Küme ve Kümeler Üzerinde Elemanter İşlemler

Matematikte kullanılan küme kavramı, bazı özellik-lere sahip nesnelerin bir topluluğu veya bir sınıfı gibi düşünülebilir. Fakat bu kavramın kesin bir tanımı verilmemektedir. Kümeyi oluşturan nesnelere kümenin elemanları veya öğeleri denir. Kümeleri $A, B, C, X, Y, Z, \ldots$ gibi büyük harfler ile, elemanları da $a, b, c, x, y, z, \ldots$ gibi küçük harfler ile göstereceğiz.

Eğer, a bir A kümesinin bir elemanı ise, bu durumda $a \in A$ biçiminde, a bir B kümesinin elemanı değil se, bunu da $b \notin B$ biçiminde göstereceğiz.

Bir kümenin verilmesi için, o kümenin elemanlarının teker teker belirtilmesi veya o kümenin elemanlarının belirtilmesine yarayan bir özelliğin (veya özellikler takımının) verilmesi gerekir. Yani, bir elemanın kümeye ait olup olmadığını belirtmeye yarayan kesin bir kuralın verilmesi gerekmektedir. Buna göre, bir kümeyi gösterirken, ya o kümenin elemanları $\{\ldots\}$ arasına yazılır ya da

$$\{x : x \text{ in karakteristik özelliği}\}$$

sembolü kullanılır. Burada x kümenin genel elemanını gösterir, $:$ işareti de öyle ki anlamına gelen bir sembol olarak kullanılmıştır.

Hiçbir elemanı olmayan kümeye boş küme denir ve $\emptyset$ ile gösterilir.

Tanım 1: Eğer, bir A kümesinin herbir elemanı B kümesinin de bir elemanı ise A kümesi B kümesinin bir alt kümesidir denir ve $A \subset B$ sembolü ile gösterilir. Yani,

$$A \subset B \Leftrightarrow (a \in A \Rightarrow a \in B)$$

dir.

Her A kümesi için, $A \subset A$, $\emptyset \subset A$ 'dır. Eğer, $A \subset B$ ve $B \subset A$ ise, A ve B kümeleri eşittir denir ve $A = B$ biçiminde gösterilir. Buna göre

$$A = B \Leftrightarrow (A \subset B \wedge B \subset A) \quad (\wedge \rightarrow \text{ve demek})$$

dır. Eğer, $B \subset A$ ve $B \neq A$ ise, B'ye A'nın öz alt kümesi denir.

Tanım 2: A ve B herhangi iki küme olsun.

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\} \rightarrow A \text{ ve } B\text{'nin birleşimi}$$
$(\vee \rightarrow$ veya demek$)$

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\} \rightarrow A \text{ ve } B\text{'nin kesişimi}$$

$$A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\} \rightarrow A\text{'nın } B\text{'den farkı}$$

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \rightarrow A \text{ ile } B\text{'nin simetrik farkı}$$

dır.

$\{A_i\}_{i \in I}$ bir kümeler ailesi ise

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x : \exists\, i \in I,\ x \in A_i\} \quad \text{kümeler ailesinin birleşimi}$$

$\exists$ → (varıdır ki anlamında)

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \{x : \forall i \in I,\ x \in A_i\}$$ kümeler ailesinin kesişimi

olarak tanımlanır.

Bundan sonra göz önüne alacağımız kümeleri, bilindiği kabul edilen bir "$\mathbb{E}$" Evrensel kümesinin birer alt kümeleri olarak düşüneceğiz.

$A \subset \mathbb{E}$ kümesi verilsin. $\mathbb{E} \setminus A$ kümesine A kümesinin tümleyeni denir ve A^c ile gösterilir. Buna göre

$$A^c = \{x \in \mathbb{E} : x \notin A\}$$

dır.

A, B ve C kümeleri $\mathbb{E}$'nin herhangi alt kümeleri olsun. Bu durumda, birleşim, kesişim ve tümleyenin aşağıdaki özellikleri vardır:

(a) $(A \cup B) \subset \mathbb{E}$; $(A \cap B) \subset \mathbb{E}$ (Kapalılık özelliği);

(b) $(A \cup B) = (B \cup A)$, $(A \cap B) = (B \cap A)$ (Değişme özelliği);

(c) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
(Birleşme özelliği);

(d) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
(Birleşimin kesişim üzerine dağılma özelliği);

(e) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
(Kesişimin birleşim üzerine dağılma özelliği);

(f) $A \cup A = A \cap A = A$

(g) $(A \cup B = B) \Longleftrightarrow (A \cap B = A)$;

(h) $A \cup \emptyset = A$, $A \cap \mathbb{E} = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \cup \mathbb{E} = \mathbb{E}$;

(i) $A \cup A^c = \mathbb{E}$, $A \cap A^c = \emptyset$;

(j) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$, $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ (De Morgan kuralı)

Bir $\sigma = \{A, B, C, \ldots\}$ kümesi üzerinde yukarıdaki özellikleri sağlayan birleşim, kesişim ve tümleme işlemleri tanımlanmış ise bu kümeye Boole Cebiri denir ve $(\sigma, \cup, \cap)$ ile gösterilir. Böylece σ, $\mathbb{E}$ kümesinin tüm alt kümelerinden oluşan bir aile ise, $(\sigma, \cup, \cap)$ bir Boole cebiridir.

Her $i \in I$ için $A_i \subset \mathbb{E}$ olmak üzere $\{A_i\}_{i \in I}$ ailesi için De Morgan kuralı,

$$\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i \in I} A_i^c \quad , \quad \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)^c = \bigcup_{i \in I} A_i^c$$

biçimindedir.

Tanım 3: A ve B kümeleri için $A \cap B = \emptyset$ ise A ve B kümeleri ayrık kümelerdir.

Tanım 4: A bir küme ve $\{A_i\}_{i \in I}$, A kümesinin boş olmayan alt kümelerinden oluşan bir aile olsun.

(a) $\{A_i\}_{i \in I}$ ailesi ikişer ikişer ayrık;

(b) $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ ise

$\{A_i\}_{i\in I}$ ailesine A kümesinin bir ayrışımı denir.

Tanım 5: A ve B iki küme olsun.

$$A \times B = \{(a,b) : a \in A \text{ ve } b \in B\}$$

kümesine A ile B'nin kartezyen çarpımı denir.

(a,b) ve (c,d) sıralı ikililerinin eşitliği

$$(a,b) = (c,d) \Longleftrightarrow a=c \text{ ve } b=d$$

biçiminde tanımlandığından, genellikle $(a,b) \neq (b,a)$ ve dolayısıyla, $A \times B \neq B \times A$'dır. Eşitlik ancak $A=B$ olması halinde veya bu kümelerden en az birinin boş küme olması halinde mümkündür.

Çözümlü Problemler

(1) a) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ ve $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cap (A \cup C)$

c) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$, $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm-

a) $A \cup (B \cup C) = \{x \in E : x \in A \text{ veya } x \in (B \cup C)\}$

$= \{x \in E : x \in A \text{ veya } (x \in B \text{ veya } x \in C)\}$

$= \{x \in E : (x \in A \text{ veya } x \in B) \text{ veya } x \in C\}$

$= \{x \in \mathbb{E} : (x \in A \cup B) \text{ veya } x \in C\}$

$= (A \cup B) \cup C$

$A \cap (B \cap C) = \{x \in \mathbb{E} ; x \in A \text{ ve } x \in (B \cap C)\}$

$= \{x \in \mathbb{E} : x \in A \text{ ve } (x \in B \text{ ve } x \in C)\}$

$= \{x \in \mathbb{E} : (x \in A \text{ ve } x \in B) \text{ ve } x \in C\}$

$= \{x \in \mathbb{E} : x \in (A \cap B) \text{ ve } x \in C\}$

$= (A \cap B) \cap C$

b) $A \cap (B \cup C) = \{x \in \mathbb{E} : x \in A \text{ ve } x \in (B \cup C)\}$

$= \{x \in \mathbb{E} ; x \in A \text{ ve } (x \in B \text{ veya } x \in C\}$

$= \{x \in \mathbb{E} : (x \in A \text{ ve } x \in B) \text{ veya } (x \in A \text{ ve } x \in C)\}$

$= \{x \in \mathbb{E} : x \in (A \cap B) \text{ veya } x \in (A \cap C)\}$

$= (A \cap B) \cup (A \cap C)$

c) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

$x \in (A \cup B)^c \Rightarrow x \notin (A \cup B) \Rightarrow x \notin A \text{ ve } x \notin B$

$\Rightarrow x \in A^c \text{ ve } x \in B^c \Rightarrow x \in A^c \cap B^c$

$\Rightarrow (A \cup B)^c \subset A^c \cap B^c$

$$x \in A^c \cap B^c \Rightarrow x \in A^c \text{ ve } x \in B^c$$
$$\Rightarrow x \notin A \text{ ve } x \notin B \Rightarrow x \notin (A \cup B)$$
$$\Rightarrow x \in (A \cup B)^c \Rightarrow A^c \cap B^c \subset (A \cup B)^c$$

$\Rightarrow (A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ elde edilir.

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

$$x \in (A \cap B)^c \Rightarrow x \notin (A \cap B) \Rightarrow x \notin A \text{ veya } x \notin B$$
$$\Rightarrow x \in A^c \text{ veya } x \in B^c \Rightarrow x \in A^c \cup B^c$$
$$\Rightarrow (A \cap B)^c \subset A^c \cup B^c$$

$$x \in A^c \cup B^c \Rightarrow x \in A^c \text{ veya } x \in B^c$$
$$\Rightarrow x \notin A \text{ ve } x \notin B \Rightarrow x \notin (A \cap B)$$
$$\Rightarrow x \in (A \cap B)^c$$
$$\Rightarrow A^c \cup B^c \subset (A \cap B)^c$$

$\Rightarrow (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

(2) a) $(A^c)^c = A$; b) $\mathbb{E}^c = \emptyset$ c) $\emptyset^c = \mathbb{E}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: a) $x \in (A^c)^c \Rightarrow x \notin A^c \Rightarrow x \in A \Rightarrow (A^c)^c \subset A$

$$x \in A \Rightarrow x \notin A^c \Rightarrow x \in (A^c)^c \Rightarrow A \subset (A^c)^c$$

$$\Rightarrow (A^c)^c = A$$

b) $\forall x \in \mathbb{E}$ için $x \notin \mathbb{E}^c$ olduğundan $\mathbb{E}^c$ boş bir kümedir.

c) $x \in \mathbb{E} \Rightarrow x \notin \emptyset \Rightarrow x \in \emptyset^c \Rightarrow \mathbb{E} \subset \emptyset^c$. Öte yandan $\emptyset^c \subset \mathbb{E}$ olduğundan sonuç elde edilir.

(3) $A \cup (B \setminus C) \supset (A \cup B) \setminus C$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $A \cup (B \setminus C) = D$, $(A \cup B) \setminus C = G$ olsun.

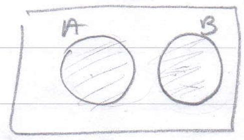
$x \in G \Rightarrow x \in (A \cup B)$ ve $x \notin C \Rightarrow (x \in A$ veya $x \in B)$ ve

$x \notin C \Rightarrow x \in A$ veya $x \in (B \setminus C) \Rightarrow x \in A \cup (B \setminus C) = D$

$\Rightarrow D \supset G$

(4) $A \cap B = \emptyset$ ise $(A \cup B) \cap (A^c \cup B^c) = A \cup B$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $C = (A \cup B) \cap (A^c \cup B^c)$ ve



$D = A \cup B$ olsun.

$x \in C \Rightarrow x \in (A \cup B)$ ve $x \in (A^c \cup B^c)$

$\Rightarrow x \in D \Rightarrow C \subset D$

$x \in D \Rightarrow (x \in A$ ve $x \notin B)$ veya $(x \notin A$ ve $x \in B)$

$\Rightarrow (x \in A$ ve $x \in B^c)$ veya $(x \in A^c$ ve $x \in B)$

$\Rightarrow x \in A \cup B$ ve $x \in (A^c \cup C^c)$

$\Rightarrow x \in (A \cup B) \cap (A^c \cup C^c) = C \Rightarrow D \subset C$

Her iki kapsamadan $C = D$ eşitliği elde edilir.

(5) $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $x \in A \Delta B \Leftrightarrow \{(x \in A \text{ ve } x \notin B) \text{ veya } (x \notin A \text{ ve } x \in B)\}$

$\Leftrightarrow \{(x \in A \text{ ve } x \notin B) \text{ veya } x \notin A\} \text{ ve } \{(x \in A \text{ ve } x \notin B) \text{ veya } x \in B\}$

$\Leftrightarrow (x \in A \text{ veya } x \in B) \text{ ve } (x \notin A \text{ veya } x \notin B)$

$\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \text{ ve } x \notin (A \cap B)$

$\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

(6) $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$(a,b) \in A \times (B \setminus C) \Leftrightarrow a \in A \text{ ve } b \in (B \setminus C)$

$\Leftrightarrow a \in A \text{ ve } (b \in B \text{ ve } b \notin C)$

$\Leftrightarrow (a \in A \text{ ve } b \in B) \text{ ve } (a \in A \text{ ve } b \notin C)$

$\Leftrightarrow (a,b) \in A \times B \text{ ve } (a,b) \notin A \times C$

$\Leftrightarrow (a,b) \in (A \times B) \setminus (A \times C)$

olduğu elde edilir.

(7) $A^c \setminus B^c = B \setminus A$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $x \in A^c \setminus B^c \Rightarrow x \in A^c \text{ ve } x \notin B^c$

$\Rightarrow (x \in E \text{ ve } x \notin A) \text{ ve } x \in B$

$\Rightarrow x \in B \text{ ve } x \notin A \Rightarrow x \in B \setminus A$

$\Rightarrow (A^c \setminus B^c) \subset B \setminus A$

$x \in (B \setminus A) \Rightarrow x \in B \text{ ve } x \notin A \Rightarrow x \notin B^c \text{ ve } x \in A^c$

$\Rightarrow x \in A^c \setminus B^c \Rightarrow B \setminus A \subset (A^c \setminus B^c)$.

Her iki kapsamadan istenen eşitlik bulunur.

FONKSİYONLAR-

Tanım 6: X ve Y boş olmayan herhangi iki küme olsun. $X \times Y$'nin boş olmayan her R alt kümesine X den Y'ye bir ikili bağıntı denir. $X \times X = X^2$ nin boş olmayan her alt kümesine X'de (veya X üzerinde) ikili bağıntı denir.

Tanım 7: X den Y'ye bir R bağıntısı verildiğinde $\{(b,a) : (a,b) \in R\}$ kümesi Y den X'e bir bağıntıdır ve bu bağıntıya R'nin tersi adı verilir ve R^{-1} ile gösterilir.

Tanım 8: R, X'de bir ikili bağıntı, yani $R \subset X \times X$ olsun.

(a) $\forall a \in X$ için, aRa ise R'ye yansıyan bir bağıntı,

(b) $a,b \in X$ için, $aRb \Rightarrow bRa$ ise R'ye simetrik bağıntı,

(c) $a,b,c \in X$ için, $(aRb \wedge bRc) \Rightarrow aRc$ ise R'ye geçişken bir bağıntı

(d) $a,b \in X$ için $(aRb \wedge bRa) \Rightarrow a=b$ ise R'ye ters simetrik bağıntı

denir.

Tanım 9: Yansıyan, simetrik ve geçişken bir bağıntıya denklik bağıntısı denir. R bir denklik bağıntısı olduğunda aRb yerine $a \sim b$ alınacaktır.

Örneğin, eğer X, düzlem üzerindeki tüm doğrulardan oluşan bir küme ise

$$aRb = \{(a,b) \in X : a \parallel b\}$$

paralellik bağıntısı X üzerinde bir denklik bağıntısıdır.

Tanım 10: Yansıyan, ters simetrik ve geçişken bir bağıntıya kısmi sıralama bağıntısı denir. R bir kısmi sıralama bağıntısı olduğunda aRb yerine $a \preceq b$ alınacak ve "a önce gelir b" diye okunacaktır.

Örneğin, eğer, $P(X)$, X'in tüm alt kümelerinden oluşan bir küme ise,

$$aRb = \{(a,b) \in X^2 : a \subset b\}$$

bağıntısı X üzerinde bir sıralama bağıntısıdır. Sıralama bağıntısında $\forall a,b \in X$ için aRb veya bRa olması gerekmez.

Tanım 11: R, X'de bir ikili sıralama bağıntısı olsun. Eğer, $\forall a,b \in X$ için aRb veya bRa ise bu bağıntıya bir tam sıralama bağıntısı denir.

Üzerinde tam sıralama bağıntısı tanımlı X kümesine tam (Lineer) sıralanmış küme denir. R bir tam sıralama bağıntısı olduğunda aRb yerine $a \leq b$ yazacağız ve "a küçük eşit b" diye okuyacağız.

Örneğin, ileride tanımlanacak olan $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi, üzerinde tam sıralama bağıntısıyla tam (Lineer) sıralanmış kümedir.

Boş olmayan X kümesi üzerinde bir denklik bağıntısı R olsun. $a \in X$ için,

$$\bar{a} = \{x \in X : xRa\}$$

kümesine a'nın denklik sınıfı denir. Denklik sınıfları

X'in bir ayrışımını belirtir.

Tanım 12: X ve Y boş olmayan iki küme ve

$$f = \{(x,y) : x \in X \wedge y \in Y\} \subset X \times Y$$

bir bağıntı olsun. Eğer,

(a) $\forall x \in X$ için $\exists y \in Y$ öyleki $(x,y) \in f$,

(b) $(x,y_1), (x,y_2) \in f \Rightarrow y_1 = y_2$

koşulları sağlanıyorsa f ye X den Y ye bir fonksiyon denir ve $(f, X \times Y)$ veya $f : X \to Y$, $X \xrightarrow{f} Y$ sembollerinden biri ile gösterilir.

X kümesine f fonksiyonunun tanım kümesi, Y kümesine de görüntü kümesi (değer kümesi) denir.

f fonksiyonunun tanım kümesini $D(f)$,
f fonksiyonunun değer kümesi olan

$$\{f(x) \in Y : x \in D(f)\}$$

kümesini de $R(f)$ ile göstereceğiz. Buna göre $f : X \to Y$ yazılışında $D(f) \neq X$ veya $R(f) \neq Y$ (veya her ikisi) olabilir.

Bir $f : X \to Y$ fonksiyonu verildiğinde $x \in D(f)$ elemanına karşılık gelen (tek türlü belirli) $y \in R(f)$ elemanı $y = f(x)$ ile gösterilir ve bu elemana x'in f altındaki görüntüsü denir.

Bir $f: X \to Y$ fonksiyonu verildiğinde:

(1) $A \subset D(f)$ olmak üzere

$$f(A) = \{ y \in R(f) : x \in A \text{ ve } y = f(x) \}$$

kümesine A'nın f altındaki görüntüsü veya f'in A üzerindeki değer kümesi,

(2) $B \subset R(f)$ olmak üzere

$$f^{-1}(B) = \{ x \in D(f) : f(x) \in B \}$$

kümesine de B'nin f altındaki ters görüntüsü denir.

Bir $f: X \to Y$ fonksiyonu için

$$G = \{ (x,y) \in X \times Y : \quad x \in X \wedge y = f(x) \}$$

kümesine f'nin grafiği denir. Bu tanıma göre fonksiyon ve onun grafiği aynı şeydir.

Tanım 13: $f, g : X \to Y$ fonksiyonları verilsin. Eğer, $D = D(f) = D(g)$ ve $\forall x \in D$ için $f(x) = g(x)$ ise f ile g fonksiyonları eşittir denir ve $f = g$ ile gösterilir.

Tanım 14: X ve Y boş olmayan iki küme olsun.

(a) Bir $b \in Y$ ve $\forall x \in X$ için $f(x) = b$ ise, f fonksiyonuna X'den Y'ye b değerli sabit bir fonksiyon denir.

(b) $X = Y$ ve $\forall x \in X$ için $f(x) = x$ ise f fonksiyonuna özdeş (veya birim) fonksiyon denir ve I_X ile gösterilir.

Buna göre $I_X = \{(x,y) \in X^2 : y = x\}$ olur.

Tanım 15: $f: X \to Y$ bir fonksiyon ve $A \subset X$ olsun. Her $x \in A$ için $g(x) = f(x)$ ile tanımlı $g: A \to Y$ fonksiyonuna f'nin A'ya kısıtlaması denir, $f|_A$ ile gösterilir. Bu durumda, f'ye de g'nin X üzerine bir genişlemesi denir.

Tanım 16: $f: X \to Y$ fonksiyonu verilsin. Eğer,

(a) $\forall y \in Y$ için $f(x) = y$ olacak şekilde en az bir $x \in X$ elemanı varsa (veya $f(X) = Y$ ise), f fonksiyonuna örten (surjektif) fonksiyon

(b) $x_1, x_2 \in X$ için $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ (veya $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$) ise, f fonksiyonuna birebir (1–1) (veya injektif) fonksiyon denir.

Birebir örten fonksiyona bijektif fonksiyon da denir.

Tanım 17: $f: X \to Y$ ve $g: Y \to Z$ fonksiyonları verilsin. Her $x \in X$ için $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ ile tanımlı $g \circ f : X \to Z$ fonksiyonuna f ile g'nin bileşkesi denir.

Genellikle $f \circ g \neq g \circ f$ dir. Hatta $f \circ g$ ($g \circ f$) bileşke fonksiyonu tanımlı olduğu durumda $g \circ f$ ($f \circ g$) fonksiyonu tanımlı olmayabilir. Örneğin, $f(x) = x^2$ ve $g(x) = 2^x$ fonksiyonları için

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2^{2x} \quad \text{ve} \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)) = 2^{x^2}$$

olduğuna göre $f \circ g \neq g \circ f$'dir.

Tanım 18 : $f : X \to Y$ fonksiyonu için, $f \circ \tilde{f} = I_Y$ ve $\tilde{f} \circ f = I_X$ olacak şekilde bir $\tilde{f} : Y \to X$ fonksiyonu varsa, $\tilde{f}$ fonksiyonuna f nin tersi denir ve f^{-1} ile gösterilir.

Teorem 1 : $f : X \to Y$ fonksiyonunun tersinin mevcut olması için gerek ve yeter koşul bu fonksiyonun birebir örten (bijektif) olmasıdır.

Tanım 19: X ve Y kümeleri arasında birebir örten bir fonksiyon varsa, X ve Y kümelerine denk (veya eş güçlü) kümeler denir ve $X \sim Y$ ile gösterilir.

X den Y'ye $X \sim Y$ şeklinde tanımlı bağıntı bir denklik bağıntısıdır.

Tanım 20 : $\mathbb{N}_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ $(n \in \mathbb{N})$ olsun. $\mathbb{N}_n$ ile denk olan bir kümeye sonlu (n elemanlı) bir küme ve $\mathbb{N}$ ile denk olan bir kümeye de sayılabilir bir küme denir. Bir öz alt kümesi ile denk olan bir kümeye sonsuz bir küme denir.

Çözümlü Problemler

(1) Düzlemde doğrular arasında tanımlanan $\perp$ "diklik bağıntısı" nın bir denklik bağıntısı olup olmadığını inceleyiniz.

Çözüm: Düzlemde iki a ve b doğruları arasında

$$a \perp b = \{(a,b) : a \text{ ile } b \text{ diktir}\}$$

biçiminde tanımlı bağıntı yansıyan değildir. Çünkü herhangi a doğrusu için $a \perp a$ özelliği doğru değildir. O halde bu bağıntı denklik bağıntısı değildir.

(2) $x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\sim$ bağıntısı $x \sim y \Leftrightarrow x-y \in \mathbb{Z}$ olarak tanımlansın. Bu bağıntının denklik bağıntısı olduğunu gösterin.

Çözüm: Denklik bağıntısı özelliklerinin sağlandığını gösterelim.

i) Her $x \in \mathbb{R}$ için $x-x=0 \in \mathbb{Z}$ olduğundan $x \sim x$

ii) $x, y \in \mathbb{R}$ için $x \sim y$ yani $x-y \in \mathbb{Z}$ olsun. Her tam sayının toplamsal tersi de bir tam sayı olduğundan, $y-x=-(x-y) \in \mathbb{Z}$ ve dolayısıyla $y \sim x$'dir.

iii) $x, y, z \in \mathbb{R}$ için $x \sim y$ ve $y \sim z$ yani $x-y \in \mathbb{Z}$ ve $y-z \in \mathbb{Z}$ olsun. İki tam sayının toplamı da tam sayı olduğundan, $x-z=(x-y)+(y-z) \in \mathbb{Z}$'dir. Dolayısıyla $x \sim z$ olur.

(3) $f: X \to Y$ ve $g: Y \to X$ iki fonksiyon ve $f \circ g = I_Y$ olsun.

(a) f'in örten

(b) g'nin birebir olduğunu gösteriniz.

Çözüm: (a) $\forall y \in Y$ için, $g(y)=x$ alırsak, $f(x)=f[g(y)]=(f \circ g)(y)=I_Y=y$ olur. Böylece, $\forall y \in Y$ için $f(x)=y$ olacak şekilde $x=g(y) \in X$ elemanı vardır. O halde f örtendir.

(b) $y_1, y_2 \in Y$ için

$$g(y_1)=g(y_2) \Rightarrow f[g(y_1)]=f[g(y_2)]$$

$$\Rightarrow (f\circ g)(y_1) = (f\circ g)(y_2)$$

$$\Rightarrow \quad y_1 = y_2$$

olduğundan, g birebirdir.

(4) $f: X \to Y$ birebir örten bir fonksiyon ise, $f^{-1}: Y \to X$ fonksiyonu da birebir örtendir. Gösteriniz.

Çözüm:

Birebir ve örtenlik özelliklerinin sağlandığını gösterelim.

Y kümesinin herhangi iki farklı y_1 ve y_2 elemanı verilsin. Ayrıca $f^{-1}(y_1) = x_1$, $f^{-1}(y_2) = x_2$ olarak alalım. Eğer $f^{-1}(y_1) = f^{-1}(y_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ olur ve

f birebir olduğundan $f(x_1) = f(x_2)$ elde edilir. Halbuki, f^{-1} fonksiyonunun tanımına göre bu $y_1 = y_2$ olması demektir. Böylece, $y_1, y_2 \in Y$ için

$$y_1 \neq y_2 \Rightarrow f^{-1}(y_1) \neq f^{-1}(y_2)$$

olur. Dolayısıyla, $f^{-1}: Y \to X$ fonksiyonu birebirdir.

Herhangi bir $x \in X$ elemanı verilsin. Bu durumda $f(x) = y$ olacak şekilde $y \in Y$ vardır. f^{-1} fonksiyonunun tanımına göre $f^{-1}(y) = x$ ve $f^{-1}(Y) = X$ olur. Buna göre $f^{-1}: Y \to X$ fonksiyonu örtendir.

(5) Örten, birebir ve birebir örten olmayan fonksiyonlar için örnek veriniz.

Çözüm:

$X = \{1,2,3,4\}$ ve $Y = \{2,4,6,8,10\}$ kümeleri ve $x \in X$ için $f : x \to 2x$ şeklinde tanımlanan $f : X \to Y$ fonksiyonu verilsin. Bu fonksiyon birebir olup örten bir fonksiyon değildir. Çünkü $f^{-1}(10) = \emptyset$ dır.

$X = \{1,2,3,4\}$ ve $Y = \{2,4,6\}$ kümeleri ve $1 \to 2$; $2 \to 4$; $3 \to 6$; $4 \to 4$ şeklinde tanımlı f fonksiyonu verilsin. Bu fonksiyon örten olup birebir değildir.

$X = \{1,2,3,4\}$ ve $Y = \{2,4,6,8\}$ kümeleri ve $1 \to 4$; $2 \to 8$; $3 \to 6$; $4 \to 8$ şeklinde tanımlanan $f : X \to Y$ fonksiyonu hem birebir hem de örten bir fonksiyon değildir.

(6) $f : X \to Y$ bir fonksiyon ve E ile F, X in iki alt kümesi olsun.

a) $E \subset F \Rightarrow f(E) \subset f(F)$

b) $f(E \cup F) = f(E) \cup f(F)$

dir. Gösteriniz.

Çözüm: a) $E \subset F$ olsun. $\forall y \in f(E) = \{ f(x) \mid x \in E \}$ için $f(x) = y$ olacak şekilde en az bir $x \in E$ bulunur. Fakat, $E \subset F$ olduğundan $x \in F$ ise $y = f(x) \in f(F)$ olur. O halde $f(E) \subset f(F)$'dir.

b) (Ödev)

(7) Tam sayılar kümesinin sayılabilir olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$n \rightarrow \begin{cases} \frac{n}{2}, & n \text{ çift ise}, \\ -\frac{n-1}{2}, & n \text{ tek ise}, \end{cases}$$

şeklinde tanımlı $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ fonksiyonu birebir örten olduğundan, $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$ olur. Buradan, $\mathbb{Z}$ sayılabilirdir.

(8) Çift tam sayılar kümesinin sayılabilir olduğunu gösteriniz.

Çözüm: (ödev)

Reel Sayılar -

Tanım 21: Aşağıdaki dört takım aksiyomu gerçekleyen $\mathbb{R}$ kümesine reel (gerçel) sayılar kümesi, elemanlarına da reel (gerçel) sayılar denir.

1- Toplama Aksiyomları

Her $(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ için $(x,y) \to x+y \in \mathbb{R}$ şeklinde tanımlı $+ : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dönüşümü her $a,b,c \in \mathbb{R}$ için aşağıdaki özellikleri sağlar:

(i_+) $(a+b)+c = a+(b+c)$;

(ii_+) $a+b = b+a$;

(iii_+) $a+0 = 0+a = a$ olacak şekilde bir $0 \in \mathbb{R}$ elemanı vardır (0'a toplamaya göre etkisiz eleman denir)

(iv_+) $a+(-a)=(-a)+a=0$ olacak şekilde bir $-a\in\mathbb{R}$ elemanı vardır. ($-a$'ya a'nın toplamaya göre tersi denir)

Üzerinde i_+, ii_+, iii_+, iv_+ özelliklerini sağlayan $(X,+)$ ikilisine bir değişmeli toplamsal grup (veya Abel grubu) denir. O halde, $(\mathbb{R},+)$ bir değişmeli toplamsal gruptur.

2- Çarpma Aksiyomları

Her $(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ için $(x,y)\to x.y\in\mathbb{R}$ şeklinde tanımlı $\cdot:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dönüşümü her $a,b,c\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ için aşağıdaki özellikleri sağlar:

$(i_\cdot)$ $(a.b).c=a.(b.c)$;

$(ii_\cdot)$ $a.b=b.a$

$(iii_\cdot)$ $a.1=1.a=a$ olacak şekilde bir $1\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ elemanı vardır (1'e çarpmaya göre birim veya etkisiz eleman denir)

$(iv_\cdot)$ $a.a^{-1}=a^{-1}.a=1$ olacak şekilde bir $a^{-1}\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ elemanı vardır (a^{-1} elemanına a'nın çarpmaya göre tersi denir)

Üzerinde $i_\cdot$, $ii_\cdot$, $iii_\cdot$ ve $iv_\cdot$ özelliklerini sağlayan $(X,\cdot)$ ikilisine bir değişmeli çarpımsal grup denir. O halde, $(\mathbb{R},\cdot)$ bir değişmeli çarpımsal gruptur.

1,2 - Çarpma İşleminin Toplama İşlemi Üzerine Soldan ve Sağdan Dağılma Özellikleri

Her $a,b,c\in\mathbb{R}$ için $a.(b+c)=a.b+a.c$,

$(a+b).c = a.c + b.c$ dir.

Üzerinde 1-, 2-, ve 1,2- özelliklerini sağlayan $(X,+,.)$ üçlüsüne bir cisim denir. O halde $(\mathbb{R},+,.)$ üçlüsü bir cisimdir.

3- Sıralama Aksiyomları.

$\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı "$\leq$" bağıntısı herhangi $a,b,c \in \mathbb{R}$ için aşağıdaki özellikleri sağlar:

$(i_{\leq})$ $a \leq a$;

$(ii_{\leq})$ $a \leq b$ ve $b \leq a \Rightarrow a = b$;

$(iii_{\leq})$ $a \leq b$ ve $b \leq c \Rightarrow a \leq c$;

$(iv_{\leq})$ $a \leq b$ veya $b \leq a$;

Bu durumda, $\mathbb{R}$ tam (lineer) sıralanmış bir cisimdir.

1,3 - Toplama ve Sıralama İşlemleri Arasında Bağıntı

Her $a,b,c \in \mathbb{R}$ için $a \leq b \Rightarrow a+c \leq b+c$'dir.

2,3 - Çarpma ve Sıralama İşlemleri Arasında Bağıntı

Her $a,b,c \in \mathbb{R}$ için $(a \leq b)$ ve $(0 \leq c) \Rightarrow a.c \leq b.c$ dir.

4- Tamlık Aksiyomu

$\mathbb{R}$'nin boş olmayan A ve B alt kümeleri her $a \in A$ ve her $b \in B$ için $a \leq b$ eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda, her $a \in A$ ve her $b \in B$ için $a \leq c \leq b$ olacak şekilde bir $c \in \mathbb{R}$ elemanı vardır.

Belirtelim ki (1-4) aksiyomlar takımı reel sayıların bazı özelliklerini kapsamaktadır. Ek olarak reel sayıların aşağıdaki özellikleri de verilebilir.

1) $\mathbb{R}$'de toplamaya göre etkisiz (sıfır) eleman tektir.
2) $\mathbb{R}$'de her elemanın toplamsal tersi tektir.
3) Her $a, b \in \mathbb{R}$ için $x + a = b$ denkleminin tek bir $x = b + (-a) = b - a$ çözümü vardır.
4) $\mathbb{R}$'de birim (çarpmaya göre etkisiz) eleman tektir.
5) Her $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sayısının a^{-1} tersi tektir.
6) Her $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ve $b \in \mathbb{R}$ için $a . x = b$ denkleminin tek bir $x = b . a^{-1} = \frac{b}{a}$ çözümü vardır.

7) Her $a \in \mathbb{R}$ için $a . 0 = 0$ ($0 \to$ yutan eleman)
8) $a . b = 0 \Rightarrow a = 0$ veya $b = 0$
9) Her $a \in \mathbb{R}$ için $-a = (-1) . a$
10) Her $a \in \mathbb{R}$ için $(-1)(-a) = a$
11) Her $a \in \mathbb{R}$ için $(-a)(-a) = a . a$
12) Herhangi iki $a, b \in \mathbb{R}$ sayıları için, $a < b$, $a = b$ veya $b < a$ özelliklerinden biri ve yalnızca biri sağlanır.
($a < b$ yazılışını a küçük b ve $b > a$ yazılışını b büyük a diye okuyacağız)

13) Herhangi $a, b \in \mathbb{R}$ için

$$(a < b) \wedge (b \leq c) \Rightarrow a < c$$
$$(a \leq b) \wedge (b < c) \Rightarrow a < c \quad \text{dir.}$$

14) Herhangi $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ için

$$a<b \Rightarrow a+c < b+c$$
$$0<a \Rightarrow -a<0$$
$$(a\leq b) \wedge (c\leq d) \Rightarrow a+c \leq b+d$$
$$(a\leq b) \wedge (c<d) \Rightarrow a+c < b+d$$

15) $a,b,c \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$(0<a) \wedge (0<b) \Rightarrow 0\leq a.b$$
$$(a<0) \wedge (0<b) \Rightarrow a.b<0$$
$$(a<b) \wedge (c<0) \Rightarrow b.c < a.c$$
$$(a<0) \wedge (b<0) \Rightarrow 0<a.b$$
$$(a<b) \wedge (0<c) \Rightarrow a.c < b.c$$

16) $0<1$

17) $0<a \Rightarrow 0<a^{-1}$, $(0<a) \wedge (a<b) \Rightarrow (0<b^{-1}) \wedge (b^{-1}<a^{-1})$

$a>0$ eşitsizliğini sağlayan sayılara pozitif, $a<0$ eşitsizliğini sağlayan sayılara ise negatif sayılar denir, sırasıyla

$$\mathbb{R}_+ = \{x\in\mathbb{R} : x>0\} \text{ ve}$$

$$\mathbb{R}_- = \{x\in\mathbb{R} : x<0\}$$

ile gösterilir.

Tanım 22: Boş olmayan bir $X \subset \mathbb{R}$ alt kümesi verilsin.

(a) Her $x \in X$ için $x \leq b$ olacak biçimde bir $b \in \mathbb{R}$ sayısı varsa, X kümesine üstten sınırlıdır denir ve b sayısına da X kümesinin bir üst sınırı denir.

(b) Her $x \in X$ için $a \leq x$ olacak biçimde bir $a \in \mathbb{R}$ sayısı varsa, X kümesine alttan sınırlıdır denir ve a sayısına da X kümesinin bir alt sınırı denir.

(c) X hem alttan ve hem de üstten sınırlı ise (yani her $x \in X$ için $a \leq x \leq b$ olacak şekilde a ve b sayıları varsa) X'e sınırlı küme denir.

(d) Her $x \in X$ için $x \leq M$ olacak şekilde bir $M \in X$ elemanı varsa M'ye X kümesinin maksimal (veya en büyük) elemanı denir ve $M = \max\limits_{x \in X} \{x\}$ veya $M = \max\{x : x \in X\}$ şeklinde gösterilir.

(e) Her $x \in X$ için $m \leq x$ olacak şekilde bir $m \in X$ elemanı varsa m'ye X kümesinin minimal (veya en küçük) elemanı denir ve $m = \min\limits_{x \in X} \{x\}$ veya $m = \min\{x : x \in X\}$ şeklinde gösterilir.

Örneğin, $X = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$ kümesinin minimal ve maksimal elemanları yoktur. $Y = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 1\}$ kümesinin minimal ve maksimal elemanları vardır ve sırasıyla -1 ve 1'dir.

$X \subset \mathbb{R}$ alt kümesi üstten sınırlı olduğunda

$$B = \{b \in \mathbb{R} : b, X\text{'in üst sınırıdır}\}$$

kümesi boş değildir. Benzer şekilde alttan sınırlı olduğun da de $A = \{a \in \mathbb{R} : a, X'in \text{ alt sınırıdır}\}$ kümesi boş değildir.

Tanım 23:

(a) $X \subset \mathbb{R}$ alt kümesi üstten sınırlı ise

$B = \{b \in \mathbb{R} : b, X'in \text{ üst sınırıdır}\}$ kümesinin minimal elemanına X kümesinin en küçük üst sınırı denir ve $\sup X$ (veya ekü̈s X) ile gösterilir.

(b) $X \subset \mathbb{R}$ alt kümesi alttan sınırlı ise

$A = \{a \in \mathbb{R} : a, X'in \text{ alt sınırıdır}\}$ kümesinin maksimal elemanına X kümesinin en büyük alt sınırı denir ve $\operatorname{Inf} X$ (veya ebas X) ile gösterilir.

Böylece tanıma göre $\sup X = \min\{b \in \mathbb{R} : \forall x \in X, x \leq b\}$ ve

$$\operatorname{Inf} X = \max\{a \in \mathbb{R} : \forall x \in X, a \leq x\}$$

dir.

Anlaşıldığı üzere $\mathbb{R}$'nin boş olmayan ve üstten (alttan) sınırlı her alt kümesinin maksimal (minimal) elemanı olmaya bilir. Bununla ilgili aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz.

Teorem 2: (Üst sınır prensibi)

$\mathbb{R}$'nin boş olmayan ve üstten sınırlı her alt kümesinin bir tek en küçük üst sınırı (supremumu) vardır. (Buna sup özelliği denir).