Birinci Mertebeden Diferansiyel Denklemler

$$f(x,y,y')=0$$

veya

$$\frac{dy}{dx}=F(x,y)$$

veyahut

$$P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=0$$

formundaki denklemlerdir. Birinci mertebeden dif. denk'in çözümü için genel bir kural yoktur. $y=\varphi(x,c)$ şeklinde veya $G(x,y,c)=0$ şeklinde genel çözümü ifade edebiliriz.

1°) Değişkenlerine Ayrılabilen Dif. Denklemler

$P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=0$ şeklindeki diferansiyel denklem

$$p(x)\,dx+q(y)\,dy=0$$

şeklinde ifade edilebiliyorsa o zaman $P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=0$ denklemi değişkenlerine ayrılabilen denklemdir. $p(x)\,dx+q(y)\,dy=0$ denklemi terim terim integre edilerek istenen çözüm

$$A(x)+B(y)=C$$

şeklinde elde edilir.

Ör/ 1. $x^2y\,dx-(1-x)\,dy=0$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$$\frac{x^2\cancel{y}\,dx}{\cancel{y}(1-x)}-\frac{(\cancel{1-x})\,dy}{y(\cancel{1-x})}=\frac{0}{y(1-x)} \qquad (y\neq 0,\ 1-x\neq 0)$$

NOT: $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$ → $P(x)$: m. dereceden, $Q(x)$: n. dereceden

- $m\geq n$ ise polinom bölmesi
- $m<n$ ise basit kesirlere ayrılır.

$$\int\frac{x^2}{1-x}\,dx-\int\frac{1}{y}\,dy=\int 0$$

$$\int\left[-x-1+\frac{1}{1-x}\right]dx-\int\frac{dy}{y}=\int 0$$

$$\begin{array}{r|l} x^2 & 1-x \\ \hline -x^2+x & -x-1 \\ x & \\ -x+1 & \\ 1 & \end{array}$$

$$-\frac{x^2}{2}-x-\ln(1-x)-\ln y=c$$

$$-\ln[y(1-x)]=c+\frac{x^2}{2}+x$$

$$\frac{1}{y(1-x)}=c+\frac{x^2}{2}+x$$

$$\boxed{y=\frac{1}{(1-x)\left(\frac{x^2}{2}+x+c\right)}}$$ Genel Çözüm.

Ör/2. $\frac{dy}{dx}+e^{x}y=e^{x}y^{2}$ dif. denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$$\frac{dy}{dx}=e^{x}y^{2}-e^{x}y \Rightarrow dy=(e^{x}y^{2}-e^{x}y)\,dx$$

$$dy=e^{x}(y^{2}-y)\,dx \Rightarrow \int\frac{dy}{y^{2}-y}=\int e^{x}\,dx \qquad (y^{2}-y\neq 0)$$

$$\int\left[-\frac{1}{y}+\frac{1}{y-1}\right]dy=\int e^{x}dx \Rightarrow -\ln|y|+\ln|y-1|=e^{x}+c$$

$$\boxed{\ln\left|\frac{y-1}{y}\right|=e^{x}+c}$$ Genel çözüm.

$$\frac{1}{y^{2}-y}=\frac{1}{y(y-1)}=\frac{A}{y}+\frac{B}{y-1}$$

$A=-1$

$B=1$

Ör/3 Herhangi bir noktasındaki teğetinin eğimi $\frac{x(1+y)}{\sqrt{5-x^{2}}}$ olan ve $A(2,0)$ noktasından geçen eğrinin denklemini bulunuz.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x(1+y)}{\sqrt{5-x^2}} \Rightarrow \int \frac{dy}{1+y} = \int \frac{x}{\sqrt{5-x^2}}\,dx \Rightarrow \int \frac{dy}{1+y} = \int \frac{-\frac{du}{2}}{\sqrt{u}}$$

$5-x^2 = u$

$-2x\,dx = du$

$x\,dx = -\frac{du}{2}$

$$\ln|1+y| = -\sqrt{u} + C \Rightarrow \boxed{\ln|1+y| = -\sqrt{5-x^2} + C}$$ Genel Çözüm

$$\left.\begin{matrix} x=2 \\ y=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \ln|1+0| = -\sqrt{5-4} + C$$

$$0 = C - 1 \Rightarrow C = 1 \Rightarrow \boxed{\ln|1+y| = 1 - \sqrt{5-x^2}}$$ Özel Çözüm

Ör/4. Bir kimyevi madde, suda erimemiş miktar ve doymuş eriyik ile o anındaki konsantrasyon farkının çarpımı ile doğru orantılı olarak çözülmektedir. 100 gr doymuş eriyik ile 50 gr. kimyevi maddenin çözüldüğü bilinmektedir. 30 gr. madde 100 gr. su ile karıştırıldığında 2 saatte 10 gr. eriyorsa, 5 saatte ne kadar madde çözülmüş olur?

x, t saat sonunda erimemiş kimyevi maddenin miktarını göstersin. Bu anda eriyiğin gerçek konsantrasyonu $\frac{30-x}{100}$ ve doymuş eriyiğinki ise $\frac{50}{100}$ 'dür. Böylece

$$\frac{dx}{dt} = kx\left(\frac{50}{100} - \frac{30-x}{100}\right) \Rightarrow \frac{dx}{dt} = kx.\left(\frac{x+20}{100}\right) \Rightarrow \frac{dx}{x\left(\frac{x+20}{100}\right)} = k.dt$$

$$\Rightarrow \int \frac{100\,dx}{x(x+20)} = \int k\,dt$$

$$\int \frac{dx}{x(x+20)} = \int \left(\frac{A}{x} + \frac{B}{x+20}\right)dx = \int \left[\frac{1}{20x} - \frac{1}{20(x+20)}\right]dx$$

$$\int\left[\frac{100}{20x}-\frac{100}{20(x+20)}\right]dx=\int k\,dt$$

$$\int\left(\frac{5}{x}-\frac{5}{x+20}\right)dx=\int k\,dt$$

$$5\ln|x|-5\ln|x+20|=kt+c$$

$$\ln\left|\frac{x}{x+20}\right|=\frac{kt}{5}+c$$

$t=0 \quad x=30$

$t=2 \quad x=20$

$t=0 \quad x=30$

$t=5 \quad x=x$

$$\int_{30}^{20}\left[\frac{5}{x}-\frac{5}{x+20}\right]dx=\int_0^2 k\,dt$$

$$5\ln|x|-5\ln|x+20|\,\Big|_{30}^{20}=kt\,\Big|_0^2$$

$$\ln\left|\frac{x}{x+20}\right|\,\Big|_{30}^{20}=\frac{k}{5}t\,\Big|_0^2$$

$$\ln\frac{20}{40}-\ln\frac{30}{50}=\frac{k}{5}\cdot 2$$

$$\ln\frac{1}{2}-\ln\frac{3}{5}=\frac{2k}{5}$$

$$k=\frac{5}{2}\ln\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{5}}$$

$$=\frac{5}{2}\ln\frac{5}{6}=-0.46$$

$$\int_{30}^{x}\left[\frac{5}{t}-\frac{5}{t+20}\right]dt=\int_0^5 k\,dt \Rightarrow \ln\left|\frac{t}{t+20}\right|_{30}^{x}=\frac{-0.46}{5}\cdot 5$$

$$\ln \left| \frac{t}{t+20} \right|_{30}^{x} = \frac{-0.46}{5} \cdot 5$$

$$\ln \left| \frac{x}{x+20} \right| - \ln \left| \frac{3\cancel{0}}{5\cancel{0}} \right| = -0.46$$

$$\ln \left[\frac{5x}{3(x+20)} \right] = -0.46 = k$$

$$\frac{5x}{3(x+20)} = e^{-0.46}$$

$$\frac{x}{x+20} = \frac{3}{5} e^{-0.46} = 0.38$$

$$\frac{x}{x+20} = \frac{38}{100} \Rightarrow x \cong 12$$

$$100x = 38x + 38 \cdot 20$$

$$62x = 38 \cdot 20$$

$$x = \frac{38 \cdot \cancel{20}^{\,10}}{\cancel{62}_{\,31}} \cong 12$$

$30 - 12 = 18$ gr madde çözülmüş olur.

2. Homojen dif. denklemler

$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$ denklemini gözönüne alalım.

1. yol

Bu diferansiyel denklemi $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ şeklinde yazıldığında

$f(x,y) = g\left(\frac{y}{x}\right)$ olacak şekilde ifade edilebiliyorsa verilen dif denkleme homojen dif. denklem denir.

2. yol

$P(x,y)$ ve $Q(x,y)$ fonksiyonları

$P(\lambda x, \lambda y) = \lambda^{n} P(x,y)$

$Q(\lambda x, \lambda y) = \lambda^{n} Q(x,y)$ → derece

olacak şekilde aynı dereceden homojen fonksiyonlar ise diferansiyel denkleme homojen dif. denklem denir.

Çözüm için her iki yolda da $\frac{y}{x} = u$ dönüşümü yapılır.

$\frac{y}{x} = u \Rightarrow y = u.x$

- $P\,dx + Q\,dy = 0 \longrightarrow dy = u\,dx + x\,du$
- $\frac{dy}{dx} = g\left(\frac{y}{x}\right) \longrightarrow y' = u'x + u$

Yapılan dönüşümle homojen dif. denklem değişkenlerine ayrılabilen dif. denkleme dönüşür.

Ör/1. $\underbrace{(x^3+y^3)}_{P}dx - \underbrace{xy^2}_{Q}dy = 0$ dif. denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$P(x,y) = x^3+y^3$ $\quad P(\lambda x, \lambda y) = \lambda^3x^3 + \lambda^3y^3 = \lambda^3(x^3+y^3) = \lambda^3 P(x,y)$

Homojen dif denk.

$Q(x,y) = -xy^2$ $\quad Q(\lambda x, \lambda y) = -\lambda x . \lambda^2 y^2 = -\lambda^3 xy^2 = \lambda^3 . Q(x,y)$

$\frac{y}{x} = u \Rightarrow y = u.x \Rightarrow dy = udx + xdu$

$\Rightarrow [x^3 + (ux)^3]dx - x.(ux)^2.[udx + xdu] = 0$

$x^3[1+u^3]dx - x^3u^3dx - x^4u^2du = 0$

$x^3[1+\cancel{u^3}-\cancel{u^3}]dx - x^4u^2du = 0$

$\frac{x^3dx}{x^4} - \frac{x^4u^2du}{x^4} = \frac{0}{x^4} \quad (x \neq 0)$

$\int\frac{dx}{x} - \int u^2du = \int 0$

$\ln|x| - \frac{u^3}{3} = \ln c$

$$\boxed{\ln|x| - \frac{y^3}{3x^3} = c}$$

Genel çözüm.

Ör/2. $x \cdot \cos\frac{y}{x}\frac{dy}{dx} = y\cos\frac{y}{x} + x$ dif. denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y\cos\frac{y}{x} + x}{x\cos\frac{y}{x}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \frac{1}{\cos\frac{y}{x}} = g\left(\frac{y}{x}\right)$$ Homojen dif. denk.

$$\left.\begin{aligned} &\frac{y}{x} = u \Rightarrow y = ux \\ &\qquad \frac{dy}{dx} = u'x + u \end{aligned}\right\} \Rightarrow u'x + \cancel{u} = \cancel{u} + \frac{1}{\cos u} \Rightarrow \frac{du}{dx}\cdot x = \frac{1}{\cos u}$$

$$\Rightarrow \int \cos u \, du = \int \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \sin u = \ln|x| + \ln c$$

$$\Rightarrow \sin\frac{y}{x} = \ln(cx)$$

$$\Rightarrow \frac{y}{x} = \arcsin[\ln(cx)]$$

$$\Rightarrow \boxed{y = x\arcsin\ln(cx)}$$

Genel Çözüm.

Ör/3. $(y + \sqrt{x^2+y^2})\,dx - x\,dy = 0$ dif. denkleminin $y(1) = 0$ başlangıç koşuluna uygun çözümünü bulunuz.

$$P(x,y) = y + \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow P(\lambda x, \lambda y) = \lambda y + \sqrt{\lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2}$$

$$= \lambda y + \lambda\sqrt{x^2+y^2} = \lambda P(x,y)$$

$$Q(x,y) = -x$$

$$\Downarrow$$

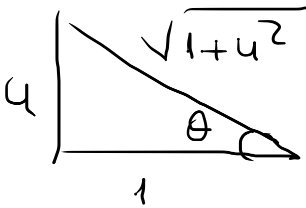
$$Q(\lambda x, \lambda y) = -\lambda x = \lambda Q(x,y)$$ Homojen dif. denk.

$$\frac{y}{x} = u \Rightarrow y = ux \Rightarrow dy = u\,dx + x\,du$$

$$\left[ux + \sqrt{x^2 + (ux)^2}\,\right]dx - x\left[u\,dx + x\,du\right] = 0$$

$u = \tan\theta$

$du = \sec^2\theta\, d\theta$



$$\left[\cancel{ux} + \sqrt{x^2(1+u^2)} - \cancel{ux}\right]dx - x^2\,du = 0$$

$$\frac{\cancel{x}\,\sqrt{\cancel{1+u^2}}\;dx}{x^{\cancel{2}}\sqrt{\cancel{1+u^2}}} - \frac{\cancel{x^2}\,du}{\cancel{x^2}\sqrt{1+u^2}} = 0 \qquad (x \neq 0)$$

$$\int \frac{dx}{x} - \int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \int 0 \;\Rightarrow\; \int \frac{dx}{x} - \int \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{\underbrace{\sqrt{1+\tan^2\theta}}_{\sec^2\theta}} = \int 0$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{x} - \int \sec\theta\, d\theta = \int 0$$

$$\Rightarrow \ln|x| - \ln|\sec\theta + \tan\theta| = \ln c$$

$$\Rightarrow \ln|x| - \ln\left|\sqrt{1+u^2} + u\right| = \ln c$$

$$\frac{x}{u + \sqrt{1+u^2}} = c \;\Rightarrow\; \frac{x}{\frac{y}{x} + \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}} = c$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{y + \sqrt{x^2+y^2}} = c} \text{ G.C.}$$

$y(1)=0 \Rightarrow \begin{array}{l} x=1 \\ y=0 \end{array}$

$$\frac{x^2}{y+\sqrt{x^2+y^2}} = c \Rightarrow c = 1$$

$$\Rightarrow x^2 = y+\sqrt{x^2+y^2}$$

$$x^2-y = \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow (x^2-y)^2 = x^2+y^2$$

$$\Rightarrow x^4-2x^2y+y^2 = x^2+y^2$$

$$\Rightarrow x^4-2x^2y = x^2$$

$$\Rightarrow 2x^2y = x^4-x^2$$

$$\Rightarrow \boxed{y = \frac{x^2-1}{2}} \text{ Özel çözüm}$$