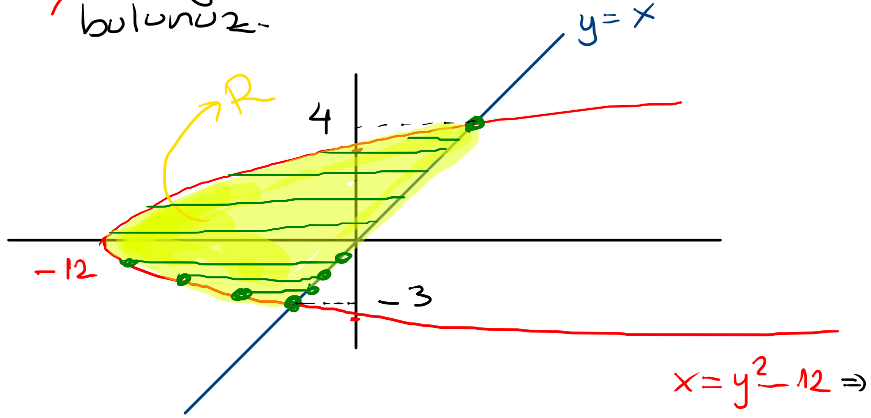
Ör/ $x=y^2-12$ parabolünün sağında ve $y=x$ doğrusunun solunda kalan düzlemsel bölgenin alanını bulunuz.



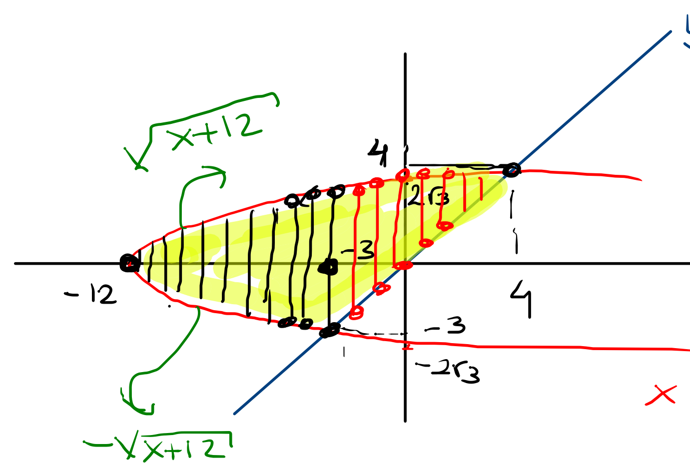
$$A=\int_{-3}^{4}\left[y-(y^2-12)\right]dy=\frac{343}{6}\ \text{br}^2$$ (y'ye göre düzgün)

Kesişim noktaları : $y=y^2-12$

$y^2-y-12=0$

$(y-4)(y+3)=0$

$y=4 \quad y=-3$



→ x'e göre düzgün bölge değil

Alan iki integral ile hesaplanır.

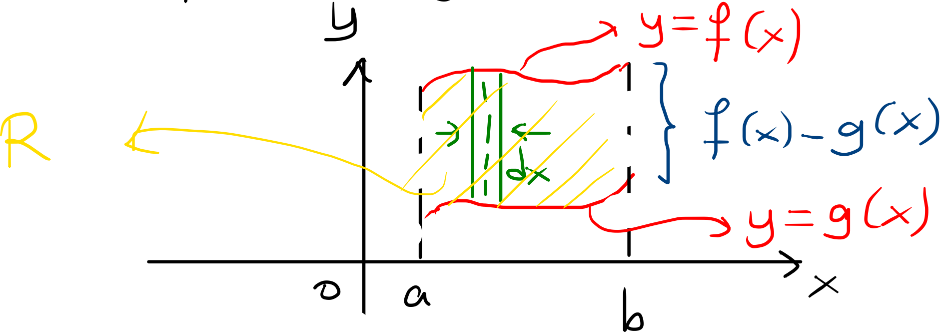
$x=y^2-12 \Rightarrow y^2=x+12$

$y=\mp\sqrt{x+12}$

$$A=\int_{-12}^{-3}\left[\sqrt{x+12}-\left(-\sqrt{x+12}\right)\right]dx+\int_{-3}^{4}\left[\sqrt{x+12}-x\right]dx$$

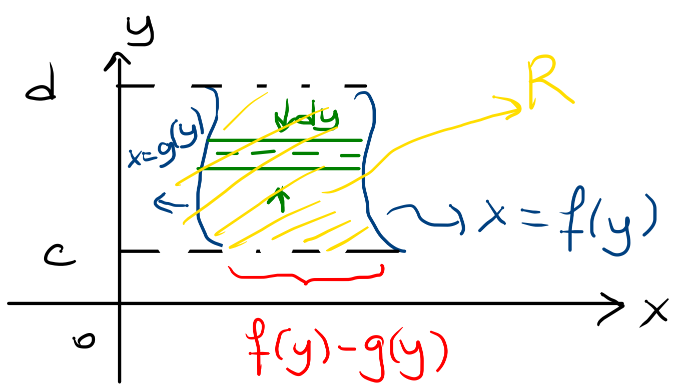
(x'e göre düzgün alındığında)

• $y=f(x) > y=g(x) > 0$ ve $x=a>0$, $x=b>a$ ile sınırlı bölgenin alanı



$$A=\int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx$$

• $x=f(y) > x=g(y) > 0$ ve $y=c>0$, $y=d>c$ ile sınırlı bölgenin alanı



$$A=\int_c^d [f(y)-g(y)]\,dy$$

Ör/ $x^2+y^2-2x=0$ dairesi ile $y=x^2$ parabolü arasında kalan düzlemsel bölgenin alanını bulunuz. $\to y^2=2x-x^2$

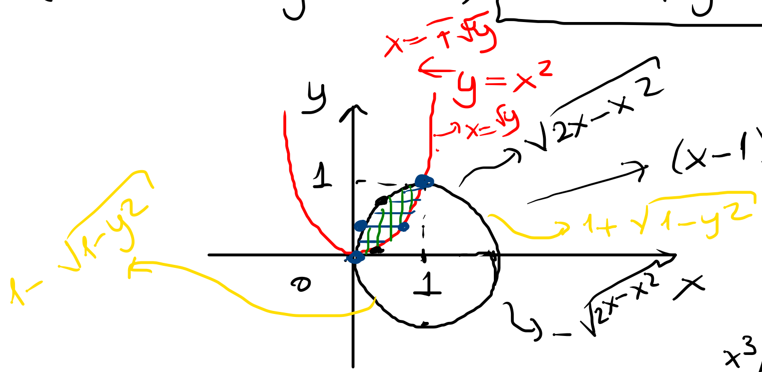
$y=\mp\sqrt{2x-x^2}$

$(x-a)^2+(y-b)^2=c^2 \to M(a,b)$, $r=c$ olan çember

$\underbrace{x^2-2x}+y^2=0$

$x=1\mp\sqrt{1-y^2}$

$(x-1)^2-1+y^2=0 \Rightarrow \boxed{(x-1)^2+y^2=1} \to$ Merkezi $(1,0)$'da yarıçapı 1 olan çember



Bölge hem x-eksenine hem de y-eksenine göre düzgündür.

(x'e göre) (YEŞİL)

$$A=\int_0^1\left[\sqrt{2x-x^2}-x^2\right]dx$$

(y'ye göre) (MAVİ)

$$A=\int_0^1\left(\sqrt{y}-\left(1-\sqrt{1-y^2}\right)\right)dy$$

Kesişim noktaları

$x^2+y^2-2x=0$, $y=x^2$

$\Rightarrow x^2+x^4-2x=0$

$\Rightarrow x(x^3+x-2)=0$

$x(x-1)(x^2+x+2)=0$

$x_1=0$, $x_2=1$, $x_{3,4}=\dfrac{-1\mp\sqrt{1-8}}{2}$ → reel kök değil.

$$\begin{array}{l|l}
\cancel{x^3}+x-2 & x-1 \\
\hline
-\cancel{x^3}+x^2 & x^2+x+2 \\
\hline
\cancel{x^2}+x-2 & \\
-\cancel{x^2}+x & \\
\hline
2x-2 & \\
-2x+2 & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

$$A=\int_0^1\left[\sqrt{2x-x^2}-x^2\right]dx=\int_0^1\left(\sqrt{2x-x^2}\right)dx-\int_0^1 x^2\,dx$$

$$=\int_0^1\sqrt{-(x^2-2x)}\,dx-\left(\frac{x^3}{3}\Big|_0^1\right)$$

$x-1=\sin t$

$dx=\cos t\,dt$

$$=\int_0^1\sqrt{-\left[(x-1)^2-1\right]}\,dx-\left(\frac{1}{3}-0\right)$$

$x=0\Rightarrow \sin t=-1$

$t=-\pi/2\ \left(\frac{3\pi}{2}\right)$

$$=\int_0^1\sqrt{1-(x-1)^2}\,dx-\frac{1}{3}=\int_{-\pi/2}^{0}\sqrt{1-\sin^2 t}\cdot\cos t\,dt-\frac{1}{3}$$

$x=1\Rightarrow \sin t=0$

$t=0\ \ (2\pi)$

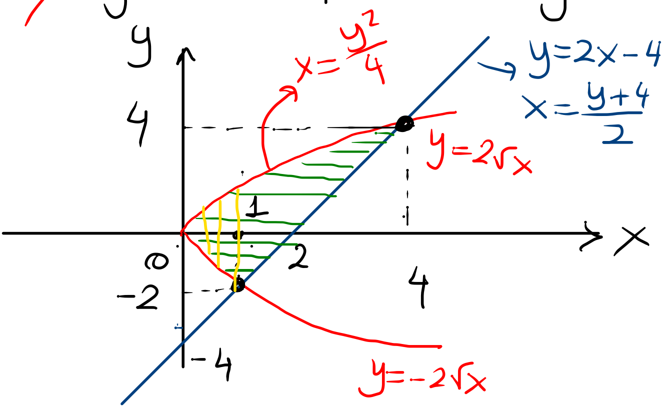
$$=\int_{-\pi/2}^{0}\cos^2 t\,dt-\frac{1}{3}=\int_{-\pi/2}^{0}\left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt-\frac{1}{3}$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{0}dt+\frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{0}\cos 2t\,dt-\frac{1}{3}$$

$$=\frac{1}{2}\left(t\Big|_{-\pi/2}^{0}\right)+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(\sin 2t\Big|_{-\pi/2}^{0}\right)-\frac{1}{3}=\frac{1}{2}\left(0-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)+\frac{1}{4}\left(\cancelto{0}{\sin 0-\sin(-\pi)}\right)-\frac{1}{3}$$

$$=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}\ \text{br}^2$$

Ör/ $y^2=4x$ eğrisi ile $y=2x-4$ doğrusu arasında kalan düzlemsel bölgenin alanını hesaplayınız



$$A=\int_{-2}^{4}\left[\frac{y+4}{2}-\frac{y^2}{4}\right]dy \quad \text{(y'ye göre düzgün aldık)}$$

$$A=\int_{0}^{1}\left[2\sqrt{x}-(-2\sqrt{x})\right]dx+\int_{1}^{4}\left[2\sqrt{x}-(2x-4)\right]dx \quad \text{(x'e göre düzgün)}$$

Cevap: 9 br^2

Kesişim noktaları

$(2x-4)^2=4x$

$4x^2-16x+16=4x$

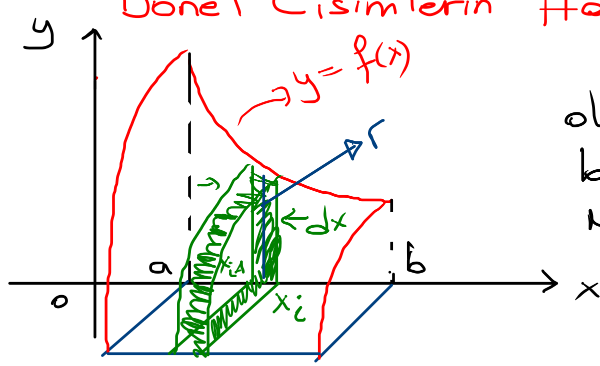
$4x^2-20x+16=0$

$x^2-5x+4=0$

$(x-1)(x-4)=0$

$x=1 \quad x=4$

Dönel Cisimlerin Hacimleri



Cisimlerin bir çoğu, düzlemdeki bir eksene dik olan dairesel kesitlere sahiptir. Bir düzlemsel bölgenin, o düzlemdeki bir eksen etrafında döndürülmesiyle elde edilen böyle cisimlere dönel cisim denir.

Eğer, $y=f(x)$, $y=0$ (x-ekseni), $x=a$ ve $x=b$ doğruları ile sınırlı bölge x-ekseni etrafında döndürülürse, o zaman x-eksenine x pozisyonunda dik olan düzlemde elde edilen cismin bir kesiti $|f(x)|$ yarıçapına sahip bir dairesel disk olur. Bu kesitin alanı $A=\pi|f(x)|^2$ ve dolayısıyla diskin hacmi $\pi[f(x)]^2\Delta x$

olur ki, bu durumda yarıçaplar a'dan b'ye değiştiğinden dönel cismin hacmi

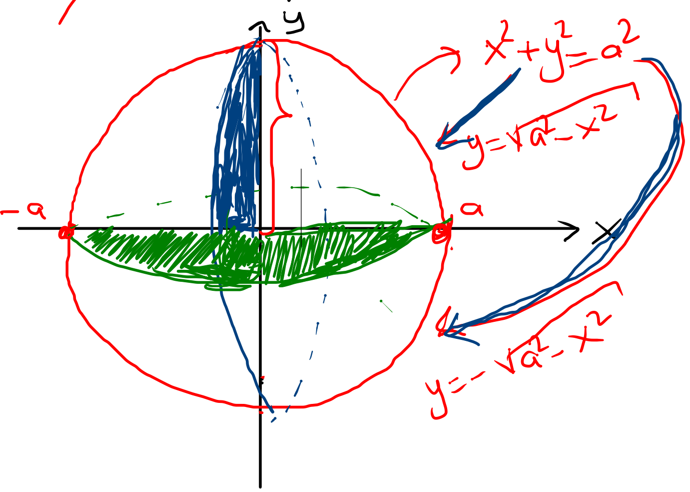
$$V_x = \int_a^b \pi \cdot \underbrace{[f(x)]^2}_{y^2} dx$$

x-ekseni etrafında döndürdük

şeklinde hesaplanır.

($x=g(y)$, y-ekseni $y=c$, $y=d$ doğruları ile sınırlı bölgenin y-ekseni etrafında döndürülmesiyle elde edilen cismin hacmi: $V_y = \int_c^d \pi \cdot \underbrace{[g(y)]^2}_{x^2} dy$

Ör/ Yarıçapı a olan kürenin hacmini bulunuz.

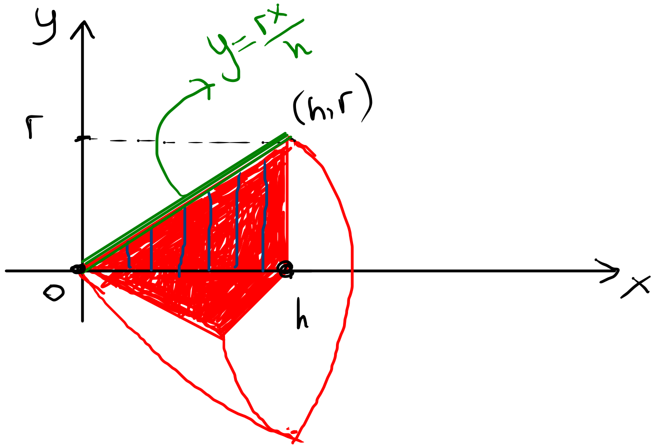


$$V_x = \int_{-a}^{a} \pi \cdot (\sqrt{a^2-x^2})^2 dx = \pi \int_{-a}^{a} (a^2-x^2)\, dx = \pi \left[a^2x - \frac{x^3}{3} \Big|_{-a}^{a} \right]$$

$$= \pi \left[\left(a^3 - \frac{a^3}{3}\right) - \left(-a^3 - \left(-\frac{a^3}{3}\right)\right) \right]$$

$$= \pi \left[\frac{2a^3}{3} - \left(-\frac{2a^3}{3}\right) \right] = \frac{4}{3}\pi a^3 \text{ br}^3$$

Ör/ Köşeleri (0,0), (h,0) ve (h,r) noktalarında olan üçgenin x-ekseni etrafında döndürülmesiyle elde edilen taban yarıçapı r, yüksekliği h olan dik dairesel koninin hacmini bulunuz.



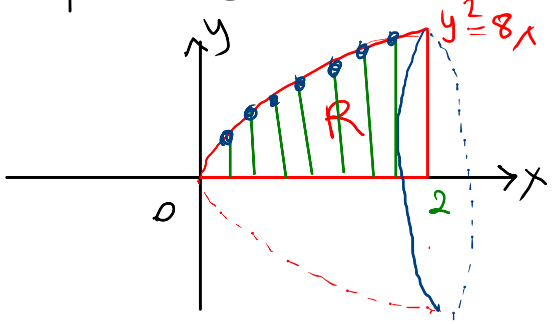
(0,0) ile (h,r) arasındaki doğru denklemi

$$\frac{y-0}{r-0}=\frac{x-0}{h-0} \Rightarrow y=\frac{rx}{h}$$

$$V_x=\int_0^h \pi.\left(\frac{rx}{h}\right)^2 dx=\frac{\pi r^2}{h^2}.\int_0^h x^2\,dx=\frac{\pi r^2}{h^2}\left(\frac{x^3}{3}\Big|_0^h\right)$$

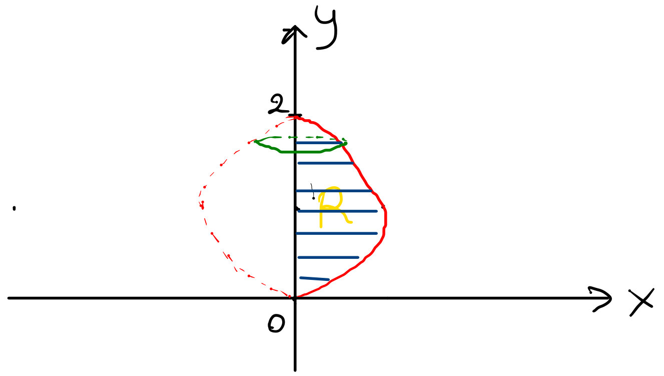
$$=\frac{\pi r^2}{h^2}.\left(\frac{h^3}{3}-0\right)=\frac{1}{3}\pi r^2 h \ \text{br}^3$$

Ör/ Birinci dörtte bir bölgede, $y^2=8x$ parabolü, $x=2$ doğrusu ve x-ekseni ile sınırlı bölgenin x-ekseni etrafında döndürülmesi ile elde edilen cismin hacmini bulunuz.



$$V_x=\int_0^2 \pi y^2\,dx=\int_0^2 \pi.8x\,dx=8\pi\left(\frac{x^2}{2}\Big|_0^2\right)=16\pi \ \text{br}^3$$

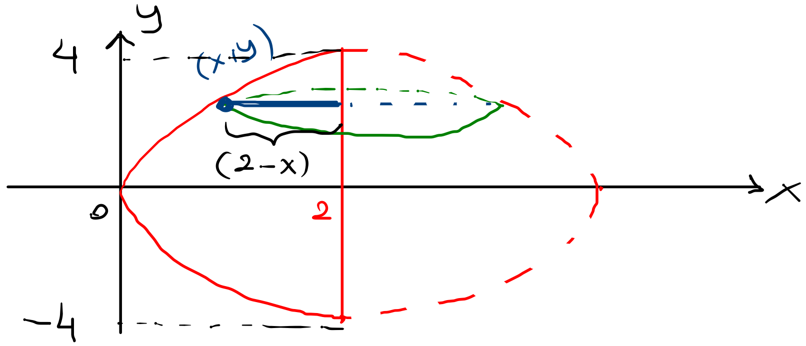
Ör/ $x=2y-y^2$ eğrisinin solunda ve y-ekseninin sağında kalan bölgenin y-ekseni etrafında döndürülmesiyle elde edilen cismin hacmini bulunuz.



$$V_y=\int_0^2 \pi . x^2\,dy=\pi\int_0^2 (2y-y^2)^2\,dy=\frac{16\pi}{15}\ br^3$$

Ör/ $y^2=8x$ parabolü ve $x=2$ doğrusu ile sınırlı bölgenin $x=2$ doğrusu etrafında döndürülmesiyle elde edilen cismin hacmini bulunuz.

$x=\frac{y^2}{8}$



$$V_y=\int_{-4}^{4}\pi.(2-x)^2dy=\pi\int_{-4}^{4}\left(2-\frac{y^2}{8}\right)dy$$

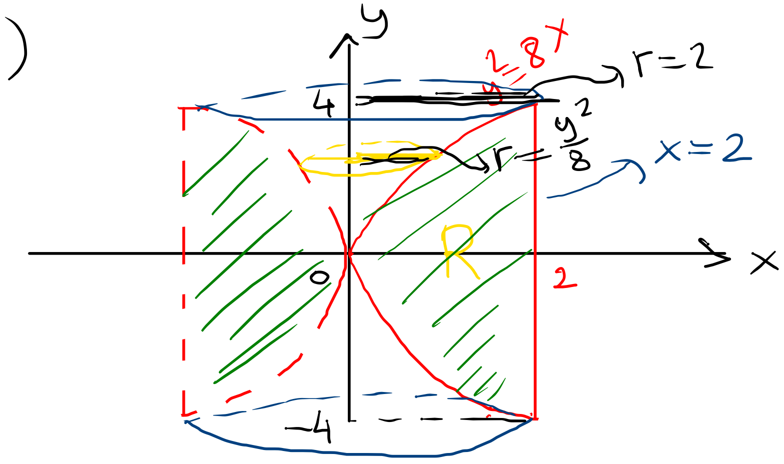
$$=2\pi\int_{-4}^{4}dy-\frac{\pi}{8}\int_{-4}^{4}y^2dy$$

$$=2\pi\left(y\Big|_{-4}^{4}\right)-\frac{\pi}{8}\left(\frac{y^3}{3}\Big|_{-4}^{4}\right)$$

$$=16\pi-\frac{\pi}{8}\cdot\frac{128}{3}=16\pi-\frac{32\pi}{6}=\frac{64\pi}{6}=\frac{32\pi}{3}br^3$$

Ör/ $y^2=8x$ parabolü ve $x=2$ doğrusu ile sınırlı bölgenin y-ekseni etrafında döndürülmesi ile oluşan cismin hacmini bulunuz.

(PUL YÖNTEMİ)



$$V_y = \pi\int_{-4}^{4} 2^2\,dy - \pi\int_{-4}^{4}\left(\frac{y^2}{8}\right)^2 dy$$

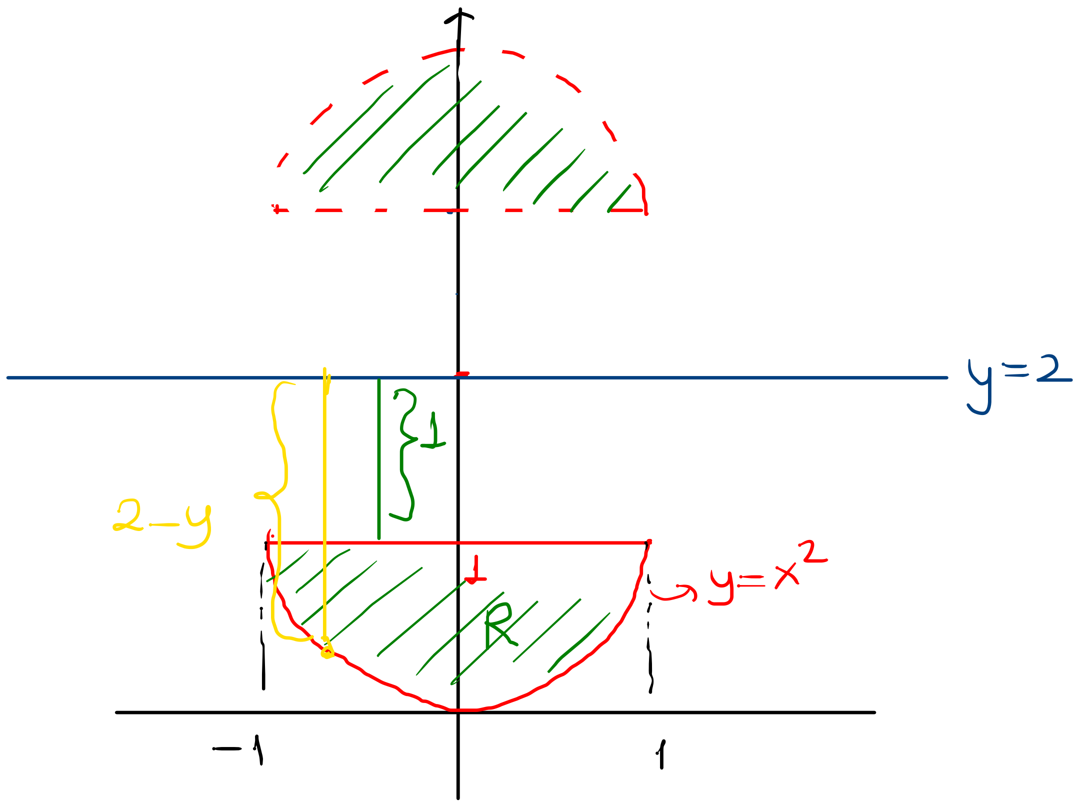
$$= 4\pi y\Big|_{-4}^{4} - \frac{\pi}{64}\int_{-4}^{4} y^4\,dy$$

$$= 4\pi(4-(-4)) - \frac{\pi}{64}\left(\frac{y^5}{5}\Big|_{-4}^{4}\right)$$

$$= 32\pi - \frac{\pi}{64}\left[2\cdot\frac{4^5}{5}\right]$$

$$= 32\pi - \frac{2\pi}{5}\cdot 16 = 32\pi - \frac{32\pi}{5} = \frac{128\pi}{5}\ br^3$$

Ör/ $y=x^2$ eğrisi ve $y=1$ doğrusu ile sınırlı düzlemsel bölgenin $y=2$ doğrusu etrafında döndürülmesiyle elde edilen cismin hacmini bulunuz.



SİLİNDİRİK KABUK YÖNTEMİ

$$V_x = \pi \int_{-1}^{1} (2-y)^2 \, dx - \pi \int_{-1}^{1} 1^2 \, dx$$

$$= \pi \int_{-1}^{1} (2-x^2)^2 \, dx - \pi \int_{-1}^{1} dx$$

$$= \frac{56\pi}{15} \text{ br}^3$$

(PUL YÖNTEMİ)