Green fonksiyonları kullanılarak başlangıç değer problemlerinin çözümleri

$$\left.\begin{aligned} Ly &= \frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right] + q(x)y = F(x) \qquad \alpha < x < \beta \\ B_1 y &= -l_1 y'(\alpha) + h_1 y(\alpha) = m_1 \\ B_2 y &= l_2 y'(\beta) + h_2 y(\beta) = m_2 \end{aligned}\right\} \quad (43)$$

sınır değer probleminde şartlar $y(\alpha) = m_1$, $y'(\alpha) = m_2$ olarak gözönüne alınırsa problemimiz başlangıç değer problemi ve şartlarımız da başlangıç şartları olarak adlandırılır.

Başlangıç değer problemlerinde bağımsız değişken t olarak alınır ve böylece başlangıç noktası t_0 olarak ele alınırsa

$$\left.\begin{aligned} Ly &= \frac{d}{dt}\left[p(t)\frac{dy}{dt}\right] + q(t)y = F(t) \qquad t > t_0 \\ y(t_0) &= m_1 \\ y'(t_0) &= m_2 \end{aligned}\right\} \quad (44)$$

elde edilir. Bu problemin Green fonksiyonu

$$\left.\begin{aligned} Ly &= \delta(t-T) \\ B_1 g &= g(t_0;T) = 0 \\ B_2 g &= g'(t_0;T) = 0 \end{aligned}\right\} \quad (45)$$

problemini sağlayan bir fonksiyondur. Ancak bu $g(t;T)$ fonksiyonu (44) başlangıç değer probleminin çözümlerini improper integral olarak bulmamıza yol açtığından çözümler improper integraller için yakınsaklık teoremleri ile elde edilir. Bu yüzden $g(t;T)$ Green fonksiyonunu (44) probleminin bir esas çözümü olarak tanımlayabiliriz. Ve bu

$$\left.\begin{array}{ll} Lg = \delta(t-T) & \\ g(t;T) = 0 & t_0 < t < T \end{array}\right\} \quad (46)$$

probleminin bir çözümüdür.

Fiziksel olarak $g(t;T)$, T zamanında bir birim impulsa (44) probleminin tepkisidir. Doğal olarak $t<T$ için sistem özdeş olarak sıfırdır.

$t \geq t_0$ için $p(t) \neq 0$ olacağından (46) probleminin çözümü var ve tektir.

(44) problemi için Green fonksiyonu aşağıdaki özelliklerle karakterize edilir.

$$\left.\begin{array}{ll} g(t;T) = 0 & t_0 < t < T \\ Lg = 0 & t > T \\ g(T_+;T) = 0 & \\ g'(T_+;T) = \dfrac{1}{p(T)} & \end{array}\right\} \quad (47)$$

$u(t)$ ve $v(t)$ $Lg(t;T)=0$ 'ın lineer bağımsız çözümleri olsun.

$$g(x;T)=\frac{1}{J(u,v)}\left[u(x)v(T)\,H(T-x)+u(T)v(x)\,H(x-T)\right]$$

$$g(t;T)=\frac{1}{J(u,v)}\left[u(t)V(T)\,H(T-t)+u(T)v(t)\,H(t-T)\right]$$

$$g(t;T)=\frac{1}{J(u,v)}\left[u(T)v(t)-u(t)V(T)\right]H(t-T) \qquad (48)$$

$$H(T-t)=\begin{cases}1 & T>t\\ 0 & T<t\end{cases}$$

$$H(t-T)=\begin{cases}1 & t>T\\ 0 & t<T\end{cases}$$

$$H(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

$$H(-x)=\begin{cases}-1 & x<0\\ 0 & x>0\end{cases}$$

$$H(T-t)=\begin{cases}-1 & t<T\\ 0 & t>T\end{cases}$$

$H[-(t-T)]$

Bu green fonksiyonu (47) ile verilen özellikleri sağlar.

Ör: k bir sabit olmak üzere bir telin ucuna bir M kütlesi bağlandığını ifade eden

$$M\cdot\frac{d^2y}{dx^2}+ky=F(t) \qquad t>0$$

$$y(0)=m_1 \qquad y'(0)=m_2$$

başlangıç değer problemi için Green fonksiyonunu bulunuz ve çözümü elde ediniz.

$$My'' + ky = 0$$

k.D: $Mr^2 + k = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \mp\sqrt{\frac{k}{M}}\, i \Rightarrow y = A\cos\sqrt{\frac{k}{M}}\,t + B\sin\sqrt{\frac{k}{M}}\,t$

$u(t) = \cos\sqrt{\frac{k}{M}}\,t$ $\qquad p(t) = M$

$v(t) = \sin\sqrt{\frac{k}{M}}\,t$

$u'(t) = -\sqrt{\frac{k}{M}}\sin\sqrt{\frac{k}{M}}\,t$

$v'(t) = \sqrt{\frac{k}{M}}\cos\sqrt{\frac{k}{M}}\,t$

$$J(u,v) = p(t).\left[u v' - u' v\right]$$

$$= M\left[\sqrt{\frac{k}{M}}\cos^2\sqrt{\frac{k}{M}}\,t + \sqrt{\frac{k}{M}}\sin^2\sqrt{\frac{k}{M}}\,t\right] = \sqrt{Mk}$$

$$g(t;T) = \frac{1}{\sqrt{kM}}\left[\cos\sqrt{\frac{k}{M}}\,T.\sin\sqrt{\frac{k}{M}}\,t - \cos\sqrt{\frac{k}{M}}\,t.\sin\sqrt{\frac{k}{M}}\,T\right]H(t-T)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{kM}}\sin\sqrt{\frac{k}{M}}(t-T)\,H(t-T)$$

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} g(t;T)\,F(T)\,dT - p(t_0)\left[m_2 \cdot g(t;t_0) - m_1 \cdot \frac{\partial g(t;t_0)}{\partial T}\right]$$

$$= \int_0^t \frac{1}{\sqrt{kM}} \sin\sqrt{\frac{k}{M}}(t-T)\,F(T)\,dT - \frac{M}{\sqrt{kM}}\left[m_2 \sin\sqrt{\frac{k}{M}}\,t - m_1 \cdot \sqrt{\frac{k}{M}} \cos\sqrt{\frac{k}{M}}\,t\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{kM}}\int_0^t \sin\sqrt{\frac{k}{M}}(t-T)\,F(T)\,dT - \sqrt{\frac{M}{k}}\, m_2 \sin\sqrt{\frac{k}{M}}\,t + m_1 \cdot \cos\sqrt{\frac{k}{M}}\,t$$

$$\boxed{J(u,v) = p(x)\cdot\left[u'v - uv'\right]}$$

$$y(T) - \int_{\alpha}^{\beta} g(x;T)\,F(x)\,dx = p(\beta)\left[y(\beta)\cdot\frac{\partial g(\beta;T)}{\partial x} - g(\beta;T)\cdot\frac{\partial y(\beta)}{\partial x}\right] - p(\alpha)\left[y(\alpha)\cdot\frac{\partial g(\alpha;T)}{\partial x} - g(\alpha;T)\frac{\partial y(\alpha)}{\partial x}\right]$$

$$\int_{t_0}^{T} (uLv - vLu)\,dt = \int_{t_0}^{T} (yLg - gLy)\,dt$$

$$= \int_{t_0}^{T} \left[y\cdot\delta(t-T) - g(t;T)\cdot F(t)\right] dt$$

$u'v - uv'$

$$= -\int_{t_0}^{T} g(t;T)\,F(t)\,dt + y(T) = p(t)\cdot\left[uv' - u'v\right]$$

$$= -p(t)\cdot\left[y(t)\,\underbrace{g_t'(t;T)}_{=0} - y'(t)\cdot\overbrace{g(t;T)}^{=0}\right]$$

$$+ p(t_0)\cdot\left[\underbrace{y(t_0)}_{m_1}\, g_t'(t_0;T) - \underbrace{y'(t_0)}_{m_2}\, g(t_0;T)\right]$$

$$= p(t_0)\left[m_1 \cdot g_t'(t_0;T) - m_2 \cdot g(t_0;T)\right]$$