Teorem 3.3

Regüler Sturm-Liouville probleminin negatif özdeğerlerinin sayısı sonludur.

Bu teoremden ve $w_1(s)=0$ denkleminin köklerinin kareleri problemin özdeğerleri olduğundan $w_1(s)=0$ denkleminin $s=it$ şeklindeki köklerinin sayısının sonlu olduğu ve sadece reel köklerden oluşan kümenin sonsuz olabileceği sonucu çıkar.

Yardımcı Teorem:

$$-y'' + q(x)y = \lambda y \qquad (\lambda \in \mathbb{C})$$

denkleminin $y(0)=\sin\alpha$, $y'(0)=\cos\alpha$ $(-\infty<\alpha<\infty)$ koşullarını sağlayan bir tek $y(x,\lambda)$ çözümü vardır. Ve bu çözüm her $x\in[0,\pi]$ için λ'ya bağlı tam fonksiyondur.
(yani, her noktada sonlu türeve sahip fonksiyon)

Yardımcı teoremden ve

$$\varphi(x,\lambda) = \cos sx + \frac{h}{s}\sin sx + \frac{1}{s}\int_0^x q(\tau)\sin s(x-\tau)\varphi(\tau,\lambda)\,d\tau$$

formülünden yararlanarak $w_1(s)\neq 0$ fonksiyonunun tam fonksiyon olduğu gösterilebilir. O taktirde kompleks analizden bilindiği gibi $w_1(s)=0$ denkleminin her $d>0$ sabiti için $[0,d]$ aralığına ait köklerinin sayısı sonlu olacaktır. Ayrıca $w_1(s)$ çift fonksiyon olduğunda bu denklemin sadece pozitif köklerinin incelenmesi yeterlidir.

Teorem 3.2'den dolayı $|s| \geq s_0$, $x \in [0,\pi]$ için $\varphi(x,\lambda) = O(e^{|t|x})$ dir. Bu formülden $s \geq s_0$ için $x \in [0,\pi]$ iken

$$\varphi(x,\lambda) = O(1), \quad \varphi(x,\lambda) \leq c \quad \text{yazılır.}$$

$$\frac{d}{dx} I(x,\alpha) = \frac{d}{dx}\left[\int_{a(x)}^{b(x)} f(x,\alpha)\, d\alpha\right] = \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial x}\, d\alpha + b'(x) \cdot f(x,b(x)) - a'(x) \cdot f(x,a(x))$$

$$\varphi(x,\lambda) = \cos sx + \frac{h}{s}\sin sx + \frac{1}{s}\int_0^x q(\tau)\sin s(x-\tau)\,\varphi(\tau,\lambda)\,d\tau$$

$$\Rightarrow \varphi'(x,\lambda) = -s\sin sx + h\cos sx + \frac{1}{\cancel{s}}\cdot\cancel{s}\cdot\int_0^x q(\tau)\cos s(x-\tau)\,\varphi(\tau,\lambda)\,d\tau$$

$$= -s\sin sx + \underbrace{h\cos sx + \int_0^x q(\tau)\cos s(x-\tau)\,\varphi(\tau,\lambda)\,d\tau}_{O(1)}$$

$$= -s\sin sx + O(1)$$

bulunur.

$$\varphi(x,\lambda) = O(1), \quad \varphi'(x,\lambda) = -s\sin sx + O(1)$$

$$\Rightarrow \varphi(\pi,\lambda) = O(1), \quad \varphi'(\pi,\lambda) = -s\sin s\pi + O(1) \qquad (s \geq s_0)$$

dir. Bu eşitlikleri $\varphi'(\pi,\lambda) + H\varphi(\pi,\lambda) = 0$ denkleminde yerine yazarsak;

$$-s\sin s\pi + O(1) + H\,O(1) = 0$$

$$\Rightarrow -s\sin s\pi + O(1) = 0 \quad \text{elde edilir.}$$

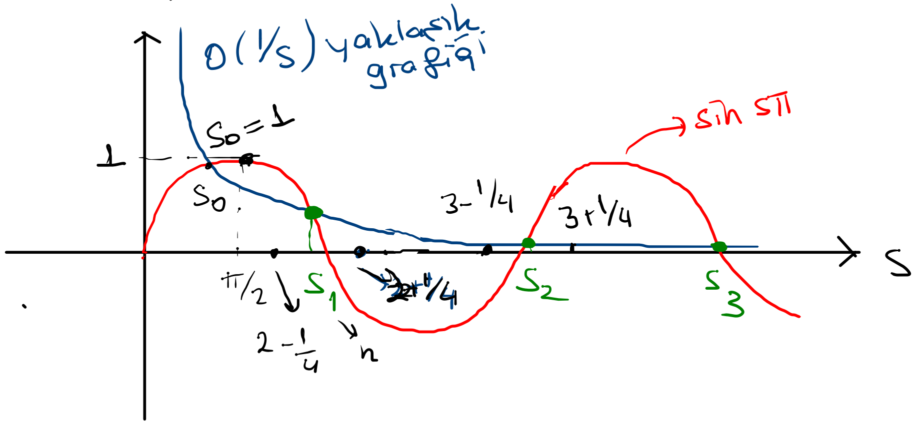
Bu denklemin köklerini inceleyelim. Bunun için denklemi

$$\sin s\pi = O\left(\frac{1}{s}\right)$$

şeklinde yazıp $\sin s\pi$ ve $O\left(\frac{1}{s}\right)$ grafiklerini çizelim.

$m=1$

$|\delta_n| < \frac{1}{4}$.



$|\sin s\pi| \leq C . s^{-1}$ özelliği sağlanır.

$s \in \mathbb{N}$ $\quad \sin s\pi = 0 \Rightarrow s\pi = n\pi \Rightarrow s = n \quad n \in \mathbb{N}$

O halde $O\left(\frac{1}{s}\right)$ ve $\sin s\pi$'nin kesişim noktaları doğal sayıların çok yakınındadır.

Bu grafikten görüldüğü gibi öyle bir $m \in \mathbb{N}$ vardır ki $-s\sin s\pi + O(1)$ denkleminin m'den büyük kökleri $\left(n-\frac{1}{4}, n+\frac{1}{4}\right)$ $(n=m, m+1, m+2, \dots)$ aralığına aittir. (NOT arkada)

$-s\sin s\pi + O(1) = 0$ denkleminin kökleri $s = s_n = n + \delta_n$ şeklinde olsun. $|\delta_n| < \frac{1}{4}$

$$-(n+\delta_n)\sin(n+\delta_n)\pi + O(1) = 0$$

$$\sin(n+\delta_n)\pi - O\left(\frac{1}{n+\delta_n}\right) = 0$$

$$\cancel{\sin n\pi . \cos\delta_n\pi}^{\,0} + \underbrace{\cos n\pi}_{(-1)^n} . \sin\delta_n\pi - O\left(\frac{1}{n+\delta_n}\right) = 0 \Rightarrow (-1)^n . \sin\delta_n\pi - \underbrace{O\left(\frac{1}{n+\delta_n}\right)}_{< \frac{C}{n+\delta_n}} = 0$$

$$\frac{1}{n+\delta_n} = \frac{1}{n+\delta_n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n} = -\frac{\delta_n}{n(n+\delta_n)} + \frac{1}{n} \le \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n} \Rightarrow O\left(\frac{1}{n+\delta_n}\right) \le c\cdot(n+\delta_n)^{-1} < \frac{2c}{n}$$

$$\left|\frac{-\delta_n}{n(n+\delta_n)}\right| \le \frac{|\delta_n|}{n(n-|\delta_n|)} \le \frac{1/4}{n\underbrace{(n-\frac{1}{4})}_{>1}} < \frac{1}{n} \qquad O\left(\frac{1}{n+\delta_n}\right) = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\Rightarrow (-1)^n \cdot \sin \delta_n \pi - O\left(\frac{1}{n}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \sin \delta_n \pi - O\left(\frac{1}{n}\right) = 0 \quad (3.7)$$

Buradan yararlanarak $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_n = 0$ olduğunu gösterelim.

Aksini farzedelim yani $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_n \neq 0$ olsun. ($\{\delta_n\}$ dizisi bu durumda ıraksak veya $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_n = a \neq 0$ dır)

$\{\delta_n\}$ dizisinin $|\delta_{n_m}| > \delta_0 > 0$ olacak şekilde bir alt dizisi vardır.

$$|\pi\delta_{n_m}| > \pi\delta_0 > 0, \qquad |\delta_{n_m}| < \frac{1}{4} \Rightarrow |\pi\delta_{n_m}| < \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow 0 < \pi\delta_0 < |\pi\delta_{n_m}| < \frac{\pi}{4} \Rightarrow 0 < |\sin(\pi\delta_0)| < |\sin(\pi\delta_{n_m})| < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

bulunur. Bu ise (3.7)'a göre $\sin \delta_n \pi = O\left(\frac{1}{n}\right)$ $\left(\Rightarrow |\sin \delta_n \pi| \le \frac{c}{n},\ \lim\limits_{n\to\infty}\frac{c}{n} = 0\right)$ $|\sin \delta_n \pi| \to 0$ olmasına aykırıdır.

NOT: Her $(n-\frac{1}{4}, n+\frac{1}{4})$ aralığına ait olan kök tektir.

$$\left[s\sin s\pi - O(1)\right]'_s = \sin s\pi + \pi s\cos s\pi - O(1)$$

$$s \in \left(n-\tfrac{1}{4}, n+\tfrac{1}{4}\right) \qquad n \geq m.$$

$$\left|\cos\left(n-\tfrac{1}{4}\right)\pi\right| = \left|\cos\left(n+\tfrac{1}{4}\right)\pi\right|$$

$$\Big|\underbrace{\cos n\pi}_{(-1)^n}\cos\frac{\pi}{4} + \cancel{\sin n\pi}^{\,0}\sin\frac{\pi}{4}\Big| = \frac{1}{\sqrt{2}} < |\cos s\pi|$$

Dolayısıyla

$\sin s\pi + \pi s\cos s\pi - O(1)$ ifadesi $(n-\frac{1}{4}, n+\frac{1}{4})$ aralığında ya pozitif ya da negatiftir. Yani

$$s\sin s\pi - O(1) \qquad (s \geq s_0)$$

fonksiyonu gözönüne alınan aralıkta ya artan ya da azalandır. Bu durumda

$s\sin s\pi - O(1) = 0$ denkleminin $(n-\frac{1}{4}, n+\frac{1}{4})$ $(n \geq m)$ aralıklarına ait her kökü tektir.

$$|\delta_n\pi| \cdot \left|\frac{\sin\delta_n\pi}{\delta_n\pi}\right| = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$|\delta_n| = \frac{1}{\pi}\,O\left(\frac{1}{n}\right)\cdot\underbrace{\left|\frac{\delta_n\pi}{\sin\delta_n\pi}\right|}_{\left(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\delta_n\pi}{\sin\delta_n\pi} = 1\right)} \leq \frac{c}{n}$$

$$\delta_n = O\left(\frac{1}{n}\right) \Rightarrow s_n = n + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\left(s_n^2 = n^2 + 2n\,O\left(\tfrac{1}{n}\right) + O\left(\tfrac{1}{n}\right)^2\right)$$

$$\lambda_n = s_n^2 = n^2 + O(1)$$

→ özdeğerlerin asimptotik formülü

$|\lambda_n - n^2| \leq c$ yazılır.

Özdeğerler için daha açık bir formül bulalım. Bunun için $q(x)$ fonksiyonunun $[0,\pi]$ aralığında sürekli türeve sahip olduğunu kabul edelim.

Teorem 3.2'den

$$\varphi(x,\lambda) = \cos sx + O\left(\frac{e^{|t|x}}{|s|}\right)$$ s'in sanal kısmı olduğundan $t=0$ olacaktır. $(s\geq s_0)$

$$\cos(a+b) = \cos a.\cos b - \sin a \sin b$$
$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$
$$\cos a.\cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]$$

$s \geq s_0$ için $\quad \varphi(x,\lambda) = \cos sx + O\left(\frac{1}{|s|}\right) \quad (3.8)$

$$\varphi(x,\lambda) = \cos sx + \frac{h}{s}\sin sx + \frac{1}{s}\int_0^x q(z)\sin s(x-z)\,\varphi(z,\lambda)\,dz \qquad (3.9)$$

$$\varphi'(x,\lambda) = -s\sin sx + h\cos sx + \int_0^x q(z)\cos s(x-z)\,\varphi(z,\lambda)\,dz \qquad (3.10)$$

(3.10)'daki integrali göz önüne alalım ve (3.8)'i kullanalım

$$\int_0^x q(z)\cos s(x-z)\varphi(z,\lambda)\,dz = \int_0^x q(z)\cos s(x-z)\left[\cos sz + O\left(\frac{1}{|s|}\right)\right]dz$$

$$= \int_0^x q(z)\cos s(x-z).\cos sz\,dz + \int_0^x q(z)\cos s(x-z)\,O\left(\frac{1}{|s|}\right)dz$$

$$= \int_0^x q(z)\left[\cos sx\cos sz + \sin sx \sin sz\right].\cos sz\,dz + \int_0^x q(z)\cos s(x-z)\,O\left(\frac{1}{|s|}\right)dz$$

$$= \underbrace{\int_0^x q(z)\cos sx.\cos^2 sz.\,dz}_{\mathrm{I}} + \underbrace{\int_0^x q(z)\sin sx \sin sz\cos sz\,dz}_{\mathrm{II}} + \underbrace{\int_0^x q(z)\cos s(x-z)\,O\left(\frac{1}{|s|}\right)dz}_{\mathrm{III}}$$

I. $\int_0^x q(z)\cdot\cos sx\cdot\cos^2 sz\,dz = \cos sx\int_0^x q(z)\cdot\left(\frac{1+\cos 2sz}{2}\right)dz$

$$= \frac{\cos sx}{2}\int_0^x q(z)\,dz + \frac{\cos sx}{2}\int_0^x q(z)\cos 2sz\,dz$$

$q(z)=u$

$q'(z)\,dz=du$

$(\sin 2sz)'\,dz=dv$

$\sin 2sz=v$

$$= \frac{\cos sx}{2}\int_0^x q(z)\,dz + \cos sx\int_0^x q(z)\left[\frac{\sin 2sz}{2s}\right]'dz$$

$$= \frac{\cos sx}{2}\int_0^x q(z)\,dz + \frac{\cos sx}{2s}\int_0^x q(z)\cdot(\sin 2sz)'\,dz$$

$$= \frac{\cos sx}{2}\int_0^x q(z)\,dz + \underbrace{\frac{\cos sx}{2s}\left[q(z)\sin 2sz\Big|_0^x - \int_0^x \sin 2sz\cdot q'(z)\,dz\right]}_{\leq \frac{c}{s}\quad (\text{sınırlı})}$$

$$= \frac{\cos sx}{2}\int_0^x q(z)\,dz + O\left(\frac{1}{s}\right)$$

II. $\sin sx\int_0^x q(z)\sin sz\cos sz\,dz = O\left(\frac{1}{s}\right)$ (benzer işlemlerle gösterilebilir)

III. $\int_0^x q(z)\cos s(x-z)\cdot O\left(\frac{1}{|s|}\right)dz = O\left(\frac{1}{s}\right)$ (")

$$\varphi'(x,\lambda) = -s\sin sx + h\cos sx + \frac{\cos sx}{2}\int_0^x q(z)\,dz + O\left(\frac{1}{|s|}\right)$$

$$\varphi'(\pi,\lambda) = -s\sin s\pi + h\cos s\pi + \frac{\cos s\pi}{2}\int_0^\pi q(z)\,dz + O\left(\frac{1}{|s|}\right)$$

$$\varphi(x,\lambda) = \cos sx + O\left(\frac{1}{s}\right)$$

$$\varphi(\pi,\lambda) = \cos s\pi + O\left(\frac{1}{s}\right)$$

$$\varphi'(\pi,\lambda) + H\varphi(\pi,\lambda) = 0$$

$$-s\sin s\pi + h\cos s\pi + \frac{\cos s\pi}{2}\int_0^\pi q(z)\,dz + O\left(\frac{1}{|s|}\right) + H\left(\cos s\pi + O\left(\frac{1}{|s|}\right)\right) = 0$$

$$\Rightarrow -s\sin s\pi + \cos s\pi\left[\underbrace{H+h+\frac{1}{2}\int_0^\pi q(z)\,dz}_{c_1}\right] + O\left(\frac{1}{|s|}\right) = 0$$

elde edilir.

$(s = s_n = n + \delta_n$ olsun.$)$

$$s\sin s\pi - c_1\cos s\pi + O\left(\frac{1}{|s|}\right) = 0 \Rightarrow (n+\delta_n)\sin(n+\delta_n)\pi - c_1\cos(n+\delta_n)\pi + \overbrace{O\left((n+\delta_n)^{-1}\right)}^{O\left(\frac{1}{n}\right)} = 0$$

Eşitliğin her tarafını $(n+\delta_n)\cdot\cos(n+\delta_n)\pi$'ye bölelim.

$$\Rightarrow \frac{\sin(n+\delta_n)\pi}{\cos(n+\delta_n)\pi} - \frac{c_1}{n+\delta_n} + \frac{1}{n+\delta_n}\cdot O\left(\frac{1}{n}\right) = 0$$

δ_n çok küçük

$|\cos(n+\delta_n)\pi| > \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{n+\delta_n} = \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$$

$$\frac{1}{n\left(1+\frac{\delta_n}{n}\right)} = \frac{1}{n}\cdot\left(1 - \frac{\delta_n}{n} + \left(\frac{\delta_n}{n}\right)^2 - \cdots\right)$$

$$= \frac{1}{n} - \frac{\delta_n}{n^2} + \cdots$$

$$= \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\Rightarrow \tan(n+\delta_n)\pi - \frac{c_1}{n} - O\left(\frac{1}{n^2}\right) = 0$$