Örnekler

1) $\{a_n\}=\left\{\dfrac{2n^2-n-1}{5n^2+n-3}\right\}$ dizisinin limitini bulunuz.

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-n-1}{5n^2+n-3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n^2}\left[2-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right]}{\cancel{n^2}\left[5+\frac{1}{n}-\frac{3}{n^2}\right]}=\frac{2}{5}$$

2) $\{a_n\}=\left\{\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n+1}}\right\}$ dizisinin limitini bulunuz.

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n}}{\cancel{n}\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}}=1$$

3) $\{a_n\}=\left\{e^{-\frac{n}{\sqrt{n+1}}}\right\}$ dizisinin limitini bulunuz.

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} e^{-\frac{n}{\sqrt{n+1}}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left[-\frac{n}{\sqrt{n+1}}\right]}=e^{-\infty}=0$$

4) $\{a_n\}=\{\ln(2n+3)-\ln n\}$ dizisinin limitini bulunuz.

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\left[\ln(2n+3)-\ln n\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\ln\left[\frac{2n+3}{n}\right]$$

$$=\ln\left[\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{n}\right]=\ln 2$$

5) $\{a_n\} = \{(2^n+5^n)^{1/n}\}$ dizisinin limitini bulunuz.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (2^n+5^n)^{1/n} = \lim_{n\to\infty}\left[5^n\left(\left(\tfrac{2}{5}\right)^n+1\right)\right]^{1/n} = 5\lim_{n\to\infty}\left[1+\left(\tfrac{2}{5}\right)^n\right]^{1/n} = 5$$

NOT:

- $(a.b)^n = a^n . b^n$
- $s<t$ iken $\left(\frac{s}{t}\right)^n$'in $n\to\infty$ için limiti sıfıra yaklaşır. $\left(\lim_{n\to\infty}\left(\frac{s}{t}\right)^n = 0 \quad (s<t)\right)$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \to 0$

6) $\{a_n\} = \left\{\frac{n.\sin n}{n^2+1}\right\}$ dizisinin limitini bulunuz.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n.\sin n}{n^2+1}$$

$$-1\le \sin n \le 1 \Rightarrow -n \le n.\sin n \le n \Rightarrow \underbrace{\frac{-n}{n^2+1}}_{b_n} \le \underbrace{\frac{n.\sin n}{n^2+1}}_{a_n} \le \underbrace{\frac{n}{n^2+1}}_{c_n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1} = 0 \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{-n}{n^2+1} = 0 \Rightarrow$$

sandviç teo. göre

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n.\sin n}{n^2+1} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n.\sin n}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{(n^2+1).\frac{1}{n}} \quad ?$$

$$\lim_{n\to 0} \frac{\sin n}{n} = 1 \quad , \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 \sin n}{n^3+n} \quad ?$$

$\frac{1}{n} = t$ $\qquad \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$

$n\to\infty \quad t\to 0$

TEOREM Eğer bir $\{a_n\}$ dizisi monoton artan ve üstten sınırlı ise (monoton azalan ve alttan sınırlı) $\{a_n\}$ dizisi yakınsaktır.

$\left\{ a_n = 2^{n-1} - 1 \right\}$

$\lim_{n\to\infty} a_n \to \infty$

$\left(a_1 = 0 \ , \ \forall n \geq 1 \text{ için } a_{n+1} = 1 + 2a_n \right)$

$a_1 = 0 < a_2 = 1 \qquad a_3 = 3 \qquad a_4 = 7$

$a_{n-1} < a_n$ kabul edelim.

$a_n = 1 + 2a_{n-1} < 1 + 2a_n = a_{n+1}$ ✓ artan

Teorem: Bir $\{a_n\}$ dizisi yakınsak ise sınırlıdır. (Teoremin tersi genelde doğru değildir)

$\{a_n\} = \{(-1)^n\} = \{-1, 1, -1, 1, ---\} \rightarrow$ dizi alttan -1, üstten 1 ile sınırlıdır. Dolayısıyla sınırlı bir dizidir. Ama ıraksaktır.

$$\lim_{n\to\infty} a_n \quad \begin{matrix} \nearrow & -1 \; ? \\ \searrow & 1 \; ? \end{matrix}$$ limit mevcut olmadığından ıraksaktır.

Bazı önemli limitler

- Eğer $x>0$ ise $\lim_{n\to\infty} x^{1/n} = 1$'dir.
- Eğer $|x|<1$ ise $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$ dır.
- Her $\alpha>0$ için $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$'dır.
- Her $x\in\mathbb{R}$ için $\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$'dır.
- $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$ dır.
- $\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1$ dir.
- $\forall x\in\mathbb{R}$ için $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$ dir.
- $a>1$ ise $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n} = \infty$ dur. $a>1$ ve $p\in\mathbb{N}$ için $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n^p} = \infty$ dur.

SERİLER

Bir dizinin terimlerinin toplamından oluşan ifadeye seri denir.

$$\{a_n\} = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

Serinin genel terimi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2n} = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{6} + \dots$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots$$ (Serilerin indisi sıfırdan başlayabilir)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n} = \frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=3}^{\infty} a_{n-2}$$

Kısmi toplamlar dizisi ve yakınsaklık.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisini göz önüne alalım.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$ serisinin kısmi toplamlar dizisi,

$$\left.\begin{aligned} S_1 &= a_1 \\ S_2 &= a_1 + a_2 \\ S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ &\vdots \\ S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \\ &\vdots \end{aligned}\right\} \text{ olmak üzere } \{S_n\} = \{S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots\} \text{ şeklindedir.}$$

Eğer bir $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin kısmi toplamlar dizisi yakınsak ise o zaman $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi de yakınsaktır ve serinin toplamı kısmi toplamlar dizisinin limitine yakınsar.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = S$$

$\downarrow$ kısmi toplamlar dizisinin n. genel terimi

$\lim_{n\to\infty} S_n = S \neq \infty$ sonlu bir değer ise seri yakınsaktır.

$S=\infty$ veya $S=-\infty$ ise seri ıraksaktır.

S mevcut değilse de seri ıraksaktır.

Geometrik Seriler

$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \sum_{n=1}^{\infty} a.r^{n-1} = a+ar+ar^2+\dots+ar^{n-1}+\dots$ şeklindeki serilerdir.

$r \rightarrow$ ortak oran

NOT:

- Serinin baş tarafına sonlu sayıda terim eklemek veya sonlu sayıda terimi çıkartmak serinin karakterini değiştirmez.
- Serinin her terimini sıfırdan farklı bir sayı ile çarpmak serinin karakterini değiştirmez.

$S_1 = a$

$S_2 = a + ar$

$S_3 = a + ar + ar^2$

$\vdots$

$S_n = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1}$

$\vdots$

$$S_n = a + \cancel{ar} + \cancel{ar^2} + \dots + \cancel{ar^{n-1}}$$

$$- \quad r S_n = \cancel{ar} + \cancel{ar^2} + \cancel{ar^3} + \dots + ar^n$$

$$S_n(1-r) = a - ar^n \Rightarrow S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \begin{cases} \frac{a}{1-r} \ (\text{yak.}) & |r|<1 \text{ ise} \\ \text{ıraksak} & |r|>1 \text{ ise } (r>1,\ r<-1) \\ \text{ıraksak} & r=1 \text{ ise} \\ \text{ıraksak.} & r=-1 \text{ ise} \end{cases}$$ ***

$r = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a.1^{n-1} = a + a + a + \dots + a + \dots$

$S_n = \underbrace{a + a + \dots + a}_{n.a} = n.a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} n.a = \begin{cases} \infty & a>0 \text{ ise} \\ -\infty & a<0 \text{ ise} \end{cases}$

$r = -1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a.(-1)^{n-1} = a - a + a - a + \dots$

$S_n = a - a + a - a + \dots + a.(-1)^{n-1}$ $\begin{cases} n \text{ çift ise} & 0 \\ n \text{ tek ise} & a \end{cases}$ $\Big\}$ limit mevcut değil

ÖRNEKLER

1. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ Geometrik seridir.

$a=1 \quad r=\frac{1}{2}, \quad |r|=\frac{1}{2}<1 \Rightarrow$ yakınsaktır. Serinin toplamı $\frac{1}{1-\frac{1}{2}}$'ye yakınsar. Yani

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$$

2. $\pi-e+\frac{e^2}{\pi}-\frac{e^3}{\pi^2}+\cdots$ serisinin yakınsaklığını inceleyiniz.

$\left(\frac{a}{1-r}\right)$

$$\pi-e+\frac{e^2}{\pi}-\frac{e^3}{\pi^2}+\cdots=\pi\left(1-\frac{e}{\pi}+\frac{e^2}{\pi^2}-\frac{e^3}{\pi^3}+\cdots\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\pi\left(-\frac{e}{\pi}\right)^{n-1}=\frac{\pi}{1-\left(-\frac{e}{\pi}\right)}=\frac{\pi^2}{\pi+e}$$

$a=\pi \quad r=\frac{-e}{\pi}; \quad |r|=\frac{e}{\pi}<1 \Rightarrow$ geo. seri yakınsaktır.