Ör/ $y' + y^2 - 3y\tan x + \tan^2 x - 1 = 0$ dif. denkleminin bir özel çözümü $y_1 = \tan x$ olarak verildiğine göre genel çözümünü bulunuz.

$$y' = -y^2 + 3y\tan x + 1 - \tan^2 x \qquad y_1 = \tan x \qquad \text{Ricatti dif. denk.}$$

$$y = y_1 + \frac{1}{u}$$

$$\left.\begin{aligned} y &= \tan x + \frac{1}{u} \\ y' &= 1 + \tan^2 x - \frac{u'}{u^2} \end{aligned}\right\}\ \cancel{1} + \tan^2 x - \frac{u'}{u^2} = -\left(\tan x + \frac{1}{u}\right)^2 + 3\left(\tan x + \frac{1}{u}\right)\tan x + \cancel{1} - \tan^2 x$$

$$\tan^2 x - \frac{u'}{u^2} = -\left[\tan^2 x + 2\frac{\tan x}{u} + \frac{1}{u^2}\right] + 3\tan^2 x + \frac{3\tan x}{u} - \tan^2 x$$

$$\cancel{\tan^2 x} - \frac{u'}{u^2} = -\cancel{\tan^2 x} - 2\frac{\tan x}{u} - \frac{1}{u^2} + \cancel{3\tan^2 x} + 3\frac{\tan x}{u} - \cancel{\tan^2 x}$$

$$-\frac{u'}{u^2} = \frac{\tan x}{u} - \frac{1}{u^2}$$

$$\Rightarrow \quad u' = -u\tan x + 1 \quad \Rightarrow \quad u' + u\tan x = 1 \quad \text{L.D.D.}$$

$$p(x) = \tan x \qquad \lambda = e^{\int p(x)dx}$$

$$= e^{\int \tan x\, dx} = e^{-\ln|\cos x|} = \frac{1}{\cos x}$$

$$u' + \tan x \, u = 1$$

$$du + \tan x \cdot u \cdot dx = dx$$

$$\frac{1}{\cos x} = \sec x \; , \; d\left(\frac{1}{\cos x}\right) = \sec x \cdot \tan x \, dx$$
$$= \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x} \, dx$$

$$\underbrace{\frac{1}{\cos x} du + \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x} u \, dx}_{\int d\left(\frac{1}{\cos x} \cdot u\right)} = \frac{1}{\cos x} dx$$

$$\int d\left(\frac{1}{\cos x} \cdot u\right) = \int \frac{1}{\cos x} dx$$

$$\frac{u}{\cos x} = \ln|\sec x + \tan x| + C$$

$u = \cos x \cdot \ln|\sec x + \tan x| + C \cdot \cos x \rightarrow$ L.D.D'in genel çöz.

$y = y_1 + \frac{1}{u} \Rightarrow y = \tan x + \frac{1}{\cos x \ln|\sec x + \tan x| + C \cdot \cos x} \rightarrow$ Ricatti dif. denk'inin genel çöz.

Birinci Mertebeden Yüksek Dereceli Denklemler

Birinci mertebeden bir dif. denklem $f(x,y,y')=0$ formundadır. Bu denklemde $y'=p$ alınmak suretiyle eğer denklemde p'nin derecesi birden büyük ise denkleme birinci mertebeden yüksek dereceli dif. denklem denir.

$$y'=p \Rightarrow f(x,y,p)=0$$

Bu denklemlerden özel olarak Clairaut ve Lagrange dif. denklemlerini inceleyeceğiz.

Clairaut dif. denk.

$y=xy'+\varphi(y')$ şeklindeki denklemlerdir.

$$y'=p \Rightarrow y=xp+\varphi(p) \qquad \text{Türev alalım;}$$

$$y'=p+xp'+p'\varphi'(p)$$

$$\cancel{p}=\cancel{p}+xp'+p'\varphi'(p) \Rightarrow p'\left[x+\varphi'(p)\right]=0$$

$$p'=0 \Rightarrow p=c$$

$$\boxed{y=xc+\varphi(c)}$$

Dif. denk.'in genel çöz.

$$x+\varphi'(p)=0 \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} x&=-\varphi'(p)\\ y&=-\varphi'(p)\cdot p+\varphi(p)\end{aligned}}$$

Tekil çözümün parametrik denklemleri

Bu parametrik denklemler arasında p parametresi yok edilebiliyorsa $F(x,y)=0$ şeklinde tekil çözümün kartezyen denklemi elde edilir.

Clairaut dif. denkleminin genel çözümü ile tekil çözümü arasında analitik bir ilişki vardır. Genel çözüm $y = xc + \varphi(c)$ şeklinde olup bir doğru ailesi gösterir. Tekil çözümün gösterdiği eğri ise bu eğri ailesinin herbirine teğet olan bir eğridir. Bu ise doğru ailesinin zarfı olan eğri demektir.

Ör/ $y = xy' + y' + y'^2$ dif. denkleminin genel çözümünü ve varsa tekil çözümünü bulunuz.

$y' = p \Rightarrow y = xp + p + p^2 \Rightarrow$ yüksek dereceli

x'e göre türet; $y' = p + xp' + p' + 2pp'$

$$\cancel{p} = \cancel{p} + xp' + p' + 2pp'$$

$$\Rightarrow p'[x + 1 + 2p] = 0$$

$p' = 0 \Rightarrow p = c$

$$\boxed{y = xc + c + c^2}$$

Dif. denk.'in genel çöz.

$x + 1 + 2p = 0$

$\Rightarrow x = -(1+2p)$

$y = -(1+2p).p + p + p^2 = \cancel{-p} - 2p^2 \cancel{+p} + p^2$

$\Rightarrow y = -p^2$

$$\left.\begin{aligned} x &= -(1+2p) \\ y &= -p^2 \end{aligned}\right\}$$ Tekil çözümün parametrik denk.

$-2p = x + 1$

$p = -\dfrac{(x+1)}{2}$

$$\boxed{y = -\frac{(x+1)^2}{4}}$$

Tekil çözümün kartezyen denklemi

Ör: $y - xy' = \dfrac{1}{(y')^2}$ dif. denkleminin genel ve tekil çözümünü bulunuz.

$$y = xy' + \frac{1}{(y')^2} = xy' + \varphi(y')$$ Clairaut dif. denk.

$$y' = p \Rightarrow \quad y = xp + \frac{1}{p^2}$$

$$y' = p + xp' - \frac{2p'}{p^3}$$

$$\cancel{p} = \cancel{p} + xp' - \frac{2p'}{p^3}$$

$$p'\left[x - \frac{2}{p^3}\right] = 0$$

$$p' = 0 \Rightarrow p = c$$

$$\boxed{y = xc + \frac{1}{c^2}}$$

dif. denk.'in genel çöz.

$$x - \frac{2}{p^3} = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{2}{p^3}$$

$$y = \frac{2}{p^{\cancel{3}}} \cdot \cancel{p} + \frac{1}{p^2} \Rightarrow y = \frac{3}{p^2}$$

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{2}{p^3} \\ y &= \frac{3}{p^2} \end{aligned}\right\}$$ Tekil çözümün parametrik denk.

$$p^2 = \frac{3}{y} \Rightarrow p = \left(\frac{3}{y}\right)^{1/2} \Rightarrow x = \frac{2}{\left(\frac{3}{y}\right)^{3/2}}$$

$$\boxed{x = 2 \cdot \left(\frac{y}{3}\right)^{3/2}}$$ Tekil çözümün kartezyen denk.

Ör/ $(y-xy')\left(x-\frac{y}{y'}\right)=-2$ dif. denkleminin genel ve tekil çözümünü bulunuz. $(y'>0)$

$(y-xy')(xy'-y)=-2y'$

$(y-xy')(y-xy')=2y'$

$(y-xy')^2=2y'$ $\Rightarrow$ $y-xy'=\mp\sqrt{2y'}$

$y=xy'\mp\sqrt{2y'}$ Clairaut dif. denk.

$=xy'+\varphi(y')$

$y'=p \Rightarrow y=xp\mp\sqrt{2p}=xp\mp\sqrt{2}.\sqrt{p}$

Türev alırsak; $y'=p+xp'\mp\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{p}}p'$

$\Rightarrow \cancel{p}=\cancel{p}+xp'\mp\frac{1}{\sqrt{2p}}p' \Rightarrow p'\left[x\mp\frac{1}{\sqrt{2p}}\right]=0$

$\Rightarrow p'=0 \Rightarrow p=c$

$\Rightarrow \boxed{y=xc\mp\sqrt{2c}}$

Genel çözüm.

$\Rightarrow x\mp\frac{1}{\sqrt{2p}}=0 \Rightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{2p}}$

$\Rightarrow y=\pm\frac{1}{\sqrt{2p}}\cdot p\mp\sqrt{2p}$

$=\pm\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{2}}\mp\sqrt{2}.\sqrt{p}$

$=\mp\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{2}}=\mp\sqrt{\frac{p}{2}}$

$\boxed{x.y=-\frac{1}{2}}$ $\left\{\begin{array}{l} x=\pm\frac{1}{\sqrt{2p}} \\ y=\mp\sqrt{\frac{p}{2}} \end{array}\right\}$ T.Ç'ün parametrik denklemleri

T.Ç'ün kartezyen denk.

2) Lagrange dif. denk.

$y = x\cdot\varphi(y') + \psi(y')$ şeklindeki dif. denklemlerdir. Clairaut dif. denklemi bu denklemin bir özel halidir.

$$y' = p \Rightarrow y = x\varphi(p) + \psi(p)$$

x'e göre türetirsek; $y' = \varphi(p) + x.p'.\varphi'(p) + p'.\psi'(p)$

$$\Rightarrow p = \varphi(p) + p'\left[x\varphi'(p) + \psi'(p)\right]$$

$$\Rightarrow p - \varphi(p) = p'\left[x\varphi'(p) + \psi'(p)\right]$$

$$\Rightarrow p' = \frac{dp}{dx} = \frac{p-\varphi(p)}{x\varphi'(p)+\psi'(p)} \Rightarrow \frac{dx}{dp} = \frac{x\varphi'(p)+\psi'(p)}{p-\varphi(p)}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dp} - x.\left(\frac{\varphi'(p)}{p-\varphi(p)}\right) = \frac{\psi'(p)}{p-\varphi(p)}$$

Bu elde edilen denklem x'in fonksiyon p'nin ise bağımsız değişken olduğu bir Lineer dif. denklemdir. Çözümü $x = F(p,c)$ şeklinde bulunur.

$$x = F(p,c)$$
$$y = F(p,c).\varphi(p) + \psi(p)$$
} Genel çözümün parametrik denk.

p parametresi yok edildiğinde dif. denklemin genel çözümünün kartezyen ifadesi bulunmuş olur.

Ö. $y = 2xy' - y'^2 - 1$ dif. denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$$y' = p \Rightarrow y = 2xp - p^2 - 1$$
$$= x.2p + (-p^2 - 1)$$
$$= x.\varphi(p) + \psi(p) \quad \text{Lagrange dif. denk.}$$

$$y = 2xp - p^2 - 1$$

x'e göre türev alırsak;

$$y' = 2p + 2xp' - 2pp'$$
$$\Rightarrow p = 2p + 2xp' - 2pp'$$
$$\Rightarrow -p = p'[2x - 2p]$$

$$\Rightarrow p' = \frac{-p}{2x-2p} \Rightarrow \frac{dx}{dp} = \frac{2x-2p}{-p} \Rightarrow \frac{dx}{dp} + \frac{2}{p}x = 2 \quad \text{L.D.D.}$$

$$s = \frac{2}{p} \Rightarrow \lambda = e^{\int s\,dp} = e^{\int \frac{2}{p}dp} = e^{2\ln p} = p^2.$$

$$dx + \frac{2}{p}x\,dp = 2dp \Rightarrow p^2dx + 2px\,dp = 2p^2dp$$

$$\underbrace{p^2 dx + 2px\, dp}_{} = 2p^2 dp$$

$$\int d(p^2 x) = \int 2p^2 dp$$

$$p^2 x = \frac{2p^3}{3} + k$$

$$x = \frac{2p}{3} + \frac{k}{p^2}$$

$$y = 2\cdot\left[\frac{2p}{3} + \frac{k}{p^2}\right]p - p^2 - 1$$

$$= \frac{4p^2}{3} + \frac{2k}{p} - p^2 - 1$$

$$= \frac{p^2}{3} + \frac{2k}{p} - 1$$

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{2p}{3} + \frac{k}{p^2} \\ y &= \frac{p^2}{3} + \frac{2k}{p} - 1 \end{aligned}\right\}$$ Genel çözümün parametrik denk.

Ör/ $y = x\underbrace{(1+y')}_{\varphi(y')} + \underbrace{y'^2}_{\psi(y')}$ dif. denk.'nin genel çöz. bulunuz.

Lagrange dif. denk.

$y' = p \Rightarrow y = x(1+p) + p^2$

x'e göre türetelim; $y' = (1+p) + x\cdot p' + 2pp'$

$$\Rightarrow \cancel{p} = 1 + \cancel{p} + xp' + 2pp'$$

$$\Rightarrow -1 = p'(x+2p)$$

$$\Rightarrow p' = \frac{-1}{x+2p} \Rightarrow \frac{dx}{dp} = \frac{x+2p}{-1}$$

$\Rightarrow \dfrac{dx}{dp} + x = -2p$ L.D.D. (x fonk, p değişken)

$\lambda = e^{\int dp} = e^p$, $dx + x\,dp = -2p\,dp$

$$\Rightarrow e^p dx + x e^p dp = -2pe^p dp$$

$$p = u \Rightarrow dp = du$$

$$e^p\,dp = dv \Rightarrow e^p = v$$

$$\underbrace{e^p\,dx + x e^p\,dp} = -2p e^p\,dp$$

$$\int d(x . e^p) = \int -2p e^p\,dp$$

$$x . e^p = -2\left[p e^p - \int e^p\,dp\right]$$

$$x . e^p = -2p e^p + 2e^p + k$$

$$x = -2p + 2 + \frac{k}{e^p}$$

$$x = -2(p-1) + k e^{-p}$$

$$y = x.(1+p) + p^2 \Rightarrow y = \left[-2(p-1) + k e^{-p}\right](1+p) + p^2$$

$$= -2(p^2-1) + k(1+p)e^{-p} + p^2$$

$$= -p^2 + 2 + k(1+p)e^{-p}$$

$$\underbrace{\begin{aligned} x &= -2(p-1) + k e^{-p} \\ y &= (2-p^2) + k(p+1).e^{-p} \end{aligned}}_{\text{dif. denk genel çözümünün parametrik denk.}}$$