Gradyen

$f(x,y)$ fonksiyonunun birinci mertebe kısmi türevlerinin mevcut olduğu herhangi bir (x,y) noktasında gradyen vektör

$$\nabla z = \nabla f(x,y) = \text{grad}\, f(x,y) = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x,y)} \vec{i} + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x,y)} \vec{j}$$

şeklinde tanımlanır.

$f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x_1}\vec{e}_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\vec{e}_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\vec{e}_n$$

$\nabla \rightarrow$ Nabla : Diferansiyel vektör operatörüdür.

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j}$$

Eğer $u = f(x,y,z)$ fonksiyonunu gözönüne alırsak, bu fonksiyon için gradyen vektör

$$\nabla u = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

şeklindedir.

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

Ör/ $f(x,y) = x^2y + xy^2$ fonksiyonunun $(1,-2)$ noktasındaki gradyen vektörünü bulunuz.

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}$$

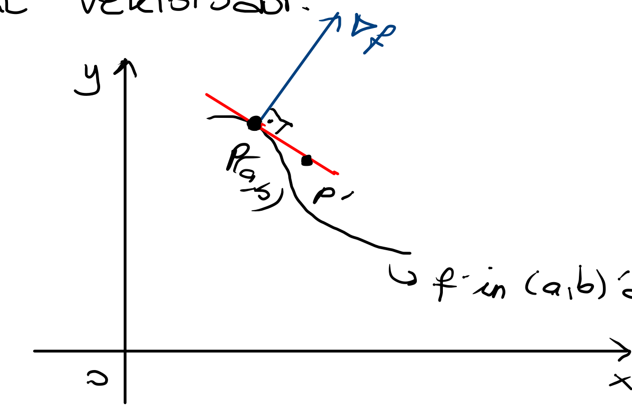
$$\nabla f = (2xy + y^2)\vec{i} + (x^2 + 2xy)\vec{j}$$

$$\nabla f(1,-2) = (-4+4)\vec{i} + (1-4)\vec{j} = -3\vec{j}$$

Gradyen için cebirsel kurallar

1. $\nabla(f \mp g) = \nabla f \mp \nabla g$
2. $\nabla(f.g) = \nabla f . g + \nabla g . f$
3. $\nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{\nabla f g - \nabla g . f}{g^2}$
4. $\nabla(k.f) = k.\nabla f \quad (k \to \text{sbt})$

Teorem: Eğer $f(x,y)$ fonksiyonu (a,b) noktasında türevlenebilir ve $\nabla f(a,b) \neq 0$ ise o zaman $\nabla f(a,b)$ vektörü f fonksiyonunun (a,b) noktasından geçen seviye eğrisinin bir normal vektörüdür.



$$\overrightarrow{PP'} . \nabla f = 0$$

Ör/ $x^2+y^2=5$ eğrisinin $(1,2)$ noktasındaki teğetinin denklemini bulunuz.

1. yol Teğet denk: $(y-y_0) = f'(x_0)(x-x_0) \Rightarrow (y-2) = f'(1).(x-1)$

$2x + 2yy' = 0$

$y' = \frac{-2x}{2y} = \frac{-x}{y} \qquad y' = \frac{-1}{2} \Rightarrow (y-2) = \frac{-1}{2}(x-1)$

$2y + x = 5$

$P' = (x,y) \qquad P(1,2)$

2. yol

$\overrightarrow{PP'} = (x-1)\vec{i} + (y-2)\vec{j}$

$\nabla f = 2x\vec{i} + 2y\vec{j}$

$\nabla f(1,2) = 2\vec{i} + 4\vec{j}$

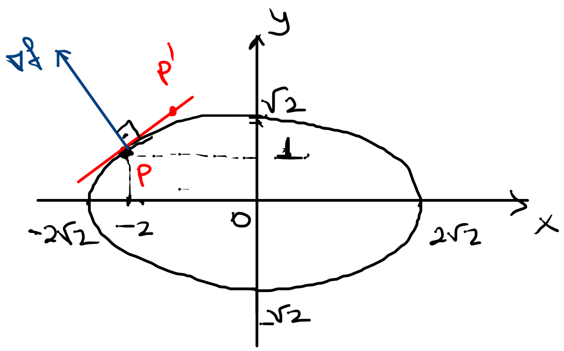
$\nabla f . \overrightarrow{PP'} = 0$

$2(x-1) + 4(y-2) = 0$

$2x + 4y - 10 = 0 \Rightarrow 2y + x = 5$

Ör/ $\frac{x^2}{4}+y^2=2$ elipsi veriliyor $(-2,1)$ noktasındaki teğet doğrusunun denklemini bulunuz.

$\Rightarrow \frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$



$P'(x,y) \Rightarrow \overrightarrow{PP'}=(x+2)\vec{i}+(y-1)\vec{j}$

$\nabla f = \frac{x}{4}\vec{i}+y\vec{j}$

$\nabla f(-2,1) = -\frac{1}{2}\vec{i}+\vec{j}$

$\nabla f(-2,1)\cdot\overrightarrow{PP'}=0$

$\Rightarrow -\frac{1}{2}(x+2)+(y-1)=0 \Rightarrow 2y-x=4$

NOT: Eğer $f(x,y)$ türevlenebilir fonksiyonu $\vec{r}=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}$ düzgün eğrisi boyunca sabit bir c değeri alıyorsa (bu eğriyi fonksiyonun seviye eğrisi yapar) gradyen vektör teğet vektöre dik bir vektördür.

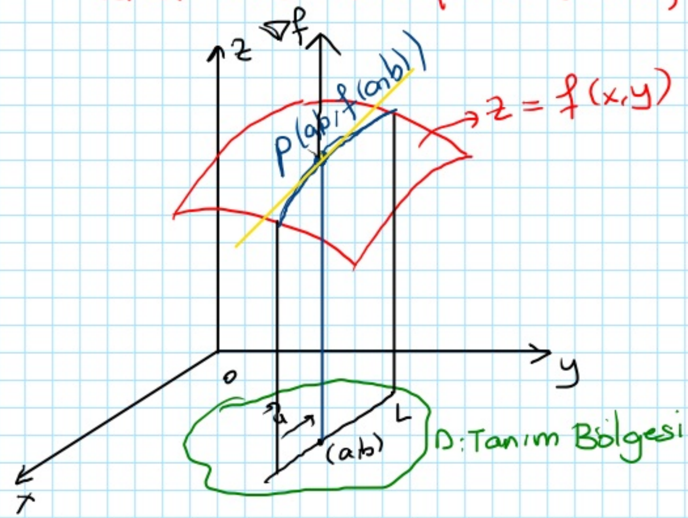
$x=x(t),\ y=y(t)$ $\quad f(x,y)=c \Rightarrow f(x,y)=f[x(t),y(t)]=F(t)=c$

$$\Rightarrow \frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}=0 \Rightarrow \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}\right)}_{\nabla f}\cdot\underbrace{\left(\frac{dx}{dt}\vec{i}+\frac{dy}{dt}\vec{j}\right)}_{\frac{d\vec{r}}{dt}}=0$$

∇f → normal vektör

$\frac{d\vec{r}}{dt}$ → teğet vektör

Yönlü Türev (Doğrultu Türevi)



$f(x,y)$ fonksiyonunun (a,b) noktasında $\vec{u}=u_1\vec{i}+u_2\vec{j}$ birim vektörü yönündeki türevi

$$D_{\vec{u}} f(a,b)=\lim_{t\to 0}\frac{f(a+tu_1,\, b+tu_2)-f(a,b)}{t}=\frac{d}{dt}\left[f(a+tu_1,\, b+tu_2)\right]\Big|_{t=0}$$

Ör/ Tanımı kullanarak $(1,2)$ noktasında $f(x,y)=x^2+xy$ fonksiyonunun $\vec{u}=\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i}+\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}$ birim vektörü yönündeki türevini bulunuz.

$$|\vec{u}|=\sqrt{\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=\sqrt{1}=1$$

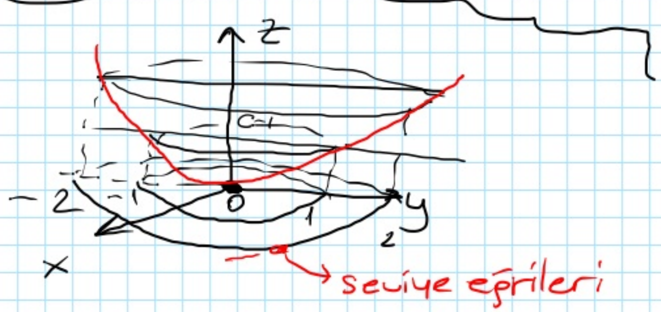
$$D_{\vec{u}} f(1,2)=\lim_{t\to 0}\frac{f\left(1+\frac{t}{\sqrt{2}},\, 2+\frac{t}{\sqrt{2}}\right)-f(1,2)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\left[\left(1+\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(1+\frac{t}{\sqrt{2}}\right)\left(2+\frac{t}{\sqrt{2}}\right)\right]-3}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\cancel{1}+\frac{2t}{\sqrt{2}}+\frac{t^2}{2}+\cancel{2}+\frac{t}{\sqrt{2}}+\frac{2t}{\sqrt{2}}+\frac{t^2}{2}\cancel{-3}}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{5t}{\sqrt{2}}+t^2}{t}=\lim_{t\to 0}\left(\frac{5}{\sqrt{2}}+t\right)=\frac{5}{\sqrt{2}}$$

$z=f(x,y)$

$c=f(x,y)$



$z=x^2+y^2$

$c=x^2+y^2$

$c=0$

$c=1$

$c=2$

Yönlü türevin Gradyen ile hesabı

Eğer f fonksiyonu (a,b) noktasında türevlenebilir ve $\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j}$ bir birim vektör ise o zaman f fonksiyonunun (a,b) noktasında u vektörü yönündeki türevi

$$D_{\vec{u}} f(a,b) = \nabla f(a,b) \cdot \vec{u}$$

NOT: Birinci mertebe kısmi türevler koordinat eksenleri yönündeki yönlü türevlerdir.

Geometrik özellikler

- $f(x,y)$ fonksiyonu (a,b) noktasında gradyen vektör yönünde en hızlı şekilde artar. Artımın maksimum oranı gradyen vektörün modülüne eşittir. $D_{\nabla f} f(a,b) = |\nabla f(a,b)|$

- $f(x,y)$ fonksiyonu (a,b) noktasında gradyen vektörün ters yönünde en hızlı şekilde azalır. Azalmanın maksimum miktarı yine gradyen vektörün modülüne eşittir. $D_{-\nabla f} f(a,b) = |\nabla f(a,b)|$

- $f(x,y)$ fonksiyonunun (a,b) noktasından geçen düzey (seviye) eğrisinin teğeti yönündeki değişim oranı sıfırdır.

$$D_{\vec{T}} f(a,b) = \nabla f(a,b) \cdot \vec{T} = 0 \qquad \nabla f \perp \hat{T}$$

↳ Teğet birim vektör.

Örnekler

1) $f(x,y) = y^4 + 2xy^3 + x^2y^2$ fonksiyonunun $(0,1)$ noktasında

a) $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j}$

b) $\vec{v} = \vec{j} - 2\vec{i}$

c) $\vec{s} = 3\vec{i}$

d) $\vec{t} = \vec{i} + \vec{j}$

vektörleri yönlerindeki türevini bulunuz.

$$\nabla f = (2y^3 + 2xy^2)\vec{i} + (4y^3 + 6xy^2 + 2x^2y)\vec{j}$$

$$\nabla f(0,1) = 2\vec{i} + 4\vec{j} \qquad \vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j}$$

a) $D_{\vec{u}} f(0,1) = \nabla f(0,1) \cdot \dfrac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = (2\vec{i} + 4\vec{j}) \cdot \dfrac{(\vec{i} + 2\vec{j})}{\sqrt{5}}$

$|\vec{u}| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$ $\qquad = \dfrac{2+8}{\sqrt{5}} = \dfrac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$

$|\nabla f(0,1)| = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$\vec{u} \parallel \nabla f$ olduğundan bu yöndeki türev gradyen vektör yönündeki türeve eşittir.

b) $D_{\vec{v}} f(0,1) = \nabla f(0,1) \cdot \dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = (2\vec{i} + 4\vec{j}) \cdot \dfrac{(\vec{j} - 2\vec{i})}{\sqrt{5}}$

$|\vec{v}| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$ $\qquad = \dfrac{-4+4}{\sqrt{5}} = 0$

$$\left.\begin{aligned} \nabla f(0,1) &= 2\vec{i} + 4\vec{j} \\ \vec{v} &= -2\vec{i} + \vec{j} \end{aligned}\right\} \quad \nabla f \perp \vec{v} \Rightarrow D_{\vec{v}} f(0,1) = 0$$

c) $\vec{s} = 3\vec{i}$ $\quad D_{\vec{s}} f(0,1) = \nabla f(0,1) \cdot \dfrac{\vec{s}}{|\vec{s}|}$

$= (2\vec{i}+4\vec{j}) \cdot \dfrac{\cancel{3}\vec{i}}{\cancel{3}}$

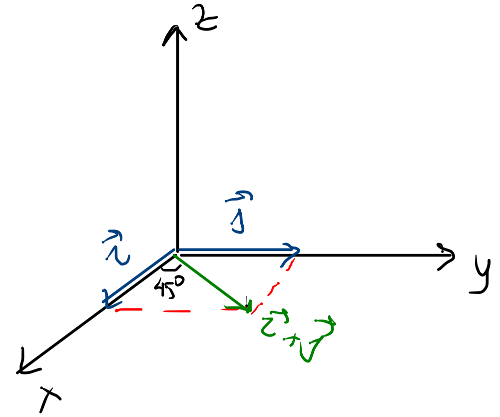
$= 2 = \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,1)$

d) $\vec{t} = \vec{i}+\vec{j}$ $\quad D_{\vec{t}} f(0,1) = \nabla f(0,1) \cdot \dfrac{\vec{t}}{|\vec{t}|} = (2\vec{i}+4\vec{j}) \cdot \dfrac{(\vec{i}+\vec{j})}{\sqrt{2}}$

$|\vec{t}| = \sqrt{1^2+1^2}$

$= \sqrt{2}$

$= \dfrac{2}{\sqrt{2}} + \dfrac{4}{\sqrt{2}} = \dfrac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$



2) $f(x,y) = x \cdot e^y + \cos(xy)$ fonksiyonunun $(2,0)$ noktasında $\vec{v} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$ yönündeki türevini hesaplayınız.

$\nabla f(x,y) = [e^y - y\sin(xy)]\vec{i} + [xe^y - x\sin(xy)]\vec{j}$

$\nabla f(2,0) = [1-0]\vec{i} + [2-0]\vec{j}$

$= \vec{i} + 2\vec{j}$

$D_{\vec{v}} f(2,0) = \nabla f(2,0) \cdot \dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = (\vec{i}+2\vec{j}) \dfrac{(3\vec{i}-4\vec{j})}{\sqrt{9+16}}$

$= \dfrac{3}{5} - \dfrac{8}{5} = -1$

NOT

$$D_{\vec{u}} f(a,b) = \nabla f(a,b)\cdot\vec{u} = |\nabla f(a,b)|\,\underbrace{|\vec{u}|}_{=1}\cos\theta = |\nabla f(a,b)|\cdot\cos\theta$$

$\vec{u}$ → birim vektör

3) $f(x,y)=\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}$ fonksiyonunun aşağıdaki durumlarda yönlerini bulunuz. $\nabla f = x\vec{i}+y\vec{j}$ $\quad \nabla f(1,1)=\vec{i}+\vec{j}$

a) en çok artan (1,1) ⟶ ∇f yönündeki birim vektör için türev en çok artan olmalı. $\vec{u}=\frac{\nabla f}{|\nabla f|}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i}+\vec{j})$

b) en çok azalan (1,1) → ∇f'in ters yönündeki birim vektör için azalan olmalı. $\vec{v}=-\frac{\nabla f}{|\nabla f|}=\frac{-1}{\sqrt{2}}(\vec{i}+\vec{j})$

c) sıfır değişiminin (1,1)

↓ ∇f'e dik olan birim vektörler için değişim sıfırdır.

$(a\vec{i}+b\vec{j})\cdot(\vec{i}+\vec{j})=0 \Rightarrow a+b=0 \Rightarrow a=-b$

$\vec{s}=\vec{i}-\vec{j}$ $\qquad \frac{s}{|\vec{s}|},\ \frac{-s}{|\vec{s}|} : \mp\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i}-\vec{j})$

$t=-\vec{i}+\vec{j}$ $\qquad \frac{t}{|\vec{t}|},\ \frac{-t}{|\vec{t}|} : \mp\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{j}-\vec{i})$

4) NOT: Düzlemdeki bir yön kutupsal bir açıyla belirlenebilir. Eksenin pozitif yönüyle θ açısı yapan yön

$u_\theta=\cos\theta\,\vec{i}+\sin\theta\,\vec{j}$ birim vektörüne karşılık gelir.

$f(x,y) = x^2+2x+3y^2$ fonksiyonunun $\theta = \frac{\pi}{3}$ yönündeki türevinin $(1,\sqrt{3})$ noktasındaki değerini bulunuz.

$\vec{u} = \cos\frac{\pi}{3}\vec{i} + \sin\frac{\pi}{3}\vec{j} = \frac{1}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}$

$D_{\vec{u}} f(1,\sqrt{3}) = \nabla f(1,\sqrt{3}) \cdot \vec{u}$

$\nabla f = (2x+2)\vec{i} + 6y\vec{j}$

$= (4\vec{i} + 6\sqrt{3}\vec{j}) \cdot \left(\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}\right) = 2+9 = 11$

$\nabla f(1,\sqrt{3}) = 4\vec{i} + 6\sqrt{3}\vec{j}$

5) $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ fonksiyonu için $\quad u = x^2+y^2+z^2$

a) $\nabla f(x,y,z) = ?$

$\nabla f(1,-1,2) = ?$

b) f'in $(1,-1,2)$ noktasındaki maksimum artış oranını bulunuz.

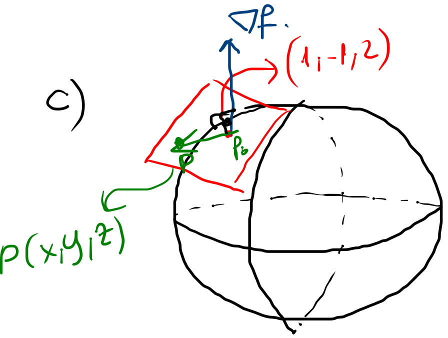
c) $x^2+y^2+z^2 = 6$ küresinin $(1,-1,2)$ noktasındaki teğet düzleminin denklemini bulunuz.

d) f'in $(1,-1,2)$'de, bu noktadan $(3,1,1)$ noktasına doğru ölçülen yöndeki değişim oranını bulunuz.

a) $\nabla f(x,y,z) = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z\vec{k}$

$\nabla f(1,-1,2) = 2\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$

b) $D_{\nabla f} f(1,-1,2) = |\nabla f(1,-1,2)| = \sqrt{4+4+16} = 2\sqrt{6}$

c) 

$x^2+y^2+z^2=6 \rightarrow$ seviye yüzeyi

$P_0(1,-1,2)$ Teğet Düzlem üzerinde bir $P(x,y,z)$ noktası alalım.

$\overrightarrow{P_0P} = (x-1)\vec{i}+(y+1)\vec{j}+(z-2)\vec{k}$ olur. $\nabla f \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$'dır.

$(2\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k})\left[(x-1)\vec{i}+(y+1)\vec{j}+(z-2)\vec{k}\right]=0 \Rightarrow 2(x-1)-2(y+1)+4(z-2)=0$

$2x-2y+4z = 12 \Rightarrow x-y+2z=6$

d) $\vec{u}: (1,-1,2) \rightarrow (3,1,1)$

$\vec{u} = 2\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$

$|\vec{u}| = \sqrt{4+4+1} = 3$

$D_{\vec{u}} f(1,-1,2) = \nabla f(1,-1,2) \cdot \dfrac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = (2\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k}) \cdot \dfrac{2\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}}{3} = \dfrac{4-4-4}{3} = \dfrac{-4}{3}$

6) $f(x,y,z) = x^2+2y^2+3z$ fonksiyonunun $M(1,2,0)$ noktasını $N(2,4,2)$ noktasına birleştiren $\overrightarrow{MN}$ vektörü yönündeki doğrultu türevinin M noktasındaki değerini bulunuz.

$\nabla f(x,y,z) = 2x\vec{i}+4y\vec{j}+3\vec{k}$

$\nabla f(1,2,0) = 2\vec{i}+8\vec{j}+3\vec{k}$

$\overrightarrow{MN} = \vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$

$|\overrightarrow{MN}| = \sqrt{1+4+4} = 3$

$\Rightarrow D_{\overrightarrow{MN}} f(1,2,0) = \nabla f(1,2,0) \cdot \dfrac{\overrightarrow{MN}}{|\overrightarrow{MN}|}$

$= (2\vec{i}+8\vec{j}+3\vec{k}) \cdot \dfrac{\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}}{3} = \dfrac{2+16+6}{3}$

$= \dfrac{24}{3} = 8$