Not: Tüm polinomlar, tüm rasyonel fonksiyonlar, trigonometrik fonksiyonlar, $x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m}$ şeklindeki fonksiyonlar, mutlak değer fonksiyonu tanımlı oldukları her yerde sürekli olan fonksiyonlardır.

Teorem:

Eğer f ve g fonksiyonlarının her ikisi de bir a noktasını içeren bir aralık üzerinde tanımlı ve her ikisi de a noktasında sürekli iseler o zaman

- $f \mp g$
- $k \cdot f \quad (k \in \mathbb{R})$
- $f \cdot g$
- $\dfrac{f}{g}$ ($g(a) \neq 0$ olması koşuluyla)
- $[f]^{1/n}$ (n çift iken $f(a) > 0$ olması koşuluyla)

Sürekli fonksiyonların bileşkesi

Eğer $f[g(x)]$ a noktasını içeren bir aralık üzerinde tanımlı ve eğer f L'de sürekli ve de $\lim_{x \to a} g(x) = L$ ise o zaman

$$\lim_{x \to a} f[g(x)] = f\left[\lim_{x \to a} g(x)\right] = f(L) \text{'dir.}$$

Özel olarak $g(x)$ a'da sürekli ise ($\lim_{x\to a} g(x) = g(a)$ ise) o zaman

$$\lim_{x\to a} f[g(x)] = f[g(a)]$$

dır.

$\lim_{x\to\infty} \sin x \to$ limit yok.

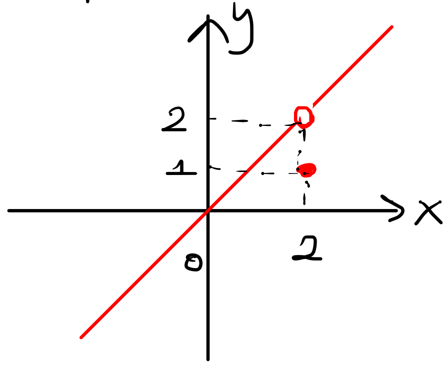
Süreksizlik

Ör.

$$g(x) = \begin{cases} x & x \neq 2 \\ 1 & x = 2 \end{cases}$$

fonksiyonunun $x=2$'de sürekliliğini inceleyiniz.

$g(2) = 1$ $\lim_{x\to 2^{\mp}} x = 2 \neq g(2)$ süreksiz. kaldırılabilir süreksiz.



Ör.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{x^2} & x \neq 0 \\ 2 & x = 0 \end{cases}$$

fonksiyonu $x=0$'da sürekli midir?

$f(0) = 2$

$$\lim_{x\to 0^{\mp}} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0^{\mp}} \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x\to 0^{\mp}} \frac{\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}\cdot 2} = \frac{1}{2} \neq 2 = f(0)$$

kaldırılabilir süreksiz.

Ör/ $f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & |x| \leq 1 \\ \dfrac{1}{|x|} & |x| > 1 \end{cases}$ fonksiyonunun $x=-1$ ve $x=1$'de sürekliliğini inceleyiniz.

$$= \begin{cases} \dfrac{-1}{x} & x < -1 \\ 1-x^2 & -1 \leq x \leq 1 \\ \dfrac{1}{x} & x > 1 \end{cases}$$

$f(-1) = 0$

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} \left(\frac{-1}{x}\right) = 1$$

$\neq$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} (1-x^2) = 0$$

süreksizdir. Sıçramalı süreksizdir.

$f(1) = 0$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (1-x^2) = 0$$

$\neq$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x} = 1$$

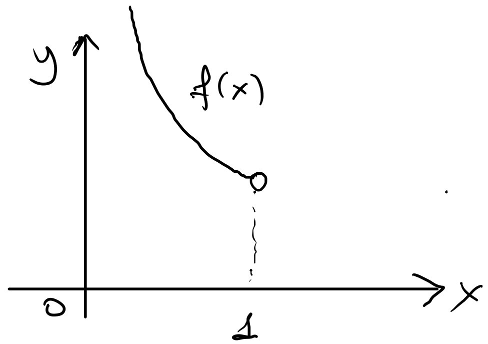
Sıçramalı süreksizdir.

* f fonksiyonunun limiti mevcut değilse (limit değeri sonlu değilse) fonksiyon limit alınan noktada sonsuz süreksizliğe sahiptir denir.

Teorem: (Max-min teoremi)

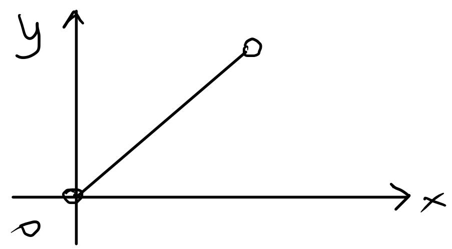
Eğer f(x) fonksiyonu [a,b] kapalı aralığı üzerinde tanımlı ve sürekli ise o zaman $\forall x \in [a,b]$ için

$\underbrace{f(p)}_{\text{min.}} \leq f(x) \leq \underbrace{f(q)}_{\text{max.}}$ olacak şekilde $p, q \in [a,b]$ noktaları vardır.



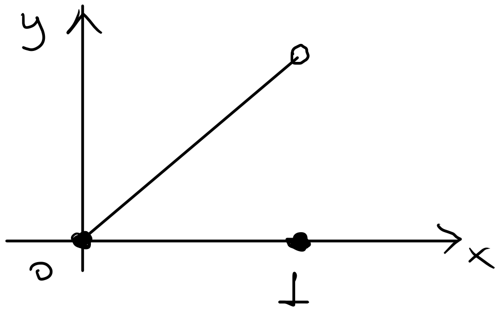
D(f): (0,1)

Tanım kümesi açık aralık olduğundan max ve min dan söz edilemez.
(sınırlı değil)



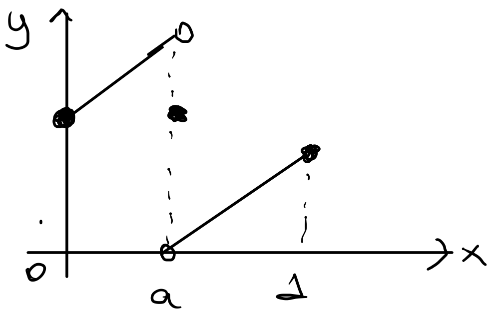
D(f): (0,1)

Tanım kümesi açık aralık olduğundan max ve min dan söz edilemez.
(sınırlı)



$D(f): [0,1]$

f fonksiyonu $x=1$'de süreksiz olduğundan bir max değere sahip değildir.
Ancak min. değeri vardır. (sınırlı)



$D(f): [0,1]$

f fonksiyonu tanım aralığının bir iç noktasında süreksizdir. (sınırlıdır)
Fakat max. min değeri yoktur.

Teorem (Aradeğer teoremi)

Eğer $f(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ kapalı aralığı üzerinde sürekli ve s $f(a)$ ile $f(b)$ arasında bir sayı ise o zaman $f(c)=s$ olacak şekilde $c\in[a,b]$ sayısı vardır.

Ör/ $f(x)=x^3-4x$'in pozitif ve negatif olduğu aralıkları belirleyiniz.

$D(f)=(-\infty,\infty)$ $\qquad f(x)=0 \Rightarrow x^3-4x=0 \Rightarrow x(x^2-4)=0$

$x_1=0, \; x_2=-2, \; x_3=2$

$(-\infty,-2] \cup [-2,0] \cup [0,2] \cup [2,\infty)$

$-3 \in (-\infty,-2]$, $-1 \in [-2,0]$, $1 \in [0,2]$, $3 \in [2,\infty)$

$f(-3) = -15 < 0$, $f(-1) = 3 > 0$, $f(1) = -3 < 0$, $f(3) = 15 > 0$

Ör/ $x^3 - x - 1 = 0$ denkleminin $[1,2]$ aralığında bir kökü olduğunu gösteriniz.

$f(x) = x^3 - x - 1$ $\quad D(f) : (-\infty,\infty)$ $\quad f$, $[1,2]$'de süreklidir.

$$\left.\begin{aligned} f(1) &= -1 < 0 \\ f(2) &= 5 > 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{Ara değer teo. göre } f(c) = 0 \text{ o.ş. } c \in [1,2] \text{ vardır.}$$

Sabit Nokta Teoremi

f'in $[0,1]$ kapalı aralığı üzerinde sürekli ve her $x \in [0,1]$ için $0 \le f(x) \le 1$ olduğunu kabul edelim. $[0,1]$ aralığında $f(c) = c$ olacak şekilde bir c sayısının var olduğunu gösteriniz.

- $f(0) = 0$ ve $f(1) = 1$ ise yapacak bir şey yoktur.

$f(0) \neq 0$ ve $f(1) \neq 1$ kabul edelim.

$g(x) = f(x) - x$

$g(0) = f(0) > 0$

$g(1) = f(1) - 1 < 0$

$g(1) < 0 < g(0)$

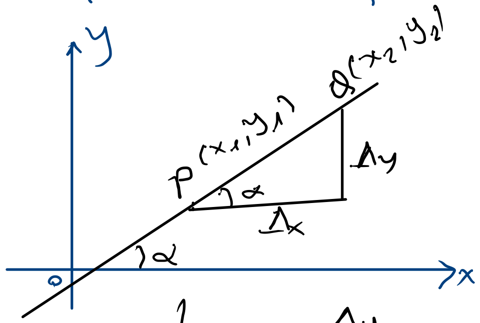
$g(c) = 0 \quad c \in [0,1]$

$g(c) = f(c) - c$

$\Rightarrow f(c)-c=0 \Rightarrow f(c)=c$

Türev

Teğet doğruları ve eğimleri



$$\tan\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

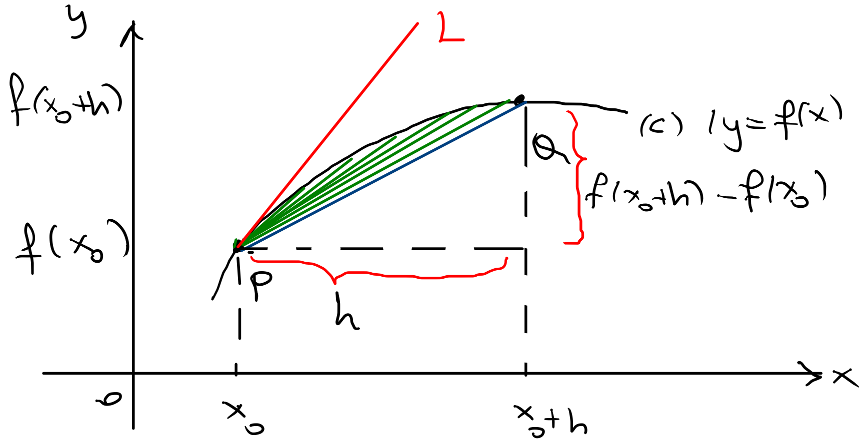
$$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan\alpha$$ Dik olmayan bir doğrunun eğimi

Sonuç: 1°) iki doğrunun birbirine paralel olması için g.y.k eğim birbirine eşit olmasıdır.

2°) iki doğru birbirine dik ise eğimleri çarpımı -1'dir

lerinin

'r.



Bir c eğrisi ve bu eğrinin bir P noktasından geçen L doğrusu verilmiş olsun. C eğrisi üzerinden P'den farklı fakat giderek P'ye yaklaşan Q noktalarını alalım. Eğer L doğrusunun eğimi, Q noktası P ye yaklaşırken, bu PQ doğrularının eğimleri ise o zaman L doğrusu P'de eğriye teğettir.

PQ doğrusunun eğimi;

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{-[f(x_0)-f(x_0+h)]}{h}$$ (Newton bölümü ya da fark bölümü)

Dik olmayan teğet doğruları

f fonksiyonu x_0 noktasında sürekli ve $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = m$ limitinin mevcut olduğunu kabul edelim. O zaman m eğimine sahip olan ve $P(x_0, f(x_0))$ noktasından geçen doğruya $y=f(x)$ eğrisinin P'deki teğet doğrusu denir ve denklemi

$$y = m(x-x_0) + y_0$$

şeklindedir.

Ör/ $y=x^2$ eğrisine $(1,1)$ noktasında teğet olan doğrunun denk.'ni bulunuz.

Dikey Teğetler

f fonksiyonu $P(x_0, y_0) = P(x_0, f(x_0))$ noktasında sürekli ve

ya $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \infty$

ya da

$\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = -\infty$

ise o zaman $x=x_0$ dikey doğrusu P'de fonksiyonun grafiğine teğettir. Eğer Newton bölümünün limiti ∞ veya $-\infty$ hariç mevcut değilse fonksiyon P'de teğete sahip olmaz.

Örnekler

1) $f(x) = x^{1/3}$ fonksiyonunun orjindeki teğet doğrusu y-eksenidir.

2) $f(x) = x^{2/3}$ fonksiyonu orjinde herhangi bir teğete sahip değildir.

3) $y = |x|$ fonksiyonu $x=0$'da tepete sahip midir?

Bir eğrinin eğimi :

Bir c eğrisinin bir P noktasındaki eğimi, P noktasında eğriye teğet olan doğrunun eğimidir.

Ör/ $y = \dfrac{x}{3x+2}$ eğrisinin $x=-2$ noktasındaki eğimini bulunuz.

Normal Doğrusu

Eğer bir C eğrisinin bir P noktasındaki teğeti L ise P'den geçen ve L'ye dik olan N doğrusuna eğrinin P'deki normal doğrusu denir.

L yatay ⇒ N dikey

L dikey ⇒ N yatay

L dikey veya yatay değilse $\underbrace{N}_{\text{Normal}}$'in eğimi $= \dfrac{-1}{\underbrace{L}_{\text{Teğet}}\text{'nin eğimi}}$

Ör/ $y=x^2$'nin $(1,1)$ noktasındaki normalinin eğimini ve normal doğrusunun denklemini bulunuz.

Türevin tanımı

Bir fonksiyonun türevi mevcut olması koşuluyla

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = Df = Dy \quad \left(\frac{d}{dx} = D \text{ denirse}\right)$$

limiti ile tanımlanan başka bir f' fonksiyonudur.

Buna göre bir f fonksiyonunun x_0 noktasındaki türevi fonksiyonun x_0 noktasındaki teğetinin eğimidir.

Teğet doğ. denk: $y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0$ / Normal doğ. denk: $y=\frac{-1}{f'(x_0)}(x-x_0)+y_0$

- $D(f')$, $D(f)$'den küçüktür veya $D(f)$'e eşittir.
- fonksiyonun diferansiyellenebilir (türevlenebilir) olmadığı ve $D(f)$'in uç noktası olmayan x değerlerine f'in tekil noktaları denir.
- $$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$ $$\left(\begin{array}{l} x_0+h = x \\ h = x-x_0 \end{array} \right)$$ $$h\to 0$$ $$x\to x_0$$

- (Sağ - sol türev)

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'_+(x) \to \text{sağ türev}$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'_-(x) \to \text{sol türev}$$

- $\forall x \in (a,b)$ için $f'(x)$ mevcut ve $f'_+(a)$ ile $f'_-(b)$'nin her ikisi de mevcut ise f fonksiyonu $[a,b]$ kapalı aralığı üzerinde türevlenebilirdir denir.

Ör/ $f(x)=\begin{cases} 2x-1 & x\geq 0 \\ x^2+2x+7 & x<0 \end{cases}$ fonksiyonu $x=0$'da türevlenebilir midir?

TÜREV TANIMIYLA İLGİLİ ÖRNEKLER

1) $f(x) = ax+b$

2) $f(x) = c$ $\quad$ (c → sbt)

3) $f(x) = x^2$

4) $f(x) = \frac{1}{x}$

5) $f(x) = \sqrt{x}$

6) $f(x) = x^n \quad n \in \mathbb{N} \quad (n \in \mathbb{R})$

NOT: Bir türev fonksiyonunun sürekli olması gerekmemesine karşın sürekli fonksiyonlar gibi türev fonksiyonu da aradeğer özelliğine sahiptir.

Teorem: f fonksiyonu $x=a$ noktasında türeve sahip ise bu noktada süreklidir. (Teoremin tersi her zaman doğru değildir. ör/ $f(x)=|x|$ $x=0$'da süreklidir ama türevi yoktur)

TÜREV KURALLARI

f ve g fonksiyonları x'de türevlenebilir fonksiyonlar olsunlar

1) $(f \mp g)'(x) = f'(x) \mp g'(x)$

2) $(c.f)'(x) = c.f'(x)$ $\quad (c \in \mathbb{R})$

3) $(f.g)'(x) = f'(x).g(x) + g'(x).f(x)$

$$\left\{ (f_1 . f_2 . f_3 \cdots f_n)'(x) = f_1'(x).f_2(x).f_3(x).\cdots f_n(x) + f_1(x).f_2'(x)f_3(x)\cdots f_n(x) + \cdots + f_1(x)f_2(x)\cdots f_n'(x) \right\}$$

4) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x).g(x) - g'(x).f(x)}{[g(x)]^2}$

Örnekler

1) $f(x) = 5\sqrt{x} + \frac{3}{x} - 18 \Rightarrow f'(x) =$

2) $y = \frac{t^4}{7} - 3t^{7/3} \Rightarrow$

3) $y = \frac{3x^3 - 4}{x}$ eğrisine $(-2, y)$ noktasında teğet olan doğrunun denklemini yazınız.

4) $y = u.v$, $u(2) = 2$, $u'(2) = -5$, $v(2) = -1$, $v'(2) = 3 \Rightarrow y'(2) = ?$

5) $(-1,0)$ noktasından geçen ve $y = \frac{x-1}{x+1}$ doğrusuna teğet olan doğrunun denk. bulunuz.

Zincir Kuralı

$$(f\circ g)'(x) = \{f[g(x)]\}' = g'(x) \cdot f'[g(x)]$$

Ör/ $y = \sqrt{x^2+1}$

Ör/ $y = \left(3x + \frac{1}{(2x+1)^3}\right)^{1/4} \Rightarrow$

Ör/ $\frac{d}{dx}\left[f(\underbrace{\pi . f(x)}_{g(x)})\right] =$

Ör/ $\frac{d}{dx}\left\{\left[f(3-2f(x))\right]^4\right\} =$

$u = u(x)$ olmak üzere;

- $\frac{d}{dx}\left[u^n\right] = n . u' . u^{n-1}$

- $\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{u}\right] = \frac{-u'}{u^2}$

- $\frac{d}{dx}\left[\sqrt{u}\right] = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

- $\frac{d}{dx}\left[|u|\right] = u' . \operatorname{sgn}(u) = u' . \frac{|u|}{u}$

Trigonometrik Fonksiyonların türevleri

$y = \sin x$

$y = \cos x$

$$y = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \Rightarrow$$

$$y = \sec x = \frac{1}{\cos x} \Rightarrow$$

$$y = \csc x = \frac{1}{\sin x} \Rightarrow$$

$$u = u(x) \Rightarrow \quad y = \sin u \Rightarrow y' = u' . \cos u$$

$$y = \cos u \Rightarrow y' = -u' . \sin u$$

$$y = \tan u \Rightarrow y' = u' (1 + \tan^2 u) = u' . \sec^2 u$$

$$y = \cot u \Rightarrow y' = -u' (1 + \cot^2 u) = -u' \csc^2 u$$

$$y = \sec u \Rightarrow y' = u' . \tan u . \sec u$$

$$y = \csc u \Rightarrow y' = -u' . \cot u . \csc u$$

Örnekler

1) $y=\sin(\pi x)+\cos(3x)$

2) $y=x^2\sin\sqrt{x} \Rightarrow$

3) $y=3x+\cot\left(\frac{x}{2}\right)$

4) $y=\tan\frac{\pi x}{4}$ eğrisinin $(1,1)$ noktasındaki teğet ve normal doğrularının denklemlerini bulunuz.

Yüksek Mertebeden Türevler

Eğer $y=f(x)$ fonksiyonunun türevi olan $f'(x)$ x'de diferansiyellenebilir ise (yani Newton bölümünün limiti mevcut ise $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f'(x+h)-f'(x)}{h}=f''(x)$) o zaman buna f'in 2. mertebeden türevi denir.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right)=f''(x)=y''=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2f}{dx^2}=D^2y=D^2f \qquad \left(D=\frac{d}{dx}\right)$$

$$f'''(x)=\left(f''(x)\right)'=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)=\frac{d^3f}{dx^3}=y'''=\frac{d^3y}{dx^3}=D^3y=D^3f$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x)=\left[f^{(n-1)}(x)\right]'=\frac{d^nf}{dx^n}=\frac{d^ny}{dx^n}=y^{(n)}=D^ny=D^nf$$