İntegral Hesabın Temel Teoremi

f fonksiyonunun a noktasını içeren bir I aralığında sürekli olduğunu kabul edelim.

I. KISIM

F fonksiyonu I üzerinde $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ şeklinde tanımlanmış olsun. O zaman F fonksiyonu I üzerinde türevlenebilirdir ve

$$F'(x)=f(x).$$

dir. O halde F, I üzerinde f'in bir ters türevidir.

$$\frac{d}{dx}F(x)=\frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)\,dt\right]=f(x)$$

II. KISIM

Eğer $G(x)$, I üzerinde f'in bir ters türevi ise o zaman I aralığındaki herhangi bir b değeri için

$$\int_a^b f(x)\,dx=G(b)-G(a)=G(x)\Big|_a^b$$

$$\int_a^x f(x)\,dx=G(x)+C$$

$$\int_a^a f(x)\,dx=0=G(a)+C\Rightarrow C=-G(a)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx=G(b)+C$$

Örnekler

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

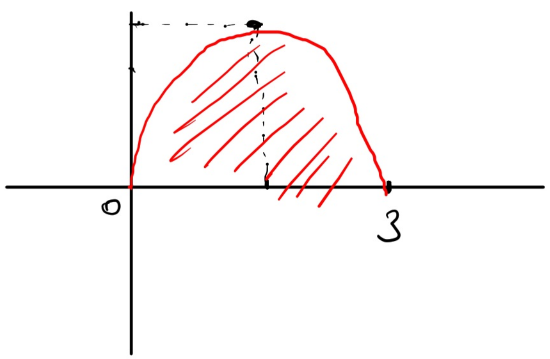
1°) $\displaystyle\int_0^a x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^a = \frac{a^3}{3} - 0 = \frac{a^3}{3}$

2°) $\displaystyle\int_{-1}^{2} (x^2 - 3x + 2)\,dx = \int_{-1}^{2} x^2 dx - 3\int_{-1}^{2} x\,dx + 2\int_{-1}^{2} dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{2} - 3\left(\frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{2}\right) + 2\left(x\Big|_{-1}^{2}\right)$

$$= \left[\frac{8}{3} - \left(\frac{-1}{3}\right)\right] - 3\left[2 - \frac{1}{2}\right] + 2\left(2 - (-1)\right)$$

$$= 3 - \frac{9}{2} + 6 = \frac{9}{2}$$

3°) x-ekseni üzerinde ve $y = 3x - x^2$ eğrisi altında kalan düzlemsel bölgenin alanını bulunuz.



$$A = \int_0^3 f(x)\,dx = \int_0^3 (3x - x^2)\,dx = 3\int_0^3 x\,dx - \int_0^3 x^2\,dx$$

$$= 3\,\frac{x^2}{2}\Big|_0^3 - \left(\frac{x^3}{3}\Big|_0^3\right) = \frac{27}{2} - \frac{27}{3}$$

$$= \frac{27}{6}\ br^2$$

4°) $x=0$'dan $x=\pi$'ye $y=\sin x$ eğrisi altında ve $y=0$ doğrusu üzerinde olan bölgenin alanını bulunuz.

$\sin x \geq 0 \quad [0,\pi]$

$$A=\int_0^{\pi} \sin x \, dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = -(\cos\pi - \cos 0) = -(-1-1) = 2 \text{ br}^2$$

5°) $F(x)=\int_x^3 e^{-t^2} dt \Rightarrow F'_x(x)=?$

$$F'(x) = \underbrace{(3)'}_{=0} \cdot e^{-9} - \underbrace{(x)'}_{=1} \cdot e^{-x^2} = -e^{-x^2}$$

Leibnitz kuralı

$$F(x)=\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\,dt$$

$$F'(x) = b'(x) \cdot f(b(x)) - a'(x) \cdot f(a(x))$$

6°) $G(x) = x^2 \cdot \int_{-4}^{5x} e^{-t^2} dt \Rightarrow G'(x)=?$

$$G'(x) = 2x \cdot \int_{-4}^{5x} e^{-t^2} dt + x^2 \left[\underbrace{(5x)'}_{=5} \cdot e^{-(5x)^2} - \underbrace{(-4)'}_{=0} \cdot e^{-16} \right] = 2x \int_{-4}^{5x} e^{-t^2} dt + 5x^2 e^{-25x^2}$$

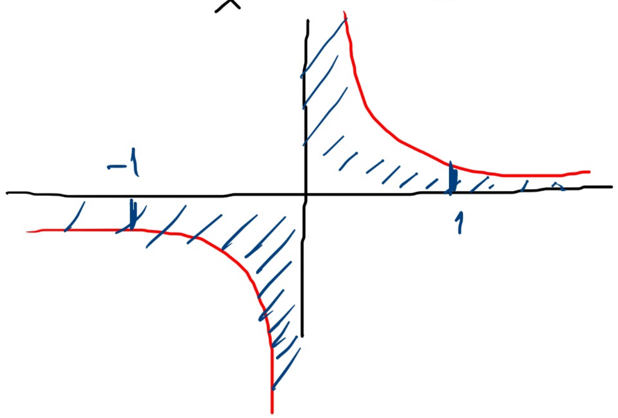
7°) $H(x)=\int_{x^2}^{x^3} e^{-t^2} dt \Rightarrow H'(x)=?$

$$H'(x) = (x^3)' \cdot e^{-(x^3)^2} - (x^2)' \cdot e^{-(x^2)^2} = 3x^2 e^{-x^6} - 2x \cdot e^{-x^4}$$

NOT: Eğer $\int_a^b f(x)\,dx$ şeklindeki bir integralde f fonksiyonu $[a,b]$ deki tüm noktalarda sürekli değilse, Temel teorem uygulanamaz.

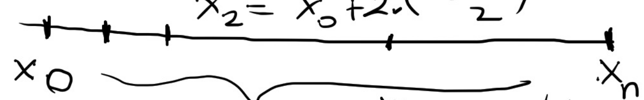
Ör/ $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x} = \ln|x|\Big|_{-1}^{1} = \ln 1 - \ln|-1| = 0$ (YANLIŞ)

Çünkü $\frac{1}{x}$ fonksiyonu $[-1,1]$ aralığının $x=0$ noktasında tanımsızdır.



$x_1 = x_0 + 1\cdot\left(\frac{x_n-x_0}{2}\right)$

$x_2 = x_0 + 2\cdot\left(\frac{x_n-x_0}{2}\right)$



$x_j = x_0 + j\cdot\left(\frac{x_n-x_0}{2}\right)$

$$\Delta x = \frac{x_n - x_0}{n}$$

Ör/ Temel teoremi kullanarak aşağıdaki Riemann toplamının limitini hesaplayınız.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\cos\left(\frac{j\pi}{2n}\right) = ?$$

$$R(f,P) = \sum_{j=1}^{n} f(x_j)\cdot\Delta x_j$$

$f(x) = \cos x \qquad x_j = \frac{j\pi}{2n}$

$$\frac{j\pi}{2n} = x_0 + j\cdot\frac{x_n - x_0}{n}$$

$x_0 = 0 \qquad x_n = \frac{\pi}{2}$

$$\frac{j\pi}{2n} = 0 + j\cdot\frac{\frac{\pi}{2} - 0}{n}$$

$\Delta x_j = \frac{\pi}{2n}$

$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$f(x) = \cos x$

$$R(f,P) = \sum_{j=1}^{n} \cos\left(\frac{j\pi}{2n}\right)\cdot\frac{\pi}{2n}$$

$$\lim_{n\to\infty} R(f,P) = \lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\cos\left(\frac{j\pi}{2n}\right)\cdot\frac{\pi}{2n} = \int_0^{\pi/2}\cos x\,dx$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2n}\sum_{j=1}^{n}\cos\left(\frac{j\pi}{2n}\right) = \sin x\Big|_0^{\pi/2}$$

$$\frac{\pi}{2}\left[\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\cos\left(\frac{j\pi}{2n}\right)\right] = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\cos\left(\frac{j\pi}{2n}\right) = \frac{2}{\pi}\cdot(1-0) = \frac{2}{\pi}$$

Bazı elemanter integraller

- $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \neq -1)$
- $\int \sin(ax)\,dx = \frac{-1}{a}\cos(ax) + c$
- $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$
- $\int \cos(ax)\,dx = \frac{1}{a}\sin(ax) + c$
- $\int \sec^2(ax)\,dx = \frac{1}{a}\tan(ax) + c$
- $\int \csc^2(ax)\,dx = \frac{-1}{a}\cot(ax) + c$
- $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + c$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + c$
  $(a>0)$

- $\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax} + c$
- $\int b^{ax}\,dx = \frac{1}{a\ln b} \cdot b^{ax} + c$
- $\int \cosh(ax)\,dx = \frac{1}{a}\sinh(ax) + c$
- $\int \sinh(ax)\,dx = \frac{1}{a}\cosh(ax) + c$

Örnekler

1) $\int \frac{(x+1)^3}{x}dx = \int \frac{x^3+3x^2+3x+1}{x}dx = \int x^2dx + 3\int x\,dx + 3\int dx + \int \frac{1}{x}dx = \frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} + 3x + \ln|x| + c$

2) $\int \left(\frac{1}{\pi x} + a^{\pi x}\right)dx = \frac{1}{\pi}\int \frac{dx}{x} + \int a^{\pi x}dx = \frac{1}{\pi}\ln|x| + \frac{1}{\pi \ln a}a^{\pi x} + c \quad (a>0)$

3) $\int \left[4\cos(5x) - 5\sin(3x)\right]dx = 4\int \cos(5x)\,dx - 5\int \sin(3x)\,dx = \frac{4}{5}\sin(5x) + \frac{5}{3}\cos(3x) + c$

Değişken değiştirme yöntemi (Yerine koyma yöntemi)

Yukarıdaki örneklerde olduğu gibi integral, integrand hangi fonksiyonun türevidir sorusuna cevap vermiyorsa o zaman integralin değerini başka yöntemlerle bulmak gerekir. Bunlardan en önemlisi zincir kuralının integral versiyonu olan değişken değiştirme yöntemidir.

$$\frac{d}{dx}\{f[g(x)]\} = f'[g(x)].\,g'(x)$$

$$\int \underbrace{f'[g(x)].\,g'(x)}\,dx = f[g(x)]+c$$

$$\int f'[\underbrace{g(x)}_{u}]\,g'(x)\,dx = \int f'(u).\,du = f(u)+c = f[g(x)]+c$$

$g(x)=u$

$g'(x)\,dx = du$

ÖRNEKLER:

1) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \int \frac{\frac{du}{2}}{u} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u}$

$x^2+1=u$

$2x\,dx = du$

$x\,dx = \frac{du}{2}$

$= \frac{1}{2}\ln|u|+c$

$= \frac{1}{2}\ln(x^2+1)+c$

2) $\displaystyle\int \frac{\sin 3(\ln x)}{x}\,dx = \int \sin(3u)\,du = -\frac{1}{3}\cos(3u)+c$

$= -\frac{1}{3}\cos(3\ln x)+c$

$\ln x = u$

$\frac{dx}{x} = du$

3) $\int e^x\sqrt{1+e^x}\,dx = \int \sqrt{u}\,du = \int u^{1/2}\,du = \dfrac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \dfrac{2}{3}\left(1+e^x\right)^{3/2} + C$

$1+e^x = u$

$e^x\,dx = du$

$\int \dfrac{1}{Ax^2+Bx+C}\,dx$

kök içindeyse iki kare farkı
kök yoksa iki kare toplamı şeklinde yazmak gerekir.

4) $\int \dfrac{1}{\underbrace{x^2+4x+5}}\,dx = \int \dfrac{1}{\underbrace{(x+2)^2}_{x^2+4x+4} + 1}\,dx = \int \dfrac{du}{u^2+1} = \arctan u + c = \arctan(x+2) + c$

$x+2 = u$

$dx = du$

5) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{e^{2x}-1}} = \int \dfrac{dx}{\sqrt{e^{2x}(1-e^{-2x})}} = \int \dfrac{dx}{e^x\sqrt{1-(e^{-x})^2}} = \int \dfrac{e^{-x}\,dx}{\sqrt{1-(e^{-x})^2}} = \int \dfrac{-du}{\sqrt{1-u^2}} = \arccos u + C$

$= -\arcsin u + C$

$= -\arcsin e^{-x} + C$

$e^{-x} = u$

$-e^{-x}\,dx = du$

$e^{-x}\,dx = -du$

Belirli integralde değişken değiştirme

Teorem: g'nin $[a,b]$'de türevlenebilir bir fonksiyon ve $g(a)=A$, $g(b)=B$ eşitliklerini sağladığını kabul edelim. Ayrıca f'in g'nin değer bölgesi üzerinde sürekli olduğunu kabul edelim. O zaman

$$\int_a^b f[g(x)] \cdot g'(x)\,dx = \int_A^B f(u)\,du$$

dur.

$g(x)=u$

$g'(x)\,dx = du$

$$\boxed{\begin{cases} x=a \Rightarrow u=g(a)=A \\ x=b \Rightarrow u=g(b)=B \end{cases}}$$

Ör: $$\int_0^8 \frac{\cos\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}\,dx = \int_1^3 \cos(u)\cdot 2\,du = 2\sin u\Big|_1^3 = 2(\sin 3 - \sin 1)$$

$\sqrt{x+1}=u$

$\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\,dx = du$

$\frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx = 2du$

$x=0 \Rightarrow u=\sqrt{0+1}=1$

$x=8 \Rightarrow u=\sqrt{8+1}=3$

Ör: $y=\left(2+\sin\frac{x}{2}\right)^2\cdot\cos\frac{x}{2}$, x-ekseni ve $x=0$, $x=\pi$ doğruları ile sınırlı bölgenin alanını bulunuz.

$x\in[0,\pi]$ için $y\geq 0$'dır.

$$A=\int_0^\pi \left(2+\sin\frac{x}{2}\right)^2\cdot\cos\frac{x}{2}\,dx = \int_2^3 u^2\cdot(2du) = 2\,\frac{u^3}{3}\Big|_2^3 = \frac{2}{3}(27-8) = \frac{38}{3}\ br^2$$

$2+\sin\frac{x}{2}=u \Rightarrow \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\,dx = du \Rightarrow \cos\frac{x}{2}\,dx = 2du$, $x=0 \Rightarrow 2+\sin 0 = u$, $u=2$

$x=\pi \Rightarrow 2+\sin\frac{\pi}{2}=u$, $u=3$

TRİGONOMETRİK İNTEGRALLER

- $$\int \sin(ax)\,dx = \int \sin u \cdot \frac{du}{a} = \frac{1}{a}\int \sin u\, du = \frac{-1}{a}\cos u + C = \frac{-1}{a}\cos(ax) + C$$

$ax = u$

$a\,dx = du$

$dx = \frac{du}{a}$

- $$\int \tan x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = \int \frac{-du}{u} = -\ln|u| + C$$
$$= -\ln|\cos x| + C$$

$\cos x = u$

$-\sin x\, dx = du$

$\sin x\, dx = -du$

- $$\int \cot x\, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \int \frac{du}{u}$$
$$= \ln|u| + C$$
$$= \ln|\sin x| + C$$

$\sin x = u$

$\cos x\, dx = du$

- $$\int \sec x\, dx = \int \frac{\sec x\,(\sec x + \tan x)}{(\sec x + \tan x)}\,dx = \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x}\,dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$$
$$= \ln|\sec x + \tan x| + C$$

$\sec x + \tan x = u$

$(\sec x \cdot \tan x + \sec^2 x)\,dx = du$

$$\bullet \int \csc x\,dx = \int \csc x \frac{(\csc x + \cot x)}{(\csc x + \cot x)}\,dx = \int \frac{\csc^2 x + \csc x . \cot x}{\csc x + \cot x}\,dx = \int \frac{-du}{u}$$

$$= -\ln|u| + C$$

$$\boxed{= -\ln|\csc x + \cot x| + C}$$

$$= \ln\left|\frac{1}{\csc x + \cot x}\right| + C$$

$$= \ln\left|\frac{\csc x - \cot x}{\underbrace{\csc^2 x - \cot^2 x}_{1}}\right| + C$$

$$\boxed{= \ln|\csc x - \cot x| + C}$$

$\csc x + \cot x = u$

$-(\csc x . \cot x + \csc^2 x)\,dx = du$

$(\csc x . \cot x + \csc^2 x)\,dx = -du$

$\int \sin^m x . \cos^n x\,dx$ şeklindeki integraller

Eğer m veya n pozitif bir tek sayı ise ;

m tek ise $\rightarrow$ $\cos x = u$ dönüşümü yapılır ve $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ özdeşliğinden yararlanılarak integral çözülür.

n tek ise $\rightarrow$ $\sin x = u$ dönüşümü yapılır ve yine $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ özdeşliğinden yararlanılarak integral çözülür.

m ve n çift ise $\rightarrow$ $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$, $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ tam açı formüllerinden yararlanılarak integral çözülür.

$$\csc^2 x - \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1-\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x} = 1$$

Örnekler

1) $\int \sin^3 x \cdot \cos^8 x \, dx = \int \sin x \cdot \sin^2 x \cdot \cos^8 x \, dx = \int \overbrace{\sin^1 x \cdot (1-\cos^2 x) \cdot \cos^8 x \, dx}^{-du}$

$\cos x = u$

$-\sin x \, dx = du$

$\sin x \, dx = -du$

$= \int (1-u^2) \cdot u^8 \cdot (-du)$

$= \int (u^{10} - u^8) \, du = \frac{u^{11}}{11} + \frac{u^9}{9} + C$

$= \frac{(\cos x)^{11}}{11} + \frac{(\cos x)^9}{9} + C$

2) $\int \cos^5(ax) \, dx = \int \cos(ax) \cdot \cos^4(ax) \, dx = \int \cos(ax) \cdot \left[\cos^2(ax)\right]^2 dx$

$\sin(ax) = u$

$a\cos(ax) \, dx = du$

$\cos(ax) \, dx = \frac{du}{a}$

$= \int \cos(ax) \cdot \left[1-\sin^2(ax)\right]^2 dx$

$= \int (1-u^2)^2 \frac{du}{a} = \frac{1}{a} \int (1-2u^2+u^4) \, du = \frac{1}{a}\left(u - 2\frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5}\right) + C$

$= \frac{1}{a}\left[\sin(ax) - \frac{2}{3}\sin^3(ax) + \frac{1}{5}\sin^5(ax)\right] + C$

3) $\int \sin^2 x \, dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right) dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x \, dx$

$= \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \sin 2x + C = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C$

$\int \sec^m x \cdot \tan^n x \, dx$ veya $\int \csc^m x \cdot \cot^n x \, dx$ şeklindeki integraller

m tek ve n çift olmadıkça bu integraller hesaplanabilir.
(kısmi int.)

$\left.\begin{aligned} \sec^2 x &= 1+\tan^2 x \\ \csc^2 x &= 1+\cot^2 x \end{aligned}\right\}$ özdeşlikleri ve $\left.\begin{aligned} \sec x = u, \ \tan x = u \\ \csc x = u, \ \cot x = u \end{aligned}\right\}$ dönüşümlerinden biri kullanılarak integral hesaplanır.

Ör/ $\int \tan^2 x \, dx = \int (\sec^2 x - 1) \, dx = \int \sec^2 x \, dx - \int dx = \tan x - x + C$

Ör/ $\int \sec^3 x \cdot \tan^3 x \, dx = \int \sec x \cdot (\sec^2 x) \cdot \tan x \cdot (\tan^2 x) \, dx$

$\left\{\begin{aligned} \sec x &= u \\ \sec x \cdot \tan x \, dx &= du \end{aligned}\right.$

$= \int (\sec^2 x) \cdot (\sec^2 x - 1) \sec x \cdot \tan x \, dx$

$= \int u^2 (u^2 - 1) \, du = \int (u^4 - u^2) \, du = \frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3} + C = \frac{\sec^5 x}{5} - \frac{\sec^3 x}{3} + C$