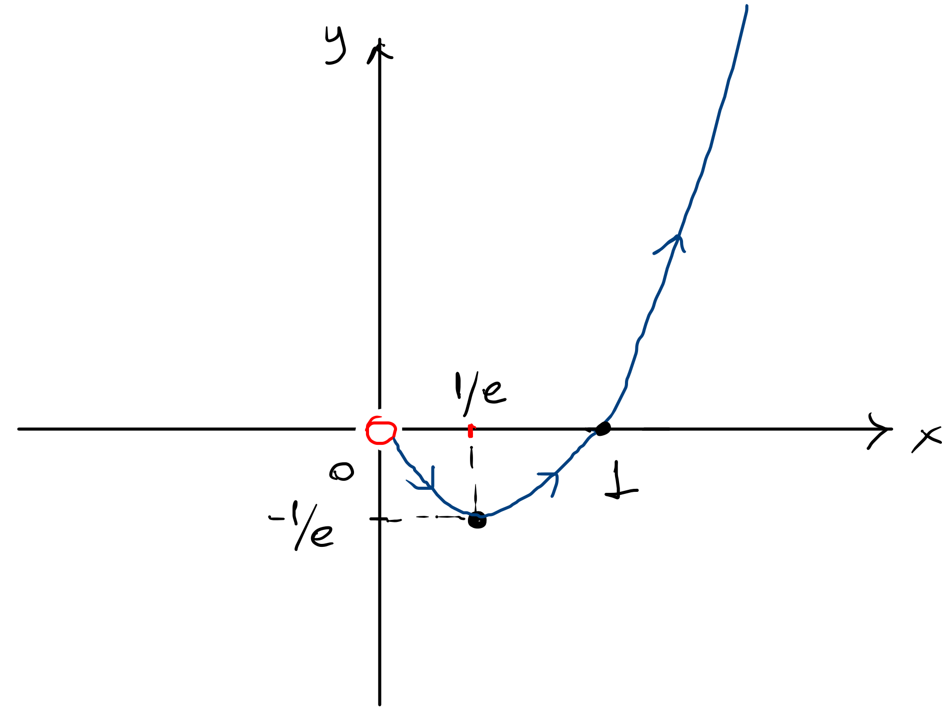
$$\boxed{x = e^{-1}} \quad \text{K.N.}$$

x		$1/e$	
y'	$-$	0	$+$

$$y'' = \frac{1}{x} > 0 \qquad x \in (0, \infty) \qquad y''\Big|_{1/e} = \frac{1}{1/e} = e > 0$$

min. vardır.

x	0		$1/e$		1		∞
y''		$+$		$+$		$+$	
y'		$-$	0	$+$		$+$	
y	0	yukarı $\searrow$	$-1/e$	yukarı $\nearrow$	0	yukarı $\nearrow$	∞



Ters türev ve Belirsiz integral

Sonlu veya sonsuz (açık, kapalı veya yarı açık) bir $I \subset \mathbb{R}$ aralığı ve bu aralık üzerinde tanımlı $f, F : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonları verilmiş olsun.

Eğer F fonksiyonu I üzerinde türevlenebilir ve $\forall x \in I$ için $F'(x) = f(x)$ ise, $F(x)$ fonksiyonuna $f(x)$ fonksiyonunun I üzerinde ters türevi (veya ilkel fonksiyonu) denir.

NOT: $a, b \in \mathbb{R}$, $I = [a, b]$ durumunda F fonksiyonunun a noktasında sağdan, b noktasında soldan türevlenebilir olduğu varsayılır. Verilen bir noktada türevli bir fonksiyon bu noktada da sürekli olacağından, f'in I üzerindeki ilkel fonksiyonu olan F fonksiyonu da I üzerinde süreklidir.

$F(x) = \frac{x^4}{4} \Rightarrow F'(x) = x^3 = f(x)$ f, $\mathbb{R}$'de süreklidir F'de $\mathbb{R}$'de süreklidir.

$F(x) = \ln x \Rightarrow F'(x) = \frac{1}{x} = f(x)$ f, $(0, \infty)$'da süreklidir F'de $(0, \infty)$'da süreklidir.

Ters türevler tek değildir, eğer c herhangi bir sabit ise o zaman $F(x)=x+c$, herhangi bir aralıkta $f(x)=1$'in bir ters türevidir. Yani f'in bir aralıktaki tüm ters türevleri, onun herhangi bir özel ters türevine sabitler eklenerek elde edilebilir.

Teorem: $I \subset \mathbb{R}$ üzerinde türevlenebilir iki $F, G : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarının aynı bir $f : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun ilkel fonksiyonları (ters türevleri) olması için gerek ve yeter koşul $G(x) - F(x)$ fonksiyonunun I üzerinde sabit bir fonksiyon olmasıdır. Yani, c keyfi bir sayı olmak üzere $\forall x \in I$ için $G(x) - F(x) = C \Rightarrow G(x) = F(x) + C$ olmasıdır.

Tanım: (Belirsiz integral)

$I \subset \mathbb{R}$ üzerinde tanımlı $f : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun I üzerindeki tüm ilkel fonksiyonlarının kümesine f'in I üzerinde belirsiz integrali denir ve

$$\int f(x)\,dx$$

şeklinde gösterilir.

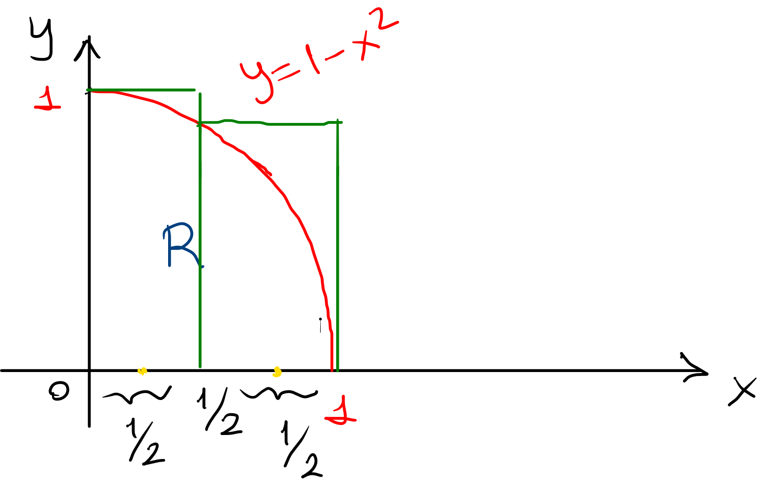
Eğer, $F : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu f'in I üzerinde bir ters türevi (ilkel fonksiyonu) ise c keyfi bir sayı olmak üzere $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ olur.

int. işareti · integrand · ilkel fonk. · integrasyon sabiti.

İntegral Tablosu

- $\int 1 \cdot dx = x + C$ $\quad ((x)' = 1)$
- $\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C$ $\quad \left(\left(\frac{x^4}{4}\right)' = x^3 \right)$
- $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$ $\quad ((-\cos x) = \sin x)$
- $\int \cos x \, dx = \sin x + C$
- $\int e^x \, dx = e^x + C$
- $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$
- $\int \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \sqrt{x} + C$
- $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$
- $\int \sec^2 x \, dx = \tan x + C$
- $\int \sinh x \, dx = \cosh x + C$
- $\int \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arccos x + C$
- $\int a^x . \ln a \, dx = a^x + C$

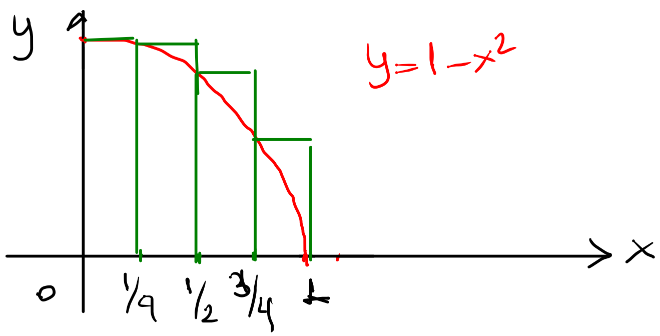
Alan ve Sonlu Toplamlarla Tahminde Bulunmak



x-ekseninin üstünde, $y=1-x^2$ eğrisinin altında ve $x=0$, $x=1$ doğruları arasında kalan R bölgesinin alanını bulmak istediğimizi varsayalım.

[0,1] aralığını 2 tane alt aralığa bölelim, herbir alt aralığın sol uç noktasını alalım. f en büyük değerini alt aralıkların sol uç noktasında alır. Oluşan dikdörtgenler R bölgesini içine aldığından dikdörtgenlerin alanları toplamı R bölgesinin alanından daha büyüktür.

$$A \cong f(0)\cdot\frac{1}{2}+f\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{2} = 1\cdot\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{7}{8} = 0{,}875$$



$$A = f(0)\cdot\frac{1}{4}+f\left(\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{1}{4}+f\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{4}\right)+f\left(\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{1}{4}$$

$$= 1\cdot\frac{1}{4}+\frac{15}{16}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}+\frac{7}{16}\cdot\frac{1}{4} = \frac{25}{32} = 0{,}78125$$