2) Karşılaştırma (Mukayese) Testi

Teorem 1 (Direkt karşılaştırma)

$\sum a_n$ ve $\sum b_n$ pozitif terimli iki seri olsun. $\sum a_n$ karakteri bulunması istenen seri ve $\sum b_n$'de karakterini bildiğimiz bir seri (geo.seri, harmonik seri, p-serisi) olsun.

Eğer her n için $a_n \leq b_n$ ve $\sum b_n$ serisi yakınsak ise $\sum a_n$ serisi de yakınsaktır.

Eğer her n için $a_n \geq b_n$ ve $\sum b_n$ serisi ıraksak ise $\sum a_n$ serisi de ıraksaktır.

Ör/1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+3)^2}$

$$n < 2n < 2n+3 \Rightarrow n^2 < (2n+3)^2 \Rightarrow \frac{1}{n^2} > \frac{1}{(2n+3)^2} \quad \forall n \geq 1 \text{ için.}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ serisi bir p-serisidir. $p=2>1$ olduğundan yakınsaktır.

Verilen serinin her terimi seçtiğimiz $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ serisinin her teriminden daha küçük kaldığından ve seçtiğimiz seri yakınsak olduğundan verilen $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+3)^2}$ serisi de yakınsaktır.

Ör/2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n\sqrt{n+1}}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$$\forall n \text{ için } \frac{\sin^2 n}{n\sqrt{n+1}} < \frac{1}{n\sqrt{n+1}} < \frac{1}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{3/2}} \quad (1)$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ p-serisi, $p=\frac{3}{2}>1$ yakınsak (2)

(1) ve (2)'den karşılaştırma testine göre verilen $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n\sqrt{n+1}}$ serisi de yakınsaktır.

Ör/3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4n^2+1}}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$$(2n+1)^2 = 4n^2+4n+1 > 4n^2+1 \Rightarrow \frac{1}{(2n+1)^2} < \frac{1}{4n^2+1} \Rightarrow \underbrace{\frac{1}{2n+1}}_{\text{Harmonik seri gibi davranır.}} < \frac{1}{\sqrt{4n^2+1}}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$ serisi ıraksak olduğundan ve verilen $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4n^2+1}}$ serisinin her terimi seçilen serinin her teriminden büyük kaldığından karşılaştırma testine göre o da ıraksaktır.

Teorem 2 (Limit karşılaştırma)

$\sum a_n$ ve $\sum b_n$ pozitif terimli iki seri ve $\sum a_n$ karakteri bulunmak istenen, $\sum b_n$ de karakteri bilinen seri olsun. Ayrıca

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L \text{ olsun.}$$

i) Eğer $L \neq 0, \infty$ farklı ise her iki seri aynı karakterdedir.

ii) Eğer $L = 0$ ve $\sum b_n$ yakınsak ise $\sum a_n$ de yakınsaktır.

iii) Eğer $L \to \infty$ ve $\sum b_n$ ıraksak ise $\sum a_n$ de ıraksaktır.

Ör/1. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}=\boxed{\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n+1}}}\rightarrow \frac{1/2}{1}$$

$$\boxed{b_n=\frac{1}{n[\sqrt{n+1}+\sqrt{n}]}}$$

? $b_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$ $\quad p=\frac{1}{2}<1$ ıraksak.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\cancel{\sqrt{n}}\cdot\sqrt{n+1}}\cdot\cancel{\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{\sqrt{n+1}}\left[1-\sqrt{\frac{n}{n+1}}\right]}{\cancel{\sqrt{n+1}}}=\underline{\underline{0}}$$

YANLIŞ SEÇİM.

$L=0$, b_n ıraksak cevap vermez.

$$b_n=\frac{1}{n[\sqrt{n+1}+\sqrt{n}]}<\frac{1}{n.[\sqrt{n}+\sqrt{n}]}=\frac{1}{2n.n^{1/2}}=\frac{1}{2n^{3/2}}$$

$\sum\frac{1}{n^{3/2}}$ p-serisi $p=\frac{3}{2}>1$ yakınsak.

$\Rightarrow\sum b_n$ yak.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n+1}}\cdot n\left[\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{n\,(\cancel{n}+1-\cancel{n})}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}}=1\neq 0,\infty$$

Her iki seri aynı karakterdedir.

Ör/2. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 \ln n}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ p-serisidir. $p=2>1$ yakınsak, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2 \ln n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} = 0$

limit karşılaştırmanın 2. durumuna göre $L=0$ ve $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ serisi yakınsak olduğundan $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 \ln n}$ serisi de yakınsaktır.

Ör/3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot \sqrt{n}}{(n+1)\sqrt[3]{n^4+1}}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$$a_n = \frac{n\sqrt{n}}{(n+1)\sqrt[3]{n^4+1}} \quad \begin{matrix} \longrightarrow 3/2 \\ \longrightarrow \frac{4}{3}+1 = \frac{7}{3} \end{matrix}$$

$\frac{7}{3} - \frac{3}{2} = \frac{5}{6} \Rightarrow b_n = \frac{1}{n^{5/6}}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt{n} \cdot n^{5/6}}{(n+1) \cdot \sqrt[3]{n^4+1}} = 1$$

$L = 1 \neq 0, \infty$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{5/6}}$ p-serisi $p=\frac{5}{6}<1$ olduğundan ıraksaktır ve dolayısıyla limit karşılaştırma testinin ile durumundan verilen serinin de ıraksak olduğunu elde ederiz.

3) Oran (Bölüm) Testi

$\sum a_n$ pozitif terimli bir seri olsun.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \geq 0 \text{ olsun.}$$

1°) Eğer $0 \leq L < 1$ ise seri yakınsaktır.

2°) Eğer $L > 1$ ise seri ıraksaktır.

3°) Eğer $L = 1$ ise test cevap vermez. (Böyle bir durumda n. terim testini uygulayabiliriz)

Ör/1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{(n-1)!}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$$a_{n+1} = \frac{2^n}{n!} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} \cdot \frac{(n-1)!}{2^{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\,\cancel{(n-1)!}}{n.\cancel{(n-1)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0 = L$$

Verilen seri yakınsaktır.

Ör/2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5^n - 4n}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2}{5^{n+1} - 4(n+1)} \cdot \frac{5^n - 4n}{n^2} = \frac{5^n - 4n}{5^{n+1} - 4(n+1)} \cdot \frac{(n+1)^2}{n^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{5^n - 4n}{5^{n+1} - 4(n+1)} \cdot \frac{(n+1)^2}{n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4n}{5^n} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{L'H}{=}} \lim_{n\to\infty} \frac{4}{5^n \cdot \ln 5} = 0 \qquad (a^x)' = a^x \cdot \ln a$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{5^n}\left(1 - \frac{4n}{5^n}\right)}{\cancel{5^n}\left(5 - \frac{4(n+1)}{5^n}\right)} \cdot \frac{(n+1)^2}{n^2}$$

$$= \frac{1}{5} < 1 \Rightarrow \text{Oran testine göre seri yakınsaktır.}$$

Ör/3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\pi}(1+e^n)}{1+\pi^n}$ serisinin karakterini inceleyiniz.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{\pi}(1+e^{n+1})}{1+\pi^{n+1}} \cdot \frac{1+\pi^n}{n^{\pi}(1+e^n)} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{\pi} \cdot \left(\frac{1+\pi^n}{1+\pi^{n+1}}\right) \cdot \left(\frac{1+e^{n+1}}{1+e^n}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{\pi} \cdot \left(\frac{1+\pi^n}{1+\pi^{n+1}}\right) \cdot \left(\frac{1+e^{n+1}}{1+e^n}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{\pi} \left[\frac{\cancel{\pi^n}(\pi^{-n}+1)}{\cancel{\pi^n}(\pi^{-n}+\pi)}\right] \left[\frac{\cancel{e^n}(e^{-n}+e)}{\cancel{e^n}(e^{-n}+1)}\right]$$

$$= 1 \cdot \frac{1}{\pi} \cdot e = \frac{e}{\pi} < 1$$ verilen seri oran testine göre yakınsaktır.

4°) Kök Testi (Cauchy)

$\sum a_n$ pozitif terimli bir seri olmak üzere $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$ olsun.

i) Eğer $0 \le L < 1$ ise seri yakınsak

ii) Eğer $L > 1$ ise seri ıraksak

iii) Eğer $L = 1$ ise seri cevap vermez. (Bu durumda n. terim testi uygulanabilir)

Ör/1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1+2^n}{1+4^n}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1+2^n}{1+4^n}\right)^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{2^n\left(\frac{1}{2^n}+1\right)}{4^n\left(\frac{1}{4^n}+1\right)}\right]^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{2}\cdot\left(\overset{0}{\cancel{\frac{1}{2^n}}}+1\right)^{1/n}}{\underset{2}{\cancel{4}}\cdot\left(\overset{0}{\cancel{\frac{1}{4^n}}}+1\right)^{1/n}}$$

$$= \frac{1}{2} < 1$$ kök testine göre seri yakınsaktır.

Ör/2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin(\pi^{-n})}{1+\pi^n}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{\sin(\pi^{-n})}{1+\pi^n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sin\left(\frac{1}{\pi^n}\right)}{1+\pi^n}\right)^{1/n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sin\left(\frac{1}{\pi^n}\right)\right]^{1/n}}{\lim\limits_{n\to\infty}(1+\pi^n)^{1/n}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{\sin\left(\frac{1}{\pi^n}\right)}{\pi^n\cdot\frac{1}{\pi^n}}\right]^{1/n}}{\lim\limits_{n\to\infty}\left[\pi^n(\pi^{-n}+1)\right]^{1/n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\pi}\cdot\left[\frac{\sin\left(\frac{1}{\pi^n}\right)}{\frac{1}{\pi^n}}\right]^{1/n}}{\pi\cdot\left[\frac{1}{\pi^n}+1\right]^{1/n}}$$

$\to 1$, $\to 0$

$= \frac{1}{\pi^2} < 1 \Rightarrow$ kök testine göre seri yakınsaktır.

Ör/3. $\sum_{n=1}^{\infty} e^n\left[1-\cos(e^{-n})\right]$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left(e^n\left(1-\cos(e^{-n})\right)\right)^{1/n} = e\lim_{n\to\infty}\left[1-\cos(e^{-n})\right]^{1/n}$$

$$b = \lim_{n\to\infty}\left(1-\cos(e^{-n})\right)^{1/n}$$

$$\ln b = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\left(1-\cos(e^{-n})\right) \overset{0\cdot\infty}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1-\cos(e^{-n})\right)}{n} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{L'H}{=}} \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{-e^{-n}\cdot\sin(e^{-n})}{1-\cos(e^{-n})}}{1}$$

$$= -\lim_{n\to\infty}\frac{e^{-n}\sin(e^{-n})}{1-\cos(e^{-n})} = \lim_{n\to\infty}\frac{e^{-n}\cdot\sin(e^{-n})\left(1+\cos(e^{-n})\right)}{1-\cos^2(e^{-n})}$$

$\to \sin^2(e^{-n})$

$$= -\lim_{n\to\infty} \frac{e^{-n}\cdot \cancel{\sin(e^{-n})}(1+\cos(e^{-n}))}{\sin^{\cancel{2}}(e^{-n})}$$

$$= -\lim_{n\to\infty} \frac{e^{-n}\cdot(1+\cos(e^{-n}))}{\sin(e^{-n})} = -\lim_{t\to 0^+} \underbrace{\frac{t}{\sin t}}_{\to 1}(1+\cos t) = -2 \Rightarrow b = e^{-2}$$

$e^{-n} = t$

$n\to\infty \quad t\to 0^+$

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = e\cdot b = e\cdot e^{-2} = \frac{1}{e} < 1 \Rightarrow$ kök testine göre seri yakınsaktır.