Tanım 75- Boş olmayan $X \subset \mathbb{R}$ kümesi, $f: X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ve $a \in X$ noktası için $f(a^-) = \lim_{x \to a^-} f(x)$ ve $f(a^+) = \lim_{x \to a^+} f(x)$ limitleri mevcut olsun. Eğer,

$f(a^-) = f(a)$ $\quad (f(a^+) = f(a))$ ise, f fonksiyonu X kümesi üzerinde a noktasında soldan (sağdan) süreklidir denir.

Örneğin; $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = [\![x]\!]$ fonksiyonu $\forall x \in \mathbb{Z}$ noktalarında sağdan sürekli olup, soldan süreksizdir. Çünkü, $x \in \mathbb{Z}$ için $f(x) = x$, $f(x^+) = x$ ve

$f(x^-) = x - 1 \neq f(x)$'dir.

* **NOT:** $f: X \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun X kümesi üzerinde a noktasında sürekli olması için gerek ve yeter koşul f'nin X kümesi üzerinde a noktasında soldan ve sağdan sürekli, yani $f(a^-) = f(a) = f(a^+)$ olmasıdır.

Tanım 76- Boş olmayan $X \subset \mathbb{R}$ kümesi, $f: X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ve $a, b \in X$ noktaları verilsin. a ve b noktaları sırasıyla X kümesinin sol ve sağ uç noktaları olsun. Eğer $f(a^+) = f(a)$ ise f fonksiyonu a uç noktasında süreklidir ve $f(b^-) = f(b)$ ise f fonksiyonu b uç noktasında süreklidir denir.

Örneğin; $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ fonksiyonunun tanım kümesi $D(f) = [-2, 2]$'dir.

$$\lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{x \to -2^+} \sqrt{4 - x^2} = 0 = f(-2)$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} \sqrt{4-x^2} = 0 = f(2)$$

dır. Dolayısıyla $f(x)$ sol ve sağ uç noktaları olan -2 ve 2'de süreklidir. Bu fonksiyon aynı zamanda tanım kümesinde sürekli bir fonksiyondur.

- Tüm polinomlar, tüm rasyonel fonksiyonlar, tüm rasyonel üsler $x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m}$, sinüs, kosinüs, tanjant, kotanjant, sekant, kosekant fonksiyonları, $|x|$ mutlak değer fonksiyonu tanımlı oldukları yerlerde sürekli olan fonksiyonlardır.

- Ayrıca f ve g fonksiyonları a noktasını içeren bir aralık üzerinde tanımlı ve a noktasında sürekli ise o zaman $f+g$, $f-g$, $f.g$, $k.f$ $(k \in \mathbb{R})$, f/g ($g(c) \neq 0$ olmak koşuluyla), $\sqrt[n]{f}$ (n çift ise $f(c) > 0$ olmak koşuluyla) de a noktasında süreklidirler.

Tanım 77. $f: X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu X kümesi üzerinde $a \in X$ noktasında süreksiz olsun. Eğer, f'nin X kümesine göre a da $f(a^-)$ ve $f(a^+)$ sonlu limitleri mevcut ve $f(a^-) \neq f(a)$ veya $f(a^+) \neq f(a)$ ise, a noktasına f'nin X kümesine göre birinci çeşit süreksizlik noktası adı verilir. Aksi taktirde, yani $f(a^-)$ ve $f(a^+)$ limitlerinden hiç değilse, birisi mevcut değilse veya $f(a^-) = +\infty$ veya $f(a^-) = -\infty$ (ya da $f(a^+) = \infty$ veya $f(a^+) = -\infty$ ise), a noktasına f'nin X kümesine göre ikinci çeşit süreksizlik noktası adı verilir.

Eğer, $f(a^-) = f(a^+) \neq f(a)$ ise a noktasına f'nin X kümesine göre kaldırılabilir süreksizlik noktası denir.

Eğer, $f(a^-) \neq f(a^+)$ ise f, a noktasında sıçrayışa sahiptir denir ve a noktasına f'nin X kümesine göre sıçramalı süreksizlik noktası denir.

Ör/ $g(x) = \begin{cases} x & x \neq 2 \\ 1 & x = 2 \end{cases}$ fonksiyonu $x=2$'de kaldırılabilir süreksizliğe sahiptir. Çünkü

$$f(2^-) = f(2^+) = 2 \neq 1 = f(2) \text{ 'dir.}$$

Ör/ $f(x) = \begin{cases} -1/x^2 & x < -1 \\ 1-x^2 & -1 \leq x \leq 1 \\ 1/x^2 & x > 1 \end{cases}$

$f(-1^-) = -1 \neq f(-1^+) = 0 \Rightarrow$ 1. çeşit süreksiz (sıçramalı süreksiz)

$f(1^-) = 0 \neq f(1^+) = 1 \Rightarrow$ 1. çeşit süreksiz (sıçramalı süreksiz)

Teorem 29.

$X, Y \subset \mathbb{R}$, $f: X \to Y$ fonksiyonu X kümesine göre $a \in X$ noktasında, $g: Y \to \mathbb{R}$ fonksiyonu Y kümesine göre $b = f(a)$ noktasında sürekli ise, $g \circ f: X \to \mathbb{R}$, $(g \circ f)(x) = g[f(x)]$ bileşke fonksiyonu X kümesine göre a noktasında süreklidir.

Süreklilik ile ilgili tanımlar, teoremler ve elementer fonksiyonların limitlerine göre aşağıdaki özelliklerin doğru olduğu anlaşılır.

1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = c$ sabit fonksiyonu $\mathbb{R}$'de süreklidir.

2) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ $\mathbb{R}$ üzerinde süreklidir.

3) $n \geq 0$ bir tamsayı ve $a_0, a_1, \ldots, a_n$ ler birer reel sayı olmak üzere n. dereceden

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$$

cebirsel polinomu $\mathbb{R}$'de süreklidir.

4) Tüm rasyonel fonksiyonlar tanımlı oldukları yerde süreklidirler.

5) $\sin x$ ve $\cos x$ fonksiyonları $\mathbb{R}$ üzerinde süreklidir.

6) $\tan x$, $X = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$ üzerinde
$\cot x$, $X = \mathbb{R} \setminus \{ k\pi : k \in \mathbb{Z} \}$ üzerinde süreklidir.

7) $a > 0$, $a \neq 1$ için $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ $f(x) = a^x$ $\mathbb{R}$ üzerinde süreklidir.

8) $a > 0$, $a \neq 1$ için $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ $f(x) = \log_a x$ $\mathbb{R}_+$ üzerinde süreklidir.

9) $f: [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $f(x) = \arcsin x$ $[-1, 1]$'de

$f: [-1, 1] \to [0, \pi]$, $f(x) = \arccos x$ $[-1, 1]$'de

$f: \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $f(x) = \arctan x$ $\mathbb{R}$'de

$f: \mathbb{R} \to (0, \pi)$, $f(x) = \text{arccot}\, x$ $\mathbb{R}$'de süreklidir.

10) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sinh x$ $\mathbb{R}$'de

$f: \mathbb{R} \to [1, \infty)$, $f(x) = \cosh x$ $\mathbb{R}$'de

$f: \mathbb{R} \to (-1, 1)$, $f(x) = \tanh x$ $\mathbb{R}$'de

$f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$, $f(x) = \coth x$, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ üzerinde süreklidir.

11) Sonlu sayıda sürekli fonksiyonun bileşkesi yardımıyla elde edilen her fonksiyon tanım bölgesi üzerinde sürekli bir fonksiyondur.

12) $\alpha \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $f(x) = x^{\alpha}$ kuvvet fonksiyonu $\mathbb{R}_+$ üzerinde süreklidir.

Teorem 30. (Bolzano – Cauchy Teoremi)

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli ve $f(a)$ ile $f(b)$ ters işaretli (yani $f(a) \cdot f(b) < 0$) ise, $f(c) = 0$ olacak şekilde en az bir $c \in (a,b)$ noktası vardır.

Teorem 31. (Ara Değer Teoremi)

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli, $f(a) = A$, $f(b) = B$ ve $A \neq B$ olsun. Bu durumda, A ile B arasındaki her C sayısı (yani her $\min(A,B) < C < \max(A,B)$ sayısı) için $f(c) = C$ olacak şekilde en az bir $c \in (a,b)$ noktası vardır.

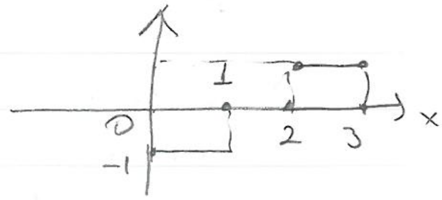
İspat. $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = f(x) - C$ fonksiyonunu göz önüne alalım. $A < B$ olsun. ($B < A$ durumunda ispat benzer şekilde yapılır). φ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli ve $\varphi(a) = f(a) - C = A - C < 0$, $\varphi(b) = f(b) - C = B - C > 0$ olduğuna göre Teorem 30 gereğince $\varphi(c) = 0$ yani $f(c) = C$ olacak şekilde en az bir $c \in (a,b)$ noktası vardır. □

NOT. Teorem 30 ve Teorem 31'in hipotezindeki şartların kaldırılamayacağını gösteren bazı örnekler verelim.

1) $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ $f(x) = [\![x]\!] - \frac{1}{3}$ $[0,1]$ aralığında süreksizdir.

$f(0) = -\frac{1}{3} < 0$ ve $f(1) = \frac{2}{3} > 0$ olmasına rağmen $f(c) = 0$ eşitliğini sağlayan bir $c \in [0,1]$ noktası yoktur.

2) $f : [0,1] \cup [2,3] \to \mathbb{R}$



$$f(x) = \begin{cases} -1, & x \in [0,1] \text{ ise} \\ 1, & x \in [2,3] \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonu $D = [0,1] \cup [2,3]$ üzerinde sürekli,

$f(0) = -1 < 0$, $f(3) = 1 > 0$ olmasına rağmen $f(c) = 0$ olacak şekilde bir $c \in D$ noktası yoktur.

3) $x^3 - x - 1 = 0$ denkleminin $[1,2]$ aralığında bir kökünü olduğunu gösteriniz.

Çözüm. $f(x) = x^3 - x - 1$ bir polinomdur, dolayısıyla her yerde süreklidir. $f(1) = -1$, $f(2) = 5$ dir. 0, -1 ile 5 arasında olduğundan Ara Değer teoremine göre $f(c) = 0$ o.ş. $c \in [1,2]$ sayısı vardır.

Teorem 32 (Weierstrass 1)

Kapalı ve sınırlı aralık üzerinde sürekli her fonksiyon bu aralık üzerinde sınırlıdır.

Teorem 33 - (Weierstras 2)

Kapalı ve sınırlı aralık üzerinde sürekli her fonksiyon bu aralıkta en küçük ve en büyük değerine ulaşır.

Teorem 32 ve Teorem 33'teki şartların kaldırılamayacağını gösteren bazı örnekler verelim.

1) $f:(0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x)=x$ fonksiyonu $(0,1)$ aralığında süreklidir fakat $(0,1)$ üzerinde $M=\sup\{x : x\in(0,1)\}=1$ $m=\inf\{x : x\in(0,1)\}=0$ değerlerine ulaşamaz çünkü $\forall x\in(0,1)$ için $0<f(x)<1$'dir. Bunun sebebi tanım kümesinin kapalı bir aralık olmayışıdır.

2) $f:[-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

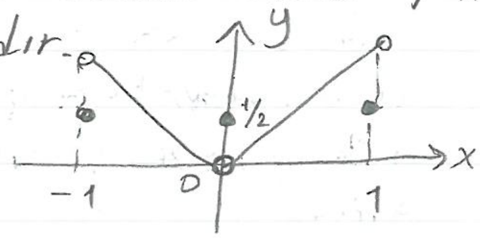
$$f(x)=\begin{cases} |x| , & x\in(-1,0)\cup(0,1) \text{ ise;} \\ \frac{1}{2} & x=0 \text{ veya } x=\mp 1 \text{ ise.} \end{cases}$$

fonksiyonu $[-1,1]$ aralığında sürekli değildir.

$$m=\inf\{\,|x| : x\in[-1,1]\}=0$$

$$M=\sup\{|x| : x\in[-1,1]\}=1$$

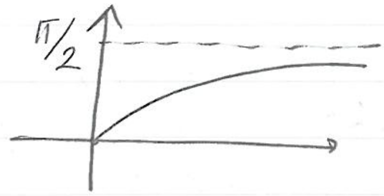
olup $\forall x\in[-1,1]$ için $f(x)\neq 0$ ve $f(x)\neq 1$'dir. Dolayısıyla fonksiyon $[-1,1]$ aralığında en küçük ve en büyük değerlerine ulaşamaz. Bunun sebebi f'nin sürekli bir fonksiyon olmayışıdır.



3) $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\arctan x$ fonksiyonu $[0,\infty)$ aralığında sürekli olduğu halde bu aralıkta en büyük değere sahip değildir. Çünkü $\forall x\in[0,\infty)$ için

$$\arctan x \leq \frac{\pi}{2} = \sup\{\arctan x : x\in[0,\infty)\}$$

dur. Bunun sebebi, f'in tanım kümesinin sınırlı olmayışıdır.



✱ Önerme.

$X\subset\mathbb{R}$ kümesi üzerinde artan (azalan) bir $f: X\to\mathbb{R}$ fonksiyonunun $Y=f(X)$ kümesi üzerinde artan (azalan) $f^{-1}: Y\to\mathbb{R}$ tersi vardır.

Teorem 34. (Ters fonksiyonun sürekliliği)

1) $X=[a,b]$ ve $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde sürekli ise $Y=f([a,b])=[f(a),f(b)]$ $(Y=f([a,b])=[f(b),f(a)])$ olup f^{-1} fonksiyonu $[f(a),f(b)]$ $([f(b),f(a)])$ aralığı üzerinde süreklidir.

2) $X=(a,b)$ ve $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ fonksiyonu (a,b) üzerinde sürekli ise $Y=f((a,b))=(f(a^+),f(b^-))$
$(Y=f((a,b))=(f(b^-),f(a^+)))$ olup f^{-1} fonksiyonu $(f(a^+),f(b^-))$ $(f(b^-),f(a^+))$ aralığı üzerinde süreklidir.

ÖRNEKLER.

1) $y=f(x)=\sin x:[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\to[-1,1]$ fonksiyonu $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

üzerinde sürekli ve artan olduğuna göre

$[\sin(-\frac{\pi}{2}),\sin(\frac{\pi}{2})]=[-1,1]$ üzerinde sürekli ve

artan $x=f^{-1}(y)=\arcsin y:[-1,1]\to[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ tersi vardır.

2) $a>0$ ve $a\neq 1$ için $y=f(x)=a^x:\mathbb{R}\to(0,\infty)$ fonksiyonu $\mathbb{R}$'de sürekli ve $a>1$ iken artan ve $0<a<1$ iken azalan olduğuna göre $(0,\infty)$ üzerinde sürekli ve $a>1$ iken artan ve $0<a<1$ iken azalan $x=f^{-1}(y)=\log_a y:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ tersi vardır.

$(\log_a 0=-\infty \quad \log_a\infty=\infty)$

3) $\forall n\in\mathbb{N}$ için $y=f(x)=x^n:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ fonksiyonu $[0,+\infty)$ üzerinde sürekli ve artan olduğuna göre $[0,+\infty)$ üzerinde sürekli ve artan
$x=f^{-1}(y)=y^{1/n}:[0,\infty)\to[0,\infty)$ tersi vardır.

Bir $f:X\to\mathbb{R}$ fonksiyonunun bir $a\in X$ noktasında sürekli olması tanımına göre verilen $\varepsilon>0$ sayısına karşılık bulunan $\delta>0$ sayısı genel olarak hem ε sayısına hem de a noktasına bağlıdır.

Eğer $f: X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $a \in X$ noktasında sürekli ve verilen $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık bulunan $\delta > 0$ sayısı a noktasından bağımsız olup yalnızca $\varepsilon > 0$ sayısına bağlı ise, f fonksiyonu X üzerinde düzgün süreklilik özelliğine sahiptir denir.

Tanım 78 $X \subset \mathbb{R}$, $f: X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer, $\forall \varepsilon > 0$ sayısı ve $\forall x_1, x_2 \in X$ noktaları için

$$|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

olacak şekilde yalnızca ε'na bağlı bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa, f fonksiyonu X üzerinde düzgün süreklidir denir.

– $f: X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu X üzerinde düzgün süreklidir

$\iff \forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ öyle ki $\forall x_1, x_2 \in X$ için

$$|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon \text{ 'dur.}$$

– $f: X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu X üzerinde düzgün sürekli değildir

$\iff \exists \varepsilon > 0$ öyle ki $\forall \delta > 0$ için $\exists x_1, x_2 \in X$ öyle ki

$$|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| \geq \varepsilon \text{ dur.}$$

Eğer $f: X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu X üzerinde düzgün sürekli ise süreklidir. Gerçekten, Tanım 78'de $x_1 = x$, $x_2 = a$ alınırsa Tanım 72'nin elde edileceği görülür. Ancak sürekli bir fonksiyon düzgün sürekli olmayabilir.

ÖRNEKLER -

1) $f:(0,1)\to \mathbb{R}_+$, $f(x)=\frac{1}{x}$ fonksiyonu $(0,1)$ üzerinde sürekli, fakat düzgün sürekli değildir.

Gerçekten, $\varepsilon=\frac{1}{2}$ ve $\forall \delta>0$ sayısı için $n_0 \geq \frac{1}{\sqrt{\delta}}+1$ bir tamsayı olmak üzere $(0,1)$ aralığının $x_1=\frac{1}{n_0}$ ve $x_2=\frac{1}{n_0+1}$ noktaları için

$\frac{\sqrt{\delta}+1}{\sqrt{\delta}}$

$$|x_1-x_2|=\frac{1}{n_0(n_0+1)}<\frac{1}{n_0^2}\leq\frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{\delta}}+1\right)^2}<\delta$$

olmasına rağmen

$$|f(x_1)-f(x_2)|=\left|\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right|=|n_0-(n_0+1)|=1>\varepsilon$$

olur. Bu da $f(x)=\frac{1}{x}$ fonksiyonunun $(0,1)$ üzerinde düzgün sürekli olmadığını gösterir.

2) $f:(0,1)\to(-\infty,0)$, $f(x)=\ln x$ fonksiyonu $(0,1)$ üzerinde sürekli, fakat düzgün sürekli değildir.

Gerçekten, $\varepsilon=\frac{1}{2}\ln 2$ ve $\forall\delta>0$ sayısı için $n_0>\frac{1}{2\delta}$ bir tamsayı olmak üzere $(0,1)$ aralığının $x_1=\frac{1}{n_0}$ ve $x_2=\frac{1}{2n_0}$ noktaları için

$$|x_1-x_2|=\left|\frac{1}{n_0}-\frac{1}{2n_0}\right|=\frac{1}{2n_0}<\delta$$

olmasına rağmen

$$|f(x_1)-f(x_2)| = \left|\ln\frac{1}{n_0} - \ln\frac{1}{2n_0}\right| = |\ln 2| = \ln 2 > \varepsilon$$

olur. Bu da $f(x)=\ln x$ fonksiyonunun $(0,1)$ üzerinde düzgün sürekli olmadığını gösterir.

3) $f: \mathbb{R} \to [-1,1]$, $f(x)=\sin x$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde düzgün süreklidir.

Gerçekten, $\forall \varepsilon>0$ için $\delta=\varepsilon$ dersek $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ için

$$|x_1-x_2|<\delta \Rightarrow |f(x_1)-f(x_2)| = |\sin x_1 - \sin x_2|$$

$$= \left|2\sin\frac{x_1-x_2}{2}\cos\frac{x_1+x_2}{2}\right|$$

$$= 2\left|\sin\frac{x_1-x_2}{2}\right|\left|\cos\frac{x_1+x_2}{2}\right|$$

$$\leq 2\,\frac{|x_1-x_2|}{2}\cdot 1$$

$$= |x_1-x_2| < \delta = \varepsilon$$

olduğundan $f(x)=\sin x$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde düzgün süreklidir.

NOT: 1. ve 2. örneklerdeki fonksiyonların tanım bölgelerinin $\mathbb{R}$'de kapalı ve sınırlı (veya bir başka deyişle $\mathbb{R}$'de kompakt) bir küme olmadığına dikkat ediniz.

Teorem 35 (Düzgün süreklilik üzerine Cantor Teoremi)

$\mathbb{R}$'nin kompakt (kapalı ve sınırlı) alt kümesi üzerinde her fonksiyon bu küme üzerinde düzgün süreklidir.

Tanım 79. $X \subset \mathbb{R}$ alt kümesinde tanımlı $f: X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilmiş olsun. f'nin X'deki birinci çeşit süreksizlik noktalarının sayısı sonlu ise, f fonksiyonu X üzerinde parçalı süreklidir denir.

Örneğin, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = [\![x]\!]$ fonksiyonu $b-a \geq 1$ olmak üzere her bir $[a,b]$ aralığında parçalı sürekl lidir.

Çözümlü Problemler.

1) ε-δ tanımıyla aşağıdaki fonksiyonların $\mathbb{R}$ üzerinde sürekli olduklarını gösteriniz.

a) $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ b) $f(x) = \cos(3x+2)$

Çözüm. a) Herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısı ve $x_0 \in \mathbb{R}$ noktası verilsin. $x \in \mathbb{R}$ için $|x - x_0| < \delta < 1$ olduğunda

$$|f(x) - f(x_0)| = |3(x^2 - x_0^2) - 2(x - x_0)|$$
$$\leq [3|x + x_0| + 2]\,|x - x_0|$$

$$|x - x_0| < 1 \Rightarrow |x + x_0| \leq |x| + |x_0| \leq |x - x_0| + 2|x_0|$$
$$< 1 + 2|x_0|$$

$$\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq [5 + 6|x_0|]\,|x - x_0|$$
$$\leq [5 + 6|x_0|]\,\delta < \varepsilon$$

olur. Dolayısıyla $\delta < \dfrac{\varepsilon}{5 + 6|x_0|}$ bulunur.

Burada, $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{5+6|x_0|}\right\}$ seçimi yapıldığında $\forall x \in \mathbb{R}$ için $|x-x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ olduğu, yani f'in x_0 noktasında sürekli olduğu anlaşılır. $x_0 \in \mathbb{R}$ keyfi olduğundan bu fonksiyon $\mathbb{R}$'nin tamamında süreklidir.

b) Herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısı ve $x_0 \in \mathbb{R}$ noktası verilsin. $x \in \mathbb{R}$ için $|x - x_0| < \delta$ olduğunda

$$|\cos(3x+2) - \cos(3x_0+2)| = \left|-2\sin\frac{3(x-x_0)}{2}\sin\frac{3(x_0+x)+4}{2}\right|$$

$$\left|\sin\frac{3(x-x_0)}{2}\right| \leq \frac{3}{2}|x-x_0|$$

$$\left|\sin\frac{3(x+x_0)+4}{2}\right| \leq 1$$

$$|\cos(3x+2) - \cos(3x_0+2)| \leq 2 \cdot \frac{3}{2}|x-x_0| = 3|x-x_0| < 3\delta$$

dır. $3\delta < \varepsilon$ dan $\delta < \frac{\varepsilon}{3}$ bulunur. Burada, $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{3}\right\}$ seçimi yapıldığında $\forall x \in \mathbb{R}$ için $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |\cos(3x+2) - \cos(3x_0+2)| < \varepsilon$ olduğu, yani $\cos(3x+2)$ fonksiyonunun x_0 noktasında sürekli olduğu anlaşılır. $x_0 \in \mathbb{R}$ keyfi olduğundan bu fonksiyon $\mathbb{R}$'nin tamamında süreklidir.

2) Aşağıdaki eşitliklerle tanımlanan $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonlarının süreklilik durumunu inceleyiniz.

a) $f(x)=x^2+\operatorname{sgn}(x^2-1)$

b) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-1}{x^2-1}, & x\neq 1 \text{ ise}\\ 4, & x=1 \text{ ise}\end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases}\cos x, & -\frac{\pi}{2}\le x<\frac{\pi}{4} \text{ ise},\\ 1, & x=\frac{\pi}{4} \text{ ise},\\ x^2-\frac{\pi^2}{16}, & \frac{\pi}{4}<x\le\pi \text{ ise};\end{cases}$

Çözüm.

a) $f(\mp 1)=1$ olduğu açıktır. $|x|>1$ için $f(x)=x^2+1$

$\Rightarrow f(1^+)=\lim\limits_{x\to 1^+}(x^2+1)=2,$

$f(-1^-)=\lim\limits_{x\to -1^-}(x^2+1)=2$ ve

$|x|<1$ için $f(x)=x^2-1 \Rightarrow f(1^-)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x^2-1)=0$

$f(-1^+)=\lim\limits_{x\to -1^+}(x^2-1)=0$

bulunur. $f(-1^-)=2\neq 1=f(-1)=f(-1^+)$ ve

$f(1^-)=0\neq f(0)\neq f(1^+)$

olduğuna göre $x=\mp 1$ noktaları fonksiyonun birinci çeşit süreksizlik noktalarıdır.

$x=\mp 1$'de sıçramalı süreksizdir.

b) $x^3-1,\ x^2-1 \in C(\mathbb{R})$ ve $x \neq 1$ için $x^2-1 \neq 0$ olduğuna göre,

$$\frac{x^3-1}{x^2-1} \in C(\mathbb{R}\setminus\{1\}) \text{'dir. } \forall x \neq 1 \text{ için}$$

$$f(x) = \frac{x^3-1}{x^2-1} = \frac{x^2+x+1}{x+1} \text{ olduğuna göre}$$

$$f(1^-) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2+x+1}{x+1} = \frac{3}{2},\quad f(1^+) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2+x+1}{x+1} = \frac{3}{2}$$

bulunur. $f(1^-) = f(1^+) = \frac{3}{2} \neq 4 = f(1)$ olduğundan $x=1$ noktası fonksiyonun kaldırılabilir süreksizlik noktasıdır.

c) $f \in C([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}] \cup (\frac{\pi}{4}, \pi])$ olduğu açıktır.

$$f(\tfrac{\pi}{4}) = 1,\quad f(\tfrac{\pi}{4}^-) = \lim_{x\to \frac{\pi}{4}^-} \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$f(\tfrac{\pi}{4}^+) = \lim_{x\to \frac{\pi}{4}^+} \left(x^2 - \frac{\pi^2}{16}\right) = 0$$

ve

$$f(\tfrac{\pi}{4}^-) = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 1 = f(\tfrac{\pi}{4}) \neq f(\tfrac{\pi}{4}^+) = 0$$

olduğundan $x = \frac{\pi}{4}$ noktası birinci çeşit süreksizlik ve aynı zamanda sıçramalı süreksizlik noktasıdır.

3) Aşağıdaki eşitlikler ile tanımlanan fonksiyonlar $\mathbb{R}$'nin hangi noktalarında süreksizdir? Süreksizlik çeşidini belirleyiniz.

a) $$f(x) = \begin{cases} x^2, & x<0 \text{ ise} \\ 1, & x=0 \text{ ise} \\ 1+\tan x, & x>0 \text{ ise} \end{cases}$$

b) $$f(x) = \frac{|x-1|}{x-1}$$

c) $$f(x) = \frac{\arcsin x}{\sin 2x}$$

d) $$f(x) = \frac{3^{\frac{1}{x}} + 2^{\frac{1}{x}}}{3^{\frac{1}{x}} - 2^{\frac{1}{x}}}$$

Çözüm - a) $$x^2 \in C(-\infty, 0)$$

$$\tan x \in C\left(\mathbb{R}_+ \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + n\pi : n = 0,1,2,\dots\right\}\right)$$

olduğuna göre,

$$f(x) \in C(-\infty,0) \cup C\left(\mathbb{R}_+ \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + n\pi : n = 0,1,2,\dots\right\}\right)$$

dır.

$$f(0) = 1, \quad f(0^-) = \lim_{x\to 0^-} x^2 = 0, \quad f(0^+) = \lim_{x \to 0^+} 1 + \tan x = 1$$

dir.

$$f(0^-) = 0 \neq 1 = f(0) = f(0^+)$$

olduğuna göre $x=0$ noktası fonksiyonun birinci çeşit süreksizlik noktasıdır.

$$f\left(\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)^-\right) = \lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)^-} 1+\tan x = \infty$$

$$f\left(\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)^+\right) = \lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)^+} 1+\tan x = -\infty$$

olduğundan $x=\frac{\pi}{2}+n\pi$ $(n=0,1,\ldots)$ noktaları fonksiyonun ikinci çeşit süreksizlik noktalarıdır.

b) $f\in C(\mathbb{R}\setminus\{1\})$ olduğu açıktır.

$$f(1^-) = \lim_{x\to 1^-}\frac{|x-1|}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{1-x}{x-1} = -1,$$

$$f(1^+) = \lim_{x\to 1^+}\frac{|x-1|}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{x-1} = 1,$$

ve $f(1^-)\neq f(1^+)$ olduğundan, $x=1$ noktası fonksiyonun birinci çeşit süreksizlik noktasıdır.
(sıçramalı süreksiz)

c) $\arcsin x\in C([-1,1])$, $\sin 2x\in C(\mathbb{R})$ ve $\forall x\in[-1,1]\setminus\{0\}$ için $\sin 2x\neq 0$ olduğuna göre, $f\in[-1,1]\setminus\{0\}$ olur. $x\to 0$ iken $\arcsin x\sim x$ ve $\sin 2x\sim 2x$ olduğuna göre

$$f(0^-) = \lim_{x\to 0^-}\frac{\arcsin x}{\sin 2x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$$

ve benzer şekilde

$$f(0^+) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\arcsin x}{\sin 2x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$$

dir.

$f(0^-) = f(0^+)$ olduğuna göre $x=0$ noktası fonksiyonun kaldırılabilir süreksizlik noktasıdır. $f(0) = \frac{1}{2}$ tanımıyla $f \in C(\mathbb{R})$ olur.

d) $\frac{1}{x}, 3^{1/x}, 2^{1/x} \in C(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ olduğuna göre $f \in C(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ dır.

$$f(0^-) = \lim_{x \to 0^-} \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{1/x} + 1}{\left(\frac{3}{2}\right)^{1/x} - 1} = -1$$

$$f(0^+) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^{1/x}}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{1/x}} = 1$$

bulunur. $f(0^-) \neq f(0^+)$ olduğuna göre $x=0$ noktası fonksiyonun birinci çeşit süreksizlik noktasıdır.

4) Aşağıdaki fonksiyonların sürekli olması için a ne olmalıdır?

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 9}{x+3} & x \neq -3 \text{ ise,} \\ a & x = 3 \text{ ise.} \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sinh x}{x} & x \neq 0 \text{ ise,} \\ a & x = 0 \text{ ise} \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\ln(1+2x)} & x \neq 0 \text{ ise,} \\ a & x = 0 \text{ ise.} \end{cases}$

Çözüm-

a) $\lim\limits_{x\to -3} f(x) = \lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^2-9}{x+3} = \lim\limits_{x\to -3} \dfrac{(x-3)(x+3)}{x+3}$

$= \lim\limits_{x\to -3} (x-3) = -6$

olduğuna göre, fonksiyonun $x=-3$ noktasında sürekli olması için $a=-6$ olmalıdır.

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sinh x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{2x}$

$= \dfrac{1}{2} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1 - (e^{-x}-1)}{x} =$

$= \dfrac{1}{2} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x + o(x) - [-x + o(-x)]}{x}$

$= \dfrac{1}{2} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x + o(x) - o(-x)}{x}$

$= \dfrac{1}{2} \left[\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} + \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{-x}-1}{-x} \right]$

$= \dfrac{1}{2}(1+1)$

$= 1$

olduğuna göre, fonksiyonun sürekli olması için $a=1$ olmalıdır.

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\ln(1+2x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{2\ln(1+2x)^{1/2x}} = \dfrac{1}{2} \dfrac{1}{\ln e} = \dfrac{1}{2}$

olduğuna göre, fonksiyonun $x=0$ noktasında sürekli olması için $a=\frac{1}{2}$ olmalıdır.

5) $$f(x) = \begin{cases} (x-1)^3, & x \leq 0 \text{ ise}, \\ ax+b, & 0 < x < 1 \text{ ise}, \\ \sqrt{x}, & x \geq 1 \text{ ise}, \end{cases}$$

fonksiyonunun $\mathbb{R}$ üzerinde sürekli olması için a ve b ne olmalıdır.

Çözüm-

$$f(0^-) = \lim_{x\to 0^-} (x-1)^3 = -1, \quad f(0) = (0-1)^3 = -1$$

$$f(0^+) = \lim_{x\to 0^+} (ax+b) = b, \quad f(1) = \sqrt{1} = 1$$

$$f(1^-) = \lim_{x\to 1^-} (ax+b) = a+b, \quad f(1^+) = \lim_{x\to 1} \sqrt{1} = 1$$

dir. Fonksiyonun 0 ve 1 noktalarında sürekli olması için sırasıyla $f(0^-) = f(0) = f(0^+)$ veya $b=-1$ ve $f(1^-) = f(1) = f(1^+)$ veya $a+b=1$ olmalıdır. Buna göre, $f \in C(\mathbb{R})$ olması için $a=2, b=-1$ olmalıdır.

6) $f(x) = 1 - |x-1|$ ve $g(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \text{ ise} \\ 2-x, & x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \text{ ise} \end{cases}$

fonksiyonları için $(f\circ g)$ ve $(g\circ f)$ bileşke fonksiyonlarının süreklilik durumunu inceleyiniz.

Çözüm- $x \in \mathbb{Q}$ için $f[g(x)] = 1 - |x-1|$ ve $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ için $f[g(x)] = 1 - |1-x|$ olduğuna göre, $\forall x \in \mathbb{R}$ için

$$f[g(x)] = 1 - |x-1| \text{'dir.}$$

Benzer şekilde

$$(g\circ f)(x) = g[f(x)] = \begin{cases} 1-|x-1| & x\in\mathbb{Q} \text{ ise} \\ 1+|x-1| & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \text{ ise} \end{cases}$$

olduğu bulunur. Demek ki $f\circ g \in C(\mathbb{R})$ ve $g\circ f$ fonksiyonu $x=1$ noktasında sürekli olup herhangi bir $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$ noktasında süreksizdir.

7) Aşağıdaki fonksiyonların karşılarında yazılı kümeler üzerinde düzgün sürekli olup olmadığını inceleyiniz.

a) $f(x)=e^{x}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$, $X=(0,1)$

b) $f(x)=\sqrt{x^2}\ln x$, $X=(0,1)$

c) $f(x)=x\sin x$, $X=[0,\infty)$

Çözüm.

a) $\varepsilon=2$ ve herhangi $\delta>0$ sayısı verilmiş olsun. $(0,1)$ içinde terimleri $x_n'=\frac{1}{2n\pi}$, $x_n''=\frac{1}{(2n+1)\pi}$, $n\in\mathbb{N}$ şeklinde tanımlanan (x_n') ve (x_n'') dizileri için

$$\lim_{n\to\infty}|x_n'-x_n''| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n(2n+1)\pi}=0$$

olduğuna göre $\exists n_0=n_0(\delta)\in\mathbb{N}$ öyle ki $\forall n\geq n_0$ için $|x_n'-x_n''|<\delta$ fakat

$$|f(x_n')-f(x_n'')| = e^{\frac{1}{2n\pi}}+e^{\frac{1}{(2n+1)\pi}} > 2 = \varepsilon$$

olur. Demek ki, fonksiyon $(0,1)$ üzerinde düzgün sürekli değildir.

b) $$F(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2}\ln x, & x\in(0,1) \text{ ise}\\ 0, & x=0 \text{ ve } x=1 \text{ ise}\end{cases}$$

biçiminde tanımlanan $F:[0,1]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $[0,1]$ üzerinde sürekli olduğundan dolayı Cantor teoremi gereğince $[0,1]$ üzerinde hem de düzgün süreklidir. Bu nedenle $(F|_{(0,1)})(x)=f(x)$ fonksiyonu $(0,1)$ üzerinde düzgün süreklidir.

c) $[0,\infty)$ içinde terimleri $x_n'=n\pi$, $x_n''=n\pi+\frac{1}{n}$, $n\in\mathbb{N}$

şeklinde tanımlanan x_n' ve x_n'' dizileri için

$$\lim_{n\to\infty}|x_n'-x_n''|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

dır.

$$|f(x_n')-f(x_n'')|=\left(n\pi+\frac{1}{n}\right)\left|\sin\left(n\pi+\frac{1}{n}\right)\right|$$

$$=\left(n\pi+\frac{1}{n}\right)\sin\frac{1}{n}$$

olduğuna göre

$$\lim_{n\to\infty}|f(x_n')-f(x_n'')|=\lim_{n\to\infty}\left(\pi+\frac{1}{n^2}\right)\frac{\sin 1/n}{1/n}=\pi$$

bulunur. Demek ki, $\varepsilon=\frac{\pi}{2}>0$ sayısı için $\delta=\varepsilon$ seçimi yapıldığında $\exists x_n', x_n''\in[0,\infty)$ öyle ki $|x_n'-x_n''|<\delta$

fakat $|f(x_n')-f(x_n'')|>\frac{\pi}{2}=\varepsilon$ 'dur. Dolayısıyla, fonksiyon $[0,\infty)$ üzerinde düzgün sürekli değildir.

-TÜREV-

Temel Tanımlar ve Sonuçlar

Tanım 80. $(a,b) \subset \mathbb{R}$ açık bir aralık ve f'de (a,b) den $\mathbb{R}$'ye bir fonksiyon olsun. $t, x \in (a,b)$ olmak üzere

$$\lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = A(x)$$

sonlu limiti varsa, bu $A(x)$ sayısına f fonksiyonunun x noktasındaki türevi denir ve $f'(x)$ (veya $Df(x)$ ya da $\frac{df(x)}{dx}$) ile gösterilir.

Bu durumda, f fonksiyonu x noktasında türevlenebilirdir (veya türevlidir) denir ve

$$f'(x) = \lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$$

veya $t = x+h$ dersek; $t \to x$ $h \to 0$ olacağından

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

dır.

Eğer $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $E \subset (a,b)$ kümesinin her noktasında türevlenebilir ise, $y = f(x)$ fonksiyonu E üzerinde türevlenebilirdir denir. Böylece, $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun E üzerinde tanımlı ve

$$f', \ D_x f, \ \frac{df}{dx} \text{ ya da } y'_x, \ D_x y, \ \frac{dy}{dx}$$

ile gösterilen türev fonksiyonu kavramına varılır.

Eğer $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu için $x\in(a,b)$ olmak üzere

$$A(x^+)=\lim_{t\to x^+}\frac{f(t)-f(x)}{t-x} \quad \text{ve}$$

$$A(x^-)=\lim_{t\to x^-}\frac{f(t)-f(x)}{t-x}$$

limitleri varsa, bu limitlere sırasıyla f'in x noktasında sağ türevi ve sol türevi denir. f'_+ ve f'_- ile gösterilir. Bu durumda f fonksiyonu sırası ile sağdan ve soldan türevlenebilirdir denir.

$$f'_+=\lim_{t\to x^+}\frac{f(t)-f(x)}{t-x}=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$f'_-=\lim_{t\to x^-}\frac{f(t)-f(x)}{t-x}=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Önerme -

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonunun bir $x\in(a,b)$ noktasında türevlenebilir olması için gerek ve yeter koşul f nin x noktasında sol ve sağ türevlerinin var ve bunların eşit olmasıdır. $f'(x)=f'_-=f'_+$ dır.

Eğer $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu her $x\in(a,b)$ noktasında türevli, a'da sağdan ve b'de soldan türevli ise, f fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde türevlenebilirdir (veya türevlidir) denir.

$$f'(x) = \lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$$

ifadesi $x \in (a,b)$, $t \to x$ iken $\alpha(t) = o(1)$ olmak üzere

$$\frac{f(t) - f(x)}{t - x} = f'(x) + \alpha(t), \quad t \neq x$$

veya

$$f(t) - f(x) = f'(x)(t-x) + \alpha(t)\,(t-x)$$

şeklinde yazılabilir.

*** Önerme.** $x \in [a,b]$ noktasında türevli $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu aynı x noktasında süreklidir.

NOT: Bu önermenin karşıtı genel olarak doğru değildir. Bir fonksiyonun sürekli olduğu noktalarda fonksiyon türevli olmayabilir.

Ör/ $\mathbb{R}$ üzerinde sürekli $f(t) = |t|$ fonksiyonunun $t=0$ noktasında türevli olmadığını gösteriniz.

Çözüm. $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ için

$$\frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = \frac{|t| - 0}{t - 0} = \begin{cases} 1, & t > 0 \text{ ise} \\ -1, & t < 0 \text{ ise} \end{cases}$$

olduğuna göre

$$f'_-(0) = \lim_{t \to 0^-} \frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = -1$$

$$f'_+(0) = \lim_{t\to 0^+} \frac{f(t)-f(0)}{t-0} = 1 \text{ 'dir.}$$

$f'_-(0) \neq f'_+(0)$ olduğundan f fonksiyonu $t=0$'da türevli değildir.

Tanım 81- $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ve $x \in [a,b]$ noktası verilmiş olsun. Eğer $x+h \in [a,b]$ için $B(x)$ reel bir sayı olmak üzere

$$f(x+h) - f(x) = B(x).h + \varphi(x;h)$$

olacak şekilde $h \to B(x).h$ fonksiyonu ve $h \to 0$ ($x=a$ için $h\to 0^+$ ve $x=b$ için $h \to 0^-$) iken $\varphi(x;h) = o(h)$ olacak şekilde bir $\varphi(x;h)$ fonksiyonu varsa, f fonksiyonu x noktasında diferansiyellenebilirdir denir. Bu durumda h'a göre Lineer $h \to B(x)h$ fonksiyonuna f in x noktasında diferansiyeli denir. ve $df(x)$ ile gösterilir.

Buna göre; $x, x+h \in [a,b]$ için

$$\Delta f(x;h) = f(x+h) - f(x)$$

olmak üzere $h \to 0$ ($x=a$ için $h \to 0^+$, $x=b$ için $h\to 0^-$) iken

$$\Delta f(x;h) - df(x)(h) = \varphi(x;h) = o(h)$$

olduğu elde edilir.

$\Delta f(x;h)$ büyüklüğüne x'in $h \neq 0$ artımına karşılık fonksiyon artımı denir. Bu sebepten, $B(x) \neq 0$ ise, $h \to 0$ iken fonksiyonun diferansiyeli fonksiyon artımının esas kısmıdır denir.

$x \in (a,b)$ için

$$B(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$$

olduğuna göre

$$df(x) = f'(x)\,dx \quad \left(\Rightarrow f'(x) = \frac{df(x)}{dx} \right)$$

olduğu elde edilir

$x, x+h \in [a,b]$, $h \to 0$ iken $\alpha(x;h) = o(1)$ olmak üzere

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) + \alpha(x;h)$$

veya

$$f(x+h) - f(x) = f'(x).h + \alpha(x;h).h$$

şeklinde yazılabilir. Buna göre $\alpha(x;h).h = \varphi(x;h)$ dersek $h \to 0$ iken $\varphi(x;h) = o(h)$ olacağından $x, x+h \in [a,b]$ olmak üzere

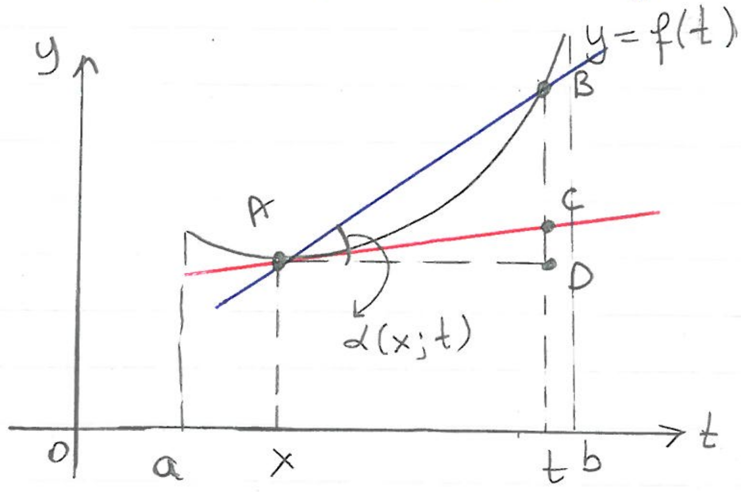
$$f(x+h) - f(x) = f'(x).h + \varphi(x;h)$$

yazabiliriz. $x=a$, $x=b$ durumlarında $f'(x)$ yerine $f'_+(a)$ ve $f'_-(b)$ yazarız.

Teorem 35-

$f:[a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun bir $x \in [a,b]$ noktasında diferansiyellenebilir olması için gerek ve yeter koşul; f fonksiyonunun bu x noktasında türevlenebilir olmasıdır.

Türev ve diferansiyelin geometrik anlamları.



$[a,b]$ üzerinde sürekli bir $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $y = f(t)$ fonksiyonu ve $x, t \in (a,b)$ noktaları verilmiş olsun. Bu fonksiyonun grafiği üzerindeki $A(x, f(x))$ ve $B(t, f(t))$ noktalarından geçen kirişi göz önüne alalım.

B noktası eğri üzerinde A noktasına yaklaştığında bu kirişin limit durumuna A noktasında eğrinin teğeti denir. Kirişin eğimi ; $D\widehat{A}B = \alpha(x; t)$ olmak üzere

$$\tan \alpha(x; t) = \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$$

dir. f fonksiyonu x noktasında türevli ise

$$f'(x) = \lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$$

olduğuna göre $f'(x) = \lim_{t \to x} \tan \alpha(x; t)$

dir. Bu durumda $f'(x)$ türevi $B \to A$ iken kirişin limit durumu, yani A noktasında fonksiyon eğrisine çizilen teğetin Ox-ekseniyle yaptığı açının tanjantıdır. Buna göre, x noktasında türevli $y = f(t)$ fonksiyonunun $A(x, f(x))$ noktasında teğet denklemi

Teğet denklemi - $y = f(x) + f'(x)(t-x)$

Normal denklemi - $y = f(x) - \frac{1}{f'(x)}(t-x)$

dir.

Şekilden görüldüğü gibi $h = t-x$ dersek $y = f(t)$ fonksiyonunun h artımına karşılık fonksiyon artımı

$$\Delta f(x;h) = f(x+h) - f(x) = |BD|$$

ve $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(t) = f(x) + f'(x)(t-x)$ fonksiyonunun h artımına karşılık fonksiyon artımı da

$$\Delta g(x;h) = g(x+h) - g(x) = f'(x)h = df(x)(h) = |CD|$$

olduğu elde edilir. Buna göre, f'in x noktasındaki diferansiyeli T teğetinin ordinat artımı olmaktadır.

ÖRNEKLER -

1) $f(x) = c$ fonksiyonunun türevini türev tanımından bulunuz.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c-c}{h} = 0$$

2) $f(x) = x$ fonksiyonunun türevini türev tanımından bulunuz.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x} + h - \cancel{x}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = 1$$

3) $f(x)=x^n$ $(n\in\mathbb{N})$ fonksiyonunun türevini türev tanımından bulunuz.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}$$

$$(x+h)^n=\binom{n}{0}x^nh^0+\binom{n}{1}x^{n-1}h+\dots+\binom{n}{n-1}xh^{n-1}+\binom{n}{n}x^0h^n$$

$$=\frac{n!}{0!.n!}x^n+\frac{n!}{1!(n-1)!}x^{n-1}h+\dots+\frac{n!}{(n-1)!.1!}xh^{n-1}+\frac{n!}{n!.0!}h^n$$

$$=x^n+nx^{n-1}h+\dots+nxh^{n-1}+h^n$$

$$\Rightarrow f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{(x^n+nx^{n-1}h+\dots+nxh^{n-1}+h^n)-x^n}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}\left[nx^{n-1}+\dots+nxh^{n-2}+h^{n-1}\right]}{\cancel{h}}$$

$$=nx^{n-1}$$

4) $f(x)=\sin x$ fonksiyonunun türevini türev tanımından bulunuz.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cos h+\cos x\sin h-\sin x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sin x(\cos h-1)+\cos x\sin h}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sin x.\left(-2\sin^2\frac{h}{2}\right)+\cos x\sin h}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{-\sin x \cdot \overbrace{\left(\sin \frac{h}{2}\right)}^{\to 1} \sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} + \cos x \cdot \overbrace{\left(\frac{\sin h}{h}\right)}^{\to 1} \right]$$

$$= \cos x$$

5) $f(x)=a^x$, $(a>0,\ a\neq 1)$ fonksiyonunun türevini tanımdan yararlanarak bulunuz.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{a^x\,(a^h-1)}{h}$$

$$\left.\begin{aligned} a^h-1&=t\\ a^h&=t+1\\ h&=\log_a(t+1)\\ h\to 0 \quad & t\to 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow f'(x)=\lim_{t\to 0}\frac{a^x\ t}{\log_a(t+1)}$$

$$=a^x\lim_{t\to 0}\frac{1}{\frac{1}{t}\log_a(t+1)}$$

$$=a^x\lim_{t\to 0}\frac{1}{\log_a(t+1)^{1/t}}$$

$$=a^x\cdot\frac{1}{\log_a e}=a^x\cdot\ln a$$

Çözümlü Problemler-

1) Aşağıdaki eşitliklerle tanımlanan fonksiyonların eğer varsa, karşılarında yazılı x_0 noktalarındaki türevlerini bulunuz. Fonksiyon bu noktalarda sürekli midir?

a) $f(x) = x [\![x]\!]$, $\quad x_0 = 0$, $x_0 = \frac{3}{2}$

b) $f(x) = |x| \sin x$, $\quad x_0 = 0$

c) $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x-1) \arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}$, $\quad x_0 = 1$

Çözüm.

a) $x_0 = 0$'ın solunda ve sağında f'in tanımı değişir. Dolayısıyla sağ ve sol türevlerini bulmalıyız.

$\forall x \in (-1, 0)$ için $[\![x]\!] = -1 \Rightarrow f(x) = -x$ ve
$\forall x \in (0, 1)$ için $[\![x]\!] = 0 \Rightarrow f(x) = 0$ dır.

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x - 0}{x} = -1$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{0 - 0}{x} = 0$$

olduğundan fonksiyon $x_0 = 0$'da türevlenemez

$$f(0^-) = \lim_{x \to 0^-} x [\![x]\!] = \lim_{x \to 0^-} -x = 0$$

$$f(0^+) = \lim_{x \to 0^+} x [\![x]\!] = \lim_{x \to 0^+} 0 = 0$$ bulunur. Süreklidir.

$x_0 = \frac{3}{2}$ için $x \in (1, 2)$ olsun. Bu durumda $[\![x]\!] = 1$ ve $f(x) = x$ dir.

$$f'\left(\frac{3}{2}\right) = \lim_{x\to\frac{3}{2}} \frac{f(x)-f\left(\frac{3}{2}\right)}{x-\frac{3}{2}} = \lim_{x\to\frac{3}{2}} \frac{x-\frac{3}{2}}{x-\frac{3}{2}} = 1$$

olur. f, $x_0 = \frac{3}{2}$ 'de türeve sahiptir. Dolayısıyla da süreklidir.

b) $$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|.\sin x - 0}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} |x| . \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$$

$$= 0$$

olur. fonksiyon $x_0 = 0$'da süreklidir, çünkü bu noktada türevlenebilirdir.

c) $$f'(1) = \lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{(x-1)}\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}} - 0}{\cancel{x-1}}$$

$$= \lim_{x\to 1} \arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}$$

$$= \arcsin\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

olur. O halde fonksiyon $x_0 = 1$ 'de türeve sahiptir ve dolayısıyla süreklidir.

2) $X \subset \mathbb{R}$, $f: X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ve bu fonksiyonun süreksiz olduğu $x_0 \in X$ noktası verilsin. f x_0'da

a) sonlu
b) sonsuz

türeve sahip olabilir mi?

Çözüm -

a) Bir fonksiyon türevlenebilir olduğu noktada süreklidir. Dolayısıyla, fonksiyon x_0 da sonlu türeve sahip olamaz.

b) Evet sonsuz türeve sahip olabilir. Örneğin; $x_0 = 0$ noktası $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = \operatorname{sgn} x$ fonksiyonunun süreksizlik noktasıdır ve

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sgn} x}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$$

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{sgn} x}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-1}{x} = \infty$$

olduğuna göre $f'(0) = \infty$ olur.

TÜREV ALMA KURALLARI

Teorem 36 -

Eğer, $u, v : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarının bir $x \in [a,b]$ noktasında türevleri varsa, $\lambda u \mp \mu v$ $(\lambda, \mu \in \mathbb{R})$, $u.v$ ve $v(x) \neq 0$ olmak üzere $\frac{u}{v}$ fonksiyonları da x noktasında türevlenebilirdir ve

a) $(\lambda u \mp \mu v)' = \lambda u' \mp \mu v'$;

b) $(u.v)' = u'v + v'u$

c) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$

eşitlikleri doğrudur.

İSPAT –

(c) şıkkını ispat edelim.

$$\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \lim_{h\to 0} \frac{\left[\frac{u(x+h)}{v(x+h)} - \frac{u(x)}{v(x)}\right]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h)v(x) - u(x)v(x+h)}{h\left[v(x+h)v(x)\right]}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left\{ \frac{u(x+h)v(x) - u(x)v(x+h) - u(x)v(x) + u(x)v(x)}{h\left[v(x+h)v(x)\right]} \right.$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{v(x+h)v(x)} \cdot \left\{ v(x) . \frac{u(x+h)-u(x)}{h} - u(x) \frac{v(x+h)-v(x)}{h} \right\}$$

$$= \frac{v(x) . u'(x) - u(x) . v'(x)}{\left[v(x)\right]^2}$$

Sonuç –

$$\left[c . u(x)\right]' = c . u'(x) \qquad c \in \mathbb{R}$$

$$\left[\frac{1}{u(x)}\right]' = \frac{-u'(x)}{\left[u(x)\right]^2}$$

Teorem 37 – (Bileşik Fonksiyonun Türevi)

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde sürekli ve $x \in [a,b]$ noktasında türevlenebilir olsun. Eğer, $g : f([a,b]) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $f(x)$ noktasında türevlenebilir ise, $g o f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu da x noktasında türevlenebilirdir ve

$$(g o f)'(x) = f'(x) g'[f(x)] \quad \text{dir.}$$

İspat -

$y=f(x)$ olsun. Türev tanımı gereğince $x+h \in [a,b]$ ve $h \to 0$ iken $\alpha(x;h)=o(1)$ olmak üzere

$$f(x+h)-f(x)=f'(x).h+\alpha(x;h).h \quad (\bullet)$$

ve $y+H \in f([a,b])$ ve $H \to 0$ iken $\beta(y;H)=o(1)$ olmak üzere

$$g(x+H)-g(x)=g'(x)H+\beta(y;H)H \quad (\bullet\bullet)$$

yazabiliriz. Bu durumda $x+h \in [a,b]$ için önce $(\bullet\bullet)$'dan sonra $(\bullet)$'dan yararlanırsak;

$$\begin{aligned}(gof).(x+h)-(gof)(x) &= g[f(x+h)]-g[f(x)] \\ &= g'[f(x+h)].[f(x+h)-f(x)] \\ &\quad + \beta(f(x);H).[f(x+h)-f(x)]\end{aligned}$$

$$= [f(x+h)-f(x)]\,[\,g'[f(x+h)]+\beta[f(x);H]\,]$$

$$= [f'(x).h+\alpha(x;h)\,h]\,[g'(f(x+h))+\beta[f(x);f(x+h)-f(x)]]$$

$$= h.[f'(x)+\alpha(x;h)]\,[g'[f(x+h)]+\beta[f(x);(f(x+h)-f(x))]]$$

veya $h \neq 0$ için

$$\frac{(gof)(x+h)-(gof)(x)}{h} = [f'(x)+\alpha(x;h)][g'[f'(x+h)]+\beta[f(x);(..)]$$

yazabiliriz. f fonksiyonu x noktasında olduğuna göre

$$\lim_{h \to 0}[f(x+h)-f(x)]=0 \text{ dır.}$$

Bu durumda

$$\lim_{h\to 0}\frac{(g\circ f)(x+h)-(g\circ f)(x)}{h}=\left[f'(x)+\lim_{h\to 0}\alpha(x;h)\right].$$
$$\left[g'(f(x))+\lim_{h\to 0}\beta\left[f(x),f(x+h)-f(x)\right]\right]$$

$$=f'(x).\,g'(f(x))$$

elde edilir.

NOT- Teorem 37'nin koşulları sağlansın. Bu durumda $z=g(y)$ ve $y=f(x)$ dersek;

$$\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}\quad\text{veya}\quad z'_x=z'_y\cdot y'_x$$

seklinde yazılabilir. Bu nedenle bileşik fonksiyonun türev alma kuralına zincir kuralı denir.

$u=u(x)\Rightarrow\ \bullet\left(\frac{1}{u}\right)'=-\frac{u'}{u^2},\ \bullet\ (\sqrt{u})'=\frac{u'}{2\sqrt{u}},\ \bullet(u^r)'=r.u'.u^{r-1},\ \bullet\ (|u|)'=\frac{u'.u}{|u|}$

Teorem 38- (Ters Fonksiyonun Türevi)

$f:(a,b)\to\mathbb{R}$, $y=f(x)$ fonksiyonu (a,b) üzerinde sürekli ve artan (veya azalan) olsun. Eğer, bu fonksiyon $x\in(a,b)$ noktasında türevlenebilir ve $f'(x)\neq 0$ ise, f in $f^{-1}:(f(a^+),f(b^-))\to\mathbb{R}$'ye

(veya $f^{-1}:(f(b^-),f(a^+))\to\mathbb{R}$'ye) $x=f^{-1}(y)$ ters

fonksiyonu da $y=f(x)$ noktasında türevlenebilirdir ve

$$(f^{-1})'(y)=\frac{1}{f'(x)}\quad\text{veya}\quad x'_y=\frac{1}{y'_x}$$

dir.

İSPAT-

$x, x+h \in (a,b)$, $y=f(x)$ ve $y+H=f(x+h)$ ise $x=f^{-1}(y)$ ve $x+h=f^{-1}(y+H)$ olduğu açıktır. f, (a,b) üzerinde artan (veya azalan) olduğuna göre, $h \neq 0$ iken $H=f(x+h)-f(h) \neq 0$ ve $\lim\limits_{h\to 0} H=0$ dır.

O halde, $x, x+h \in (a,b)$ olacak şekilde her $h\neq 0$ için

$$\frac{f^{-1}(y+H)-f^{-1}(y)}{H} = \frac{h}{f(x+h)-f(x)} = \frac{1}{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}$$

olduğuna göre, $(h \to 0 \Leftrightarrow H \to 0)$

$$\lim_{H\to 0}\frac{f^{-1}(y+H)-f^{-1}(y)}{H} = \frac{1}{\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}} = \frac{1}{f'(x)}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

ÖRNEK-

$f: \mathbb{R}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ $f(x)=\log_a |x|$ $(a>0, a\neq 1)$

fonksiyonunun türevini bulunuz.

Çözüm-

$\forall x \in (0,\infty)$ için $y=\log_a |x| \Leftrightarrow x=a^y$ ve

$y'_x = \frac{1}{x'_y}$ olduğuna göre, $\forall x \in (0,\infty)$ için

$$(\log_a |x|)' = \frac{1}{(a^y)'} = \frac{1}{a^y \ln a} = \frac{1}{x \ln a}$$

olur. $\forall x \in (-\infty,0)$ için $y=\log_a |x| \Leftrightarrow x=-a^y$ ve

$y'_x = \frac{1}{x'_y}$ olduğuna göre, $\forall x \in (-\infty,0)$ için

$$(\log_a |x|)' = \frac{1}{(-a^y)'} = \frac{1}{-a^y \ln a} = \frac{1}{x \ln a}$$

olur. Dolayısıyla, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ için

$$(\log_a |x|)' = \frac{1}{x \ln a}$$

olur. Özel olarak $a=e$ ise, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ için

$$(\ln |x|)' = \frac{1}{x}$$ 'dir.

Kapalı Fonksiyonlar ve Türevleri

Bazı fonksiyonlar, bir kurala bağlı olarak verilmiş değişkenlerin bir çifti olarak düşünülebilir. Yani $y=f(x)$ fonksiyonu, bazen x ve y cinsinden bir denklem ile dolaylı olarak verilebilir. Örneğin;

$$2x+y=1=0 \quad \text{ve} \quad y=1-2x$$

ifadeleri özdeştir. Yani birini sağlayan (x,y) çifti diğerini de sağlar.

Eğer y, x'in bir fonksiyonu olarak, $y=f(x)$ denklemi ile tanımlanmış ise, bu taktirde y'ye bir açık fonksiyon denir. Eğer y, x'in bir fonksiyonu olarak, $F(x,y)=0$ denklemi ile tanımlanmış ise, bu taktirde de y'ye bir kapalı fonksiyon diyeceğiz.

Örneğin; $y=x^2$ ve $y=x+\sqrt{x^2+1}$ birer açık fonksiyondur. Bununla birlikte, merkezi orjin ve yarıçapı 5 olan

$$x^2+y^2=25$$

çemberi bir fonksiyonun grafiği değildir. Çünkü, dikey bir doğru, çemberi iki noktada keser. Fakat alt ve üst çemberler, her ikisi birer fonksiyonun grafiğidir. Bu fonksiyonları açık hale getirmek için çemberin denkleminden y çözülür:

$$y=\mp\sqrt{25-x^2} \quad (-5\leq x\leq 5)$$

Sonuç olarak, $y=f(x)$ fonksiyonu $x^2+y^2=25$ denklemi ile kapalı olarak verilmiştir ve $y=\mp\sqrt{25-x^2}$ denklemleri, $y=f(x)$'in açık şekilleridir.

Bununla birlikte verilen bir $F(x,y)=0$ denkleminden y'yi çözmek mümkün olmayabilir. Örneğin;

$$x^2y^3+y+\sqrt{y^2+1}=0$$

denkleminden y'yi çözmek mümkün değildir.

$F(x,y)=0$ denklemi ile verilmiş y kapalı fonksiyonunun türevini zincir kuralını kullanarak $F(x,y)=0$ denkleminin her iki tarafını türetmek yeterlidir.

Örneğin; $y^2=x$ için y' türevi

$$y^2-x=0 \Rightarrow 2yy'-1=0 \Rightarrow y'=\frac{1}{2y} \quad \text{dir ki}$$

$y_1=\sqrt{x}$ ve $y_2=-\sqrt{x}$ için $y'=\dfrac{1}{\mp 2\sqrt{x}}$ olarak bulunur.

ÖRNEK-

$x^2+y^2=25$ çemberinin $(3,-4)$ noktasındaki eğimini bulunuz.

Çözüm:

$x^2+y^2=25$ çemberi x'in tek bir fonksiyonunun grafiği değildir. $y_1=\sqrt{25-x^2}$ ve $y_2=-\sqrt{25-x^2}$ fonksiyonlarının grafiklerinin birleşimidir. $(3,-4)$ noktası y_2'nin grafiği üzerinde yer alır, o halde eğimi açık bir şekilde hesaplayarak bulabiliriz:

$$\left.\frac{dy_2}{dx}\right|_{x=3} = \left.\frac{-2x}{2\sqrt{25-x^2}}\right|_{x=3} = -\frac{-6}{2\sqrt{25-9}} = \frac{3}{4}$$

Ancak çemberin verilen denklemini x'e göre kapalı olarak türeterek problemi çok daha kolay çözebiliriz.

$$\frac{d}{dx}(x^2)+\frac{d}{dx}(y^2)=\frac{d}{dx}(25)$$

$$2x+2yy'=0 \Rightarrow y'=\frac{-x}{y}.$$

$$\left.y'\right|_{(-3,4)} = -\frac{-3}{4}=\frac{3}{4}.$$

Teorem 39- (Logaritmik Türev Alma)

$u:(a,b)\to \mathbb{R}_+$ ve $v:(a,b)\to\mathbb{R}$ fonksiyonları $x\in(a,b)$ noktasında türevlenebilir ise, $u^v:(a,b)\to\mathbb{R}_+$ fonksiyonu da x noktasında türevlenebilirdir ve

$$(u^v)'=u^v\left[v'\ln u+v.\frac{u'}{u}\right]$$ olur.

İSPAT–

$y = [u(x)]^{v(x)}$ dersek; $\ln y = v(x).\ln[u(x)]$

olur. Buradan türeve geçersek;

$$(\ln y)' = \{v(x).\ln[u(x)]\}'$$

$$\Rightarrow \frac{y'}{y} = v'.\ln u + v.\frac{u'}{u}$$

$$\Rightarrow y' = y\left[v'\ln u + v\frac{u'}{u}\right] \Rightarrow y' = u^v\left[v'\ln u + v\frac{u'}{u}\right]$$

olarak istenen elde edilmiş olur.

Örnek: $y = x^x$ in türevini bulunuz.

$$\ln y = \ln x^x \Rightarrow \ln y = x\ln x$$

$$\Rightarrow \frac{y'}{y} = \ln x + x.\frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow y' = y(\ln x + 1)$$

$$\Rightarrow y' = x^x(\ln x + 1)$$

Örnek: $y = \frac{(x+1)(x+2)(x+3)}{x+4} \Rightarrow y' = ?$

$$\ln y = \ln\left[\frac{(x+1)(x+2)(x+3)}{x+4}\right]$$

$$\Rightarrow \ln y = \ln(x+1) + \ln(x+2) + \ln(x+3) - \ln(x+4)$$

$$\Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+4}$$

$$\Rightarrow y' = y\left[\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+4}\right]$$

$$\Rightarrow y' = \left[\frac{(x+1)(x+2)(x+3)}{x+4}\right]\left[\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+4}\right]$$

NOT: Logaritmik türev, birçok çarpanın çarpanları ve bölümleri şeklinde ifade edilen fonksiyonların türevlerini bulmak için de kullanışlıdır. Logaritma almak bu çarpım ve bölümleri toplam ve farka dönüştürür.

Eğer, $y = f(x)$ fonksiyonunda x ve y değişkenleri üçüncü bir t değişkeninin

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \qquad t \in (\alpha, \beta)$$

fonksiyonları yardımıyla veriliyorsa, bu f fonksiyonu parametrik şekilde verilmiştir denir. Bu durumda, t değişkenine parametre denir.

Teorem 40.

f ve g fonksiyonları $t_0 \in (\alpha, \beta)$ noktasının bir $U(t_0) \subset \mathbb{R}$ komşuluğunda türevlenebilir olsunlar. Eğer $f'(t_0) \neq 0$ ve f fonksiyonunun $x_0 = f(t_0)$ noktasının bir $U(x_0) \subset \mathbb{R}$ komşuluğunda tanımlı $t = f^{-1}(x)$ ters fonksiyonu varsa $x_0 = f(t_0)$ noktasında türevlenebilirdir ve

$$f'(x_0) = \frac{g'(t_0)}{f'(t_0)} \quad \text{veya} \quad y'_x = \frac{\dot{y}_t(t_0)}{\dot{x}_t(t_0)}$$

olur.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dt}{dt} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$$

11)
ÖRNEK.

(x,y) noktasının kutupsal koordinatları r ve θ olmak üzere

$$r=a(1+\cos\theta)\ ,\quad \theta\in\left(0,\frac{2\pi}{3}\right)$$

tanımlı $y=y(x)$ fonksiyonunun türevini bulunuz.

Çözüm.

Kutupsal koordinatlar

$$\left.\begin{array}{l} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{array}\right\} \Rightarrow$$ $y=y(x)$ fonksiyonunun parametrik şekli

$$x=a(1+\cos\theta).\cos\theta = a\cos\theta+a\cos^2\theta$$
$$y=a(1+\cos\theta).\sin\theta = a\sin\theta+a\sin\theta\cos\theta$$

biçimindedir.

$$\dot{x}_\theta=-a\sin\theta-2a\cos\theta\sin\theta$$
$$=-a\left[\sin\theta+\sin 2\theta\right]$$

$$\dot{y}_\theta=a\cos\theta+a\cos^2\theta-a\cdot\sin^2\theta$$
$$=a\cos\theta+a\cos 2\theta$$
$$=a\left[\cos\theta+\cos 2\theta\right]$$

$$\Rightarrow y'=\frac{\dot{y}_\theta}{\dot{x}_\theta}=\frac{\cancel{a}\left[\cos\theta+\cos 2\theta\right]}{-\cancel{a}\left[\sin\theta+\sin 2\theta\right]}=-\frac{\cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$=-\cot\left(\frac{3\theta}{2}\right)$$

Trigonometrik fonksiyonların türevleri:

$y = \sin x \Rightarrow y' = \cos x$

$y = \cos x \Rightarrow y' = -\sin x$

$$y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow y' = \frac{\cos x . \cos x + \sin x . \sin x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$
$$= \sec^2 x$$

$$y = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \Rightarrow y' = \frac{-\sin x \sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x} = -(1+\cot^2 x)$$
$$= -\csc x$$

$$y = \sec x = \frac{1}{\cos x} \Rightarrow y' = \frac{0 . \cos x - (-\sin x) . 1}{\cos^2 x} = \sec x . \tan x$$

$$y = \csc x = \frac{1}{\sin x} \Rightarrow y' = \frac{0 . \sin x - \cos x . 1}{\sin^2 x} = -\csc x . \cot x$$

$u = u(x)$ olmak üzere

$y = \sin u \Rightarrow y' = u' \cos u$, $y = \tan u \Rightarrow y' = u'(1+\tan^2 u)$
$= u' \sec^2 u$

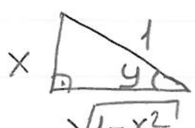
$y = \cos u \Rightarrow y' = -u' \sin u$, $y = \cot u \Rightarrow y' = -u'(1+\cot^2 u)$
$= -u' \csc^2 u$

$y = \sec u \Rightarrow y' = u' \sec u \tan u$, $y = \csc u \Rightarrow y' = -u' \csc u \cot u$

Ters Trigonometrik fonksiyonların türevleri

$y = \arcsin x \Rightarrow x = \sin y$ x'e göre türetilirse;

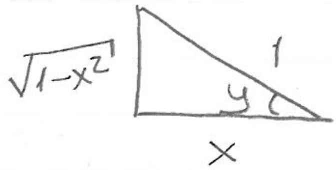
$$1 = y' \cos y \Rightarrow y' = \frac{1}{\cos y}$$



$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$y=\arccos x \Rightarrow x=\cos y$ x'e göre türetilirse;

$$1=-y'\sin y$$



$$y'=\frac{-1}{\sin y}$$

$$=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$y=\arctan x \Rightarrow x=\tan y$ x'e göre türetilirse;

$$1=y'(1+\tan^2 y)$$

$$y'=\frac{1}{1+\tan^2 y}=\frac{1}{1+x^2}$$

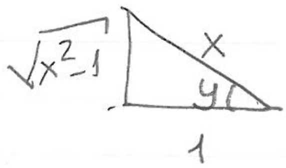
$y=\operatorname{arccot} x \Rightarrow x=\cot y$ x'e göre türetilirse;

$$1=-y'(1+\cot^2 y)$$

$$y'=\frac{-1}{1+\cot^2 y}=\frac{-1}{1+x^2}$$

$y=\operatorname{arcsec} x \Rightarrow x=\sec y$ x'e göre türetilirse;

$$1=y'\sec y\tan y$$



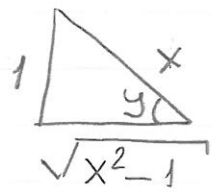
$$y'=\frac{1}{\sec y\tan y}$$

$$=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$y=\operatorname{arccsc} x \Rightarrow x=\csc y$ x'e göre türetilirse;

$$1=-y'\csc y\cot y$$

$$\Rightarrow y' = \frac{-1}{\csc y \cot y}$$



$$= \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$u = u(x)$ ise

$y = \arcsin u \Rightarrow y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$, $y = \arccos u \Rightarrow y' = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$

$y = \arctan u \Rightarrow y' = \frac{u'}{1+u^2}$, $y = \text{arccot}\, u \Rightarrow y' = \frac{-u'}{1+u^2}$

$y = \text{arcsec}\, u \Rightarrow y' = \frac{u'}{u\sqrt{u^2-1}}$, $y = \text{arccsc}\, u \Rightarrow y' = \frac{-u'}{u\sqrt{u^2-1}}$

Üstel ve Logaritmik fonksiyonların türevleri

$a > 0, a \neq 1$ olmak üzere

$y = a^x \Rightarrow y' = a^x . \ln a$

$y = e^x \Rightarrow y' = e^x \ln e = e^x$

$u = u(x)$ ise

$y = a^u \Rightarrow y' = u' a^u \ln a$

$y = e^u \Rightarrow y' = u' e^u$

$a>0, a\neq 1$ olmak üzere

$$y=\log_a x \Rightarrow y'=\frac{1}{x\ln a}$$

$$y=\ln x \Rightarrow y'=\frac{1}{x}$$

$u=u(x)$ ise

$$y=\log_a u \Rightarrow y'=\frac{u'}{u\ln a}$$

$$y=\ln u \Rightarrow y'=\frac{u'}{u}$$

Hiperbolik ve Ters Hiperbolik fonksiyonların türevleri

$$y=\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2} \Rightarrow y'=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\cosh x$$

$$y=\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2} \Rightarrow y'=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\sinh x$$

$$y=\tanh x=\frac{\sinh x}{\cosh x} \Rightarrow y'=\frac{\cosh x.\cosh x-\sinh x\sinh x}{\cosh^2 x}$$

$$\Rightarrow y'=1-\tanh^2 x=\text{sech}^2 x$$

$$y=\coth x=\frac{\cosh x}{\sinh x} \Rightarrow y'=\frac{\sinh x\sinh x-\cosh x\cosh x}{\sinh^2 x}$$

$$\Rightarrow y'=-(1-\coth^2 x)=-\text{csch}^2 x$$

$$y=\text{sech}x=\frac{1}{\cosh x} \Rightarrow y'=\frac{0\cosh x-\sinh x}{\cosh^2 x}$$

$$\Rightarrow y'=-\text{sech}x\tanh x$$

$$y=\text{csch}x=\frac{1}{\sinh x} \Rightarrow y'=\frac{0.\sinh x-\cosh x}{\sinh^2 x}$$

$$\Rightarrow y'=-\text{csch}x\coth x$$

$u=u(x)$ ise

$y=\sinh u \Rightarrow y'=u'\cosh u$, $y=\cosh u \Rightarrow y'=u'\sinh u$

$y=\tanh u \Rightarrow y'=u'(1-\tanh^2 u)=u'\operatorname{sech}^2 u$

$y=\coth u \Rightarrow y'=-u'(1-\coth^2 u)=-u'\operatorname{csch}^2 u$

$y=\operatorname{sech} u \Rightarrow y'=-u'\operatorname{sech} u \tanh u$

$y=\operatorname{csch} u \Rightarrow y'=-u'\operatorname{csch} u \coth u$

$y=\operatorname{argsinh} x=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$

$$\Rightarrow y'=\frac{1+\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+1}}}{(x+\sqrt{x^2+1})}=\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{(\sqrt{x^2+1})(x+\sqrt{x^2+1})}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \quad (x\in\mathbb{R})$$

$y=\operatorname{arg}\cosh x=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$

$$\Rightarrow y'=\frac{1+\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2-1}}}{x+\sqrt{x^2-1}}=\frac{\sqrt{x^2-1}+x}{(\sqrt{x^2-1})(x+\sqrt{x^2-1})}=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad (x>1)$$

$y=\operatorname{arg}\tanh x=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$, $(-1<x<1)$

$$\Rightarrow y'=\frac{1}{2}\left\{\frac{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)'}{\frac{1+x}{1-x}}\right\}=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\cancel{1}-x+\cancel{1}+x}{(1-x)^2}\right)\cdot\frac{1-x}{1+x}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{2}{1-x^2}\right\}=\frac{1}{1-x^2} \quad (|x|<1)$$

$$y=\operatorname{argcoth} x=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right), \quad x>1 \text{ yada } x<-1$$

$$\Rightarrow y'=\frac{1}{2}\left\{\frac{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)'}{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)}\right\}=\frac{1}{2}\left\{\frac{\cancel{x}-1-\cancel{x}-1}{(x-1)^{\cancel{2}}}\cdot\frac{\cancel{x-1}}{x+1}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{-2}{x^2-1}\right\}=\frac{-1}{x^2-1}=\frac{1}{1-x^2} \quad (x>1)$$

$$y=\operatorname{argsech} x=\operatorname{arg\c{c}osh}\left(\frac{1}{x}\right)=\ln\left(\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}\right), \quad \frac{1}{x}\geq 1$$

$$=\ln\left(\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$$

$$=\ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$$

$$=\ln\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)-\ln x$$

$$\Rightarrow y'=\frac{\frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{1-x^2}}}{1+\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{x}$$

$$=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)}-\frac{1}{x}$$

$$=\frac{-x^2-\left(\sqrt{1-x^2}\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)\right)}{x\sqrt{1-x^2}\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)}$$

$$=\frac{-x^2-\left(\sqrt{1-x^2}+1-x^2\right)}{x\sqrt{1-x^2}\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)}$$

$$=\frac{\cancel{-x^2}-\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)+\cancel{x^2}}{x\sqrt{1-x^2}\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)}=\frac{-1}{x\sqrt{1-x^2}} \quad (0<x<1)$$

$$y=\operatorname{argcsch} x=\ln\left(\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\right)=\operatorname{argsinh}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$y = \text{argcsch}\, x = \begin{cases} \ln\left(\dfrac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\right) & x>0 \text{ ise} \\ \ln\left(\dfrac{1-\sqrt{1+x^2}}{x}\right) & x<0 \text{ ise} \end{cases}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{-1}{x\sqrt{1+x^2}} \qquad (x>0)$$

$f(x)$ fonksiyonu	Türevi	Türevli olduğu küme
1- c (sabit)	0	$\mathbb{R}$
2- x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\alpha\in\mathbb{R} \Rightarrow x\in\mathbb{R}_+$, $\alpha\in\mathbb{N} \Rightarrow x\in\mathbb{R}$
3- a^x	$a^x \ln a$	$a>0, a\neq 1$ için $x\in\mathbb{R}$
4- $\log_a \lvert x\rvert$	$\dfrac{1}{x\ln a}$	$a>0, a\neq 1$ için $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$
5- $\sin x$	$\cos x$	$x\in\mathbb{R}$
6- $\cos x$	$-\sin x$	$x\in\mathbb{R}$
7- $\tan x$	$1+\tan^2 x = \sec^2 x$	$x\in\mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi : k\in\mathbb{Z}\}$
8- $\cot x$	$-(1+\cot^2 x) = -\csc^2 x$	$x\in\mathbb{R}\setminus\{k\pi : k\in\mathbb{Z}\}$
9- $\sec x$	$\sec x \cdot \tan x$	$x\in\mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi : k\in\mathbb{Z}\}$
10- $\csc x$	$-\csc x \cot x$	$x\in\mathbb{R}\setminus\{k\pi : k\in\mathbb{Z}\}$
11- $\arcsin x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x\in(-1,1)$
12- $\arccos x$	$\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x\in(-1,1)$
13- $\arctan x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$x\in\mathbb{R}$
14- $\text{arccot}\, x$	$\dfrac{-1}{1+x^2}$	$x\in\mathbb{R}$
15- $\text{arcsec}\, x$	$\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$	$x\in(-1,0)\cup(1,\infty)$
16- $\text{arccsc}\, x$	$\dfrac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$	$x\in(-1,0)\cup(1,\infty)$

17- $\sinh x$	$\cosh x$	$x \in \mathbb{R}$
18- $\cosh x$	$\sinh x$	$x \in \mathbb{R}$
19- $\tanh x$	$1-\tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$	$x \in \mathbb{R}$
20- $\coth x$	$-(1-\coth^2 x) = -\operatorname{csch}^2 x$	$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
21- $\operatorname{sech} x$	$-\operatorname{sech} x \tanh x$	$x \in \mathbb{R}$
22- $\operatorname{csch} x$	$-\operatorname{csch} x \coth x$	$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
23- $\operatorname{argsinh} x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$x \in \mathbb{R}$
24- $\operatorname{argcosh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$x \in \mathbb{R} \setminus [-1,1]$
25- $\operatorname{argtanh} x$	$\frac{1}{1-x^2}$	$x \in (-1,1)$
26- $\operatorname{argcoth} x$	$\frac{1}{1-x^2}$	$x \in \mathbb{R} \setminus [-1,1]$
27- $\operatorname{argsech} x$	$\frac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (0,1)$
28- $\operatorname{argcsch} x$	$\frac{-1}{x\sqrt{1+x^2}}$	$(x > 0)$

Çözümlü Problemler

1) Aşağıdaki eşitliklerle tanımlanan fonksiyonların türevlerini bulunuz. Türevin var olduğu kümeyi gösteriniz.

a) $y = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}$

b) $y = \cos(2^x - x^3)$

c) $y = e^x \log_2 x$

d) $y = \ln\left(\coth \frac{x}{2}\right)$

e) $(\arcsin x)^{\frac{\sin x}{x}}$

f) $y = \log_x 2^x$

Çözüm -

a) $y = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x} = x^{1/2} + x^{1/3} + x^{1/4}$

$\Rightarrow y' = \frac{1}{2} x^{-1/2} + \frac{1}{3} x^{-2/3} + \frac{1}{4} x^{-3/4} \qquad (x>0)$

b) $y = \cos(2^x - x^3)$

$\Rightarrow y' = (2^x - x^3)' \cdot [-\sin(2^x - x^3)$

$= (2^x \ln 2 - 3x^2)\,[-\sin(2^x - x^3)] \qquad (x \in \mathbb{R})$

c) $y = e^x \log_2 x$

$\Rightarrow y' = e^x \log_2 x + \frac{e^x}{x \ln 2} \qquad (x>0)$

d) $y = \ln\left(\coth \frac{x}{2}\right)$

$\Rightarrow y' = \left(\coth \frac{x}{2}\right)' \cdot \frac{1}{\coth \frac{x}{2}} = -\frac{1}{2}\left(1 - \coth^2 \frac{x}{2}\right) \cdot \left(1 - \tanh^2 \frac{x}{2}\right)$

$= -\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{\sinh^2 \frac{x}{2}}\right)\left(\frac{1}{\cosh^2 \frac{x}{2}}\right)$

$= \frac{-1}{\sinh x} \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$

e) $y = (\arcsin x)^{\frac{\sin x}{x}}$

$\Rightarrow \ln y = \frac{\sin x}{x} \ln(\arcsin x)$

$\Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} \ln(\arcsin x) + \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\arcsin x}$

$$\Rightarrow y' = (\arcsin x)^{\frac{\sin x}{x}} \left[\frac{x\cos x - \sin x}{x^2} \ln(\arcsin x) + \frac{\sin x}{x\sqrt{1-x^2}\arcsin x} \right]$$

$\arcsin x > 0$, $x \neq 0$ $\quad\quad 1 - x^2 > 0$

$\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow (1-x)(1+x) > 0$

$(0,1) \qquad\qquad\qquad\qquad\quad (-1,1)$

x		-1		1	
1-x	+		+	0	−
1+x	−	0	+		+
			+		

$$\Rightarrow x \in (0,1)$$

f) $y = \log_x 2^x = \dfrac{\log_2 2^x}{\log_2 x} = \dfrac{x}{\log_2 x}$

$$\Rightarrow y' = \frac{\log_2 x - x \cdot \frac{1}{x\ln 2}}{(\log_2 x)^2} = \frac{\log_2 x - \frac{1}{\ln 2}}{(\log_2 x)^2} = \frac{\ln x - 1}{\ln 2 \, (\log_2 x)^2}$$

$(x > 0, x \neq 1)$

2) $x = a(t - \sin t)$
$y = a(1 - \cos t)$ $\quad\quad 0 < t < 2\pi$;

parametrik denklemleri ile verilen $y = y(x)$ fonksiyonunun türevini bulunuz.

Çözüm.

$x'_t = a(1 - \cos t) \qquad y'_t = a\sin t$

$$\Rightarrow y' = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\cancel{a}\sin t}{\cancel{a}(1-\cos t)} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}$$

3) Aşağıdaki eşitliklerde kapalı şekilde tanımlanan $y = y(x)$ fonksiyonlarının türevlerini bulunuz.

a) $x^2 + 2xy - y^2 = 4x$ $\qquad\qquad$ b) $x^2 - 1 + \cos xy = 0$

Çözüm.

a) $2x + 2y + 2xy' - 2yy' = 4$

$$\Rightarrow y'(2x-2y) = 4-2x-2y$$

$$\Rightarrow y' = \frac{2-x-y}{x-y}$$

b) $2x - (y+xy')\sin xy = 0$

$$\Rightarrow \quad xy'\sin xy = y\sin xy - 2x$$

$$\Rightarrow \quad y' = \frac{y\sin xy - 2x}{x\sin xy}$$

4) $y = x + \ln x \quad (x>0)$ fonksiyonunun tersinin türevini ve onun tanım kümesini bulunuz.

Çözüm.

y, $\mathbb{R}_+$ üzerinde sürekli ve bire-birdir.

Dolayısıyla $\quad [f^{-1}(y)]' = \dfrac{1}{f'(x)} = \dfrac{1}{1+\frac{1}{x}} = \dfrac{x}{x+1} \Rightarrow x \in \mathbb{R}_+$

5) $y = 2x^2 - x^4$, $x>1$ fonksiyonunun ters fonksiyonunun türevinin $y_0 = -1$ noktasındaki değerini bulunuz.

Çözüm.

$y_0 = -1 \Rightarrow 2x^2 - x^4 = -1 \Rightarrow x^4 - 2x^2 - 1 = 0$

$x^2 = t \Rightarrow \quad t^2 - 2t - 1 = 0$

$$t_{1,2} = \frac{2 \mp \sqrt{4+4}}{2}$$

$$= 1 \mp \sqrt{2}$$

$x^2 = 1 \mp \sqrt{2} \implies x_0 = \sqrt{1+\sqrt{2}}$ olur.

$f'(x) = y' = 4x - 4x^3$

$$\implies \left[f^{-1}(-1)\right]' = \frac{1}{f'\left(\sqrt{1+\sqrt{2}}\right)} = -\frac{1}{4\sqrt{2}\sqrt{1+\sqrt{2}}}$$

olur.

6) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ fonksiyonunun $x_0 = 2$ noktasındaki teğet ve normal denklemlerini yazınız.

Çözüm –

$x_0 = 2 \implies y_0 = \dfrac{1}{5}$

$f'(x) = \dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$ $\qquad f'(2) = \dfrac{-4}{25}$

Teğet denk: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

$$\implies y - \frac{1}{5} = \frac{-4}{25}(x-2)$$

$$\implies 25y + 4x = 13$$

Normal denk: $y - y_0 = \dfrac{-1}{f'(x_0)}(x - x_0)$

$$\implies y - \frac{1}{5} = -\frac{25}{4}(x-2)$$

$$4y + 25x = 50 + \frac{4}{5} = \frac{254}{5}$$

7) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x^3 + \beta x, & |x| \leq 2 \text{ ise}, \quad (-2 \leq x \leq 2) \\ \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{1}{x}, & |x| > 2 \text{ ise} \quad x < -2,\ x > 2 \end{cases}$$

fonksiyonunun

a) her yerde sürekli
b) her yerde türevlenebilir

olması için α ve β ne olmalıdır?

Çözüm.

a) $f(-2^-) = \lim\limits_{x \to -2^-} \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{1}{x} = \frac{1}{\pi} \cdot \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{-1}{6}$

$f(-2^+) = \lim\limits_{x \to -2^+} \alpha x^3 + \beta x = -8\alpha - 2\beta$

$\Rightarrow -8\alpha - 2\beta = -\frac{1}{6} \Rightarrow 48\alpha + 12\beta = 1$

$f(2^-) = \lim\limits_{x \to 2^-} \alpha x^3 + \beta x = 8\alpha + 2\beta$

$f(2^+) = \lim\limits_{x \to 2^+} \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{1}{x} = \frac{1}{6}$

$\Rightarrow 8\alpha + 2\beta = \frac{1}{6} \Rightarrow 48\alpha + 12\beta = 1$

Fonksiyonun her yerde sürekli olması için

$48\alpha + 12\beta = 1$ olmalıdır.

b) $f'(-2^-) = \left(\frac{1}{\pi}\arcsin\frac{1}{x}\right)'\Big|_{x=-2}$

$$= \frac{1}{\pi} \frac{-1/x^2}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}}\Bigg|_{x=-2}$$

$$= \frac{1}{\pi} \frac{-1/4}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}} = \frac{-1}{2\pi\sqrt{3}} = f'(2^+)$$

$$f'(-2^+) = f'(2^-) = \left(\alpha x^3 + \beta x\right)'\Big|_{\substack{x=-2\\x=2}}$$

$$= 3\alpha x^2 + \beta \Big|_{\substack{x=-2\\x=2}} = 12\alpha + \beta$$

$\Rightarrow \quad 12\alpha + \beta = \frac{-1}{2\sqrt{3}\pi}$ için fonksiyon her yerde türevlenebilir.

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} 48\alpha + 12\beta &= 1 \\ -4/\ 12\alpha + \beta &= \frac{-1}{2\sqrt{3}\pi} \end{aligned}$$

$$8\beta = \frac{2}{\sqrt{3}\pi} + 1 \Rightarrow \beta = \frac{1}{4\sqrt{3}\pi} + \frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{8 + 4\sqrt{3}\pi}{32\sqrt{3}\pi}$$

$$= \frac{2+\sqrt{3}\pi}{8\sqrt{3}\pi}$$

$$= \frac{2\sqrt{3} + 3\pi}{24\pi}$$

$$\Rightarrow \alpha = -\frac{2\sqrt{3}+\pi}{96\pi}$$

Yüksek Mertebeden Türevler ve Diferansiyeller

Tanım 82

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ $y = f(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde (a da sağdan ve b de soldan) $(n-1)$. mertebeden türevlenebilir olsun. Eğer $f^{(n-1)} : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde (a da sağdan ve b de soldan) türevlenebiliyorsa, bu fonksiyonun $[f^{(n-1)}(x)]' : [a,b] \to \mathbb{R}$ türev fonksiyonuna f in (n). mertebeden türevi denir ve

$$y^{(n)},\ f^{(n)}(x),\ \frac{d^n y}{dx^n},\ \frac{d^n f(x)}{dx^n},\ \frac{d}{dx} = D \Rightarrow D^n y = D^n f(x)$$

sembollerinden birisi ile gösterilir. Verilen bir f fonksiyonunun 0. mertebeden türevi f nin kendisi olarak yani $f^{(0)} = f$ gibi tanımlanır.

ÖRNEK -

Aşağıdaki fonksiyonların n. mertebeden türevlerini bulunuz.

a) $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^{\alpha}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$

Çözüm -

a) $f(x) = x^{\alpha} \Rightarrow f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} \Rightarrow f''(x) = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$

$\Rightarrow f'''(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^{\alpha-3}$

$\vdots$

$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$