Hiperbolik ve Ters Hiperbolik Fonksiyonların Türevleri

$y = \sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ $\quad D(f): \mathbb{R}$, $R(f): \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $y' = \dfrac{1}{2}\left(e^x - (-e^{-x})\right) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$

$y = \cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ $\quad D(f): \mathbb{R}$, $R(f): [0, \infty)$ kısıtlanmış $\Rightarrow$ $y' = \dfrac{1}{2}\left(e^x + (-e^{-x})\right) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$

$y = \tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ $\quad D(f): \mathbb{R}$, $R(f): \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $y' = \dfrac{(e^x + e^{-x})(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x}).(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2} = 1 - \left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right)^2$

$= 1 - \tanh^2 x$

$= \dfrac{(e^{2x} + 2 + e^{-2x}) - (e^{2x} - 2 + e^{-2x})}{(e^x + e^{-x})^2} = \dfrac{4}{(e^x + e^{-x})^2} = \left(\dfrac{2}{e^x + e^{-x}}\right)^2$

$= \operatorname{sech}^2 x$

$y = \coth x = \dfrac{\cosh x}{\sinh x} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ $\quad D(f): \mathbb{R} - \{0\}$, $R(f): \mathbb{R} - \{0\}$

$y = \operatorname{sech} x = \dfrac{1}{\cosh x} = \dfrac{2}{e^x + e^{-x}}$ $\quad D(f): \mathbb{R}$, $R(f): (0, \infty)$ kısıtlanmış

$y = \operatorname{csch} x = \dfrac{1}{\sinh x} = \dfrac{2}{e^x - e^{-x}}$ $\quad D(f): \mathbb{R} - \{0\}$, $R(f): \mathbb{R} - \{0\}$

$$y=\coth x=\frac{\cosh x}{\sinh x}=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}} \Rightarrow y'=\frac{(e^x-e^{-x})^2-(e^x+e^{-x})^2}{(e^x-e^{-x})^2}=1-\coth^2 x=-\operatorname{csch}^2 x$$

$$y=\operatorname{sech} x=\frac{1}{\cosh x}=\frac{2}{e^x+e^{-x}} \Rightarrow y'=\frac{-2\cdot(e^x-e^{-x})}{(e^x+e^{-x})^2}=\left(\frac{-2}{e^x+e^{-x}}\right)\cdot\left(\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right)=-\operatorname{sech} x\cdot\tanh x$$

$$y=\operatorname{csch} x=\frac{1}{\sinh x}=\frac{2}{e^x-e^{-x}} \Rightarrow y'=\frac{-2(e^x+e^{-x})}{(e^x-e^{-x})^2}=\left(\frac{-2}{e^x-e^{-x}}\right)\cdot\left(\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}\right)=-\operatorname{csch} x\cdot\coth x$$

$u=u(x)$ ise;

$y=\sinh u \Rightarrow y'=u'\cdot\cosh u$

$y=\cosh u \Rightarrow y'=u'\cdot\sinh u$

$y=\tanh u \Rightarrow y'=u'\cdot(1-\tanh^2 u)=u'\cdot\operatorname{sech}^2 u$

$y=\coth u \Rightarrow y'=u'(1-\coth^2 u)=-u'\operatorname{csch}^2 u$

$y=\operatorname{sech} u \Rightarrow y'=-u'\operatorname{sech} u\cdot\tanh u$

$y=\operatorname{csch} u \Rightarrow y'=-u'\operatorname{csch} u\cdot\coth u$

Ters hiperbolik

$$y = \operatorname{argsinh} x \Leftrightarrow x = \sinh y = \frac{e^y - e^{-y}}{2} \Rightarrow e^y - e^{-y} = 2x$$

$$e^{-y}\left(e^{2y} - 1\right) = 2x$$

$$e^{2y} - 1 = 2x \cdot e^y \Rightarrow e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0$$

$$e^y = t \Rightarrow t^2 - 2xt - 1 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{2x \mp \sqrt{4x^2 + 4}}{2}$$

$$t_{1,2} = x \mp \sqrt{x^2+1}$$

$$\Rightarrow e^y = x + \sqrt{x^2+1} \Rightarrow y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

$y = \operatorname{argsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ $\quad \mathbb{R}$

$y = \operatorname{arg\,cosh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$ $\quad [0, \infty)$

$y = \operatorname{argtanh} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ $\quad \mathbb{R}$

$y = \operatorname{argcoth} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ $\quad \mathbb{R} - \{0\}$

$y = \operatorname{argsech} x = \ln\left(\frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{x}\right)$ $\quad [0, \infty)$

$y = \operatorname{argcsch} x = \ln\left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|}\right)$ $\quad \mathbb{R} - \{0\}$

$$y=\operatorname{argsinh}x=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) \Rightarrow y'=\frac{1+\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}=\frac{\cancel{x+\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1}\left[\cancel{x+\sqrt{x^2+1}}\right]}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$y=\operatorname{argcosh}x=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) \Rightarrow y'=\frac{1+\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2-1}}}{x+\sqrt{x^2-1}}=\frac{\cancel{x+\sqrt{x^2-1}}}{\sqrt{x^2-1}\cdot\left(\cancel{x+\sqrt{x^2-1}}\right)}=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \qquad (x>1)$$

$$y=\operatorname{argtanh}x=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \Rightarrow y'=\frac{1}{2}\,\frac{\frac{(1-x)-(1+x)(-1)}{(1-x)^{\cancel{2}}}}{\frac{1+x}{\cancel{1-x}}}=\frac{1}{2}\,\frac{2}{1-x^2}=\frac{1}{1-x^2} \qquad (|x|<1)$$

$$y=\operatorname{argcoth}x=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \Rightarrow y'=\frac{1}{2}\,\frac{\frac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^{\cancel{2}}}}{\frac{x+1}{\cancel{x-1}}}=\frac{1}{\cancel{2}}\,\frac{-\cancel{2}}{x^2-1}=\frac{-1}{x^2-1}=\frac{1}{1-x^2} \qquad (|x|>1)$$

$$y=\operatorname{argsech}x=\ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right) \Rightarrow y'=\frac{\frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{1-x^2}}\cdot x-\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)}{x^2}\cdot\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\frac{-x^2-\sqrt{1-x^2}-(1-x^2)}{x^{\cancel{2}}\cdot\sqrt{1-x^2}}\cdot\frac{\cancel{x}}{1+\sqrt{1-x^2}}=\frac{-\cancel{\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)}}{x\sqrt{1-x^2}}\cdot\frac{1}{\cancel{1+\sqrt{1-x^2}}}$$

$$y' = \frac{-1}{x\sqrt{1-x^2}} \qquad (0<x<1)$$

$$y = \operatorname{argcsch} x = \ln\left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|}\right) \Rightarrow y' = \frac{-1}{|x|\sqrt{1+x^2}} \quad ; \quad x \neq 0$$

$u = u(x)$ ise ;

$$y = \operatorname{argsinh} u = \sinh^{-1} u \Rightarrow y' = \frac{u'}{\sqrt{1+u^2}}$$

$$y = \operatorname{argcosh} u = \cosh^{-1} u \Rightarrow y' = \frac{u'}{\sqrt{u^2-1}}$$

$$y = \operatorname{argtanh} u = \tanh^{-1} u \Rightarrow y' = \frac{u'}{1-u^2}$$

$$y = \operatorname{argcoth} u = \coth^{-1} u \Rightarrow y' = \frac{u'}{1-u^2}$$

$$y = \operatorname{argsech} u = \operatorname{sech}^{-1} u \Rightarrow y' = \frac{-1}{u\sqrt{1-u^2}}$$

$$y = \operatorname{argcsch} u = \operatorname{csch}^{-1} u \Rightarrow y' = \frac{-1}{|u|\sqrt{1+u^2}}$$

Limit Problemleri

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x} \overset{0/0}{=} \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{t}{\ln(1+t)} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{1}{\frac{1}{t}\ln(1+t)}$

$e^x-1=t$

$x\to 0,\ t\to 0$

$e^x=1+t$

$x=\ln(1+t)$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e}$$

$t=\frac{1}{n}$

$t\to 0$

$n\to\infty$

$$\boxed{\lim_{t\to 0}(1+t)^{1/t}=e}$$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n\ln(1+\frac{1}{n})}$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\ln(1+\frac{1}{n})^n} = \dfrac{1}{\ln e} = 1$

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2}-1}{1-\cos x} \overset{0/0}{=} \lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{e^{x^2}-1}{x^2}\cdot\dfrac{x^2}{1-\cos x}\right]$

$= \lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{e^{x^2}-1}{x^2}\cdot\dfrac{x^2}{2\sin^2\frac{x}{2}}\right]$

$= \lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{e^{x^2}-1}{x^2}\cdot\dfrac{\frac{x^2}{2}\cdot\frac{2}{2}}{\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}}\right]$

$= \lim\limits_{x\to 0}\left[\underbrace{\dfrac{e^{x^2}-1}{x^2}}_{1}\ \dfrac{2\cdot\overbrace{\frac{x}{2}}^{1}\cdot\overbrace{\frac{x}{2}}^{1}}{\sin\frac{x}{2}\ \sin\frac{x}{2}}\right]$

$= 2$

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(2-e^x)}{1-e^x} \overset{0/0}{=} \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\ln(1+t)}{t} = \lim\limits_{t\to 0} \ln(1+t)^{1/t} = 1$

$1-e^x = t$

$e^x = 1-t$

$x\to 0 \quad t\to 0$

4) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+\arctan x^2}{1-xe^{1/x}} \overset{\infty/\infty}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\cancel{x}\left[1+\frac{1}{x}\cdot\arctan x^2\right]}{\cancel{x}\left[\frac{1}{x}-e^{1/x}\right]} = \dfrac{1+0}{0-1} = -1$

5) $\lim\limits_{\theta\to 0} \dfrac{\theta}{1-\sqrt{1+\arcsin\theta}} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sin t}{1-\sqrt{1+t}} \cdot \dfrac{(1+\sqrt{1+t})}{(1+\sqrt{1+t})} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sin t\,(1+\sqrt{1+t})}{-t} = -2$

$\dfrac{\sin t}{t} \to 1$

$\arcsin\theta = t \qquad \theta\to 0$

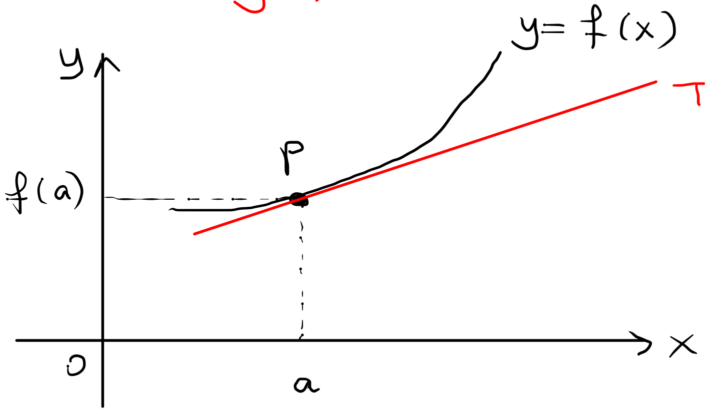
$\theta = \sin t \qquad t\to 0$

6) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x-1}\right)^x \overset{1^\infty}{=} \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{\frac{1}{x}\cdot(x-1)}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{\frac{x-1}{x}}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{x}}\right)^x$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\left(\frac{1}{1+\frac{1}{(-x)}}\right)^{-x}\right]^{-1}$$

$$= \left(e^{-1}\right)^{-1} = e$$

Lineer Yaklaşımlar ve Diferansiyeller
(Lineerizasyon)



f fonksiyonu x=a noktasında türevlenebilir bir fonksiyon ise teğet denklemi bu nokta civarındaki fonksiyonun değerlerine en iyi yaklaşımı verir.

$$L(x) = f(a) + f'(a)\,(x-a)$$

Lineer yaklaşım fonksiyonu f'in $x=a$ daki Lineerizasyonudur.

$$f(x) \approx L(x)$$

alınır. $x=a$ yaklaşımın merkezidir.

Ör/ $f(x)=\sqrt{1+x}$ 'in $x=0$'daki Lineerizasyonunu bulunuz.

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{1+x}} \qquad f(0)=1 \quad , \quad f'(0)=\frac{1}{2}$$

$$L(x)=f(0)+f'(0)\,x=1+\frac{x}{2}$$

$$\sqrt{1{,}2}\cong\sqrt{1+\underset{\sim}{0{,}2}}$$

$$f(0.2)\cong L(0.2)=1+\frac{0{,}2}{2}=1.1$$

Ör/ $\cos 59^\circ \cong ?$

$f(x)=\cos x$ $\quad x=\frac{\pi}{3}$'deki Lineerizasyondan yararlanalım.

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2} \qquad f'(x)=-\sin x \Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow L(x)=f\left(\frac{\pi}{3}\right)+f'\left(\frac{\pi}{3}\right)\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$f\left(\frac{59\pi}{180}\right) \cong L\left(\frac{59\pi}{180}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{59\pi}{180} - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(\frac{-\pi}{180}\right)$$

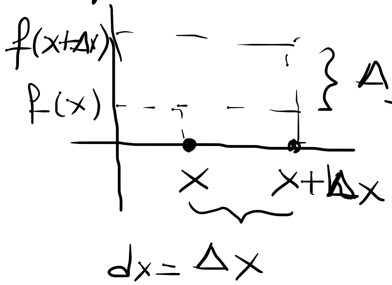
$$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}\,\pi}{360}$$

Diferansiyel

$y=f(x)$ türevlenebilir bir fonksiyon olsun. dx diferansiyeli bağımsız bir değişken olmak üzere y'nin diferansiyeli

$$\boxed{dy = f'(x)\,dx}$$

dir.



$$\Delta y \cong dy \Rightarrow f(x+\Delta x) - f(x) \cong f'(x)\cdot \underbrace{dx}_{\Delta x} \Rightarrow \boxed{f(x+\Delta x) \cong f(x) + f'(x)\,\Delta x}$$

Ör/ $y=\tan 2x \Rightarrow dy = 2.(1+\tan^2 2x)\,dx$

Ör/ $y=\dfrac{x}{x+1} \Rightarrow dy=\left(\dfrac{x+1-x}{(x+1)^2}\right)dx = \dfrac{1}{(x+1)^2}\,dx$

Ör/ $\sqrt{26}$ 'yı diferansiyel yardımıyla yaklaşık olarak hesaplayalım.

$f(x)=\sqrt{x}$ $\qquad 26=25+1$ $\qquad x=25$ $\quad \Delta x=1$ $\qquad f(x+\Delta x)\cong f(x)+f'(x).\Delta x$

$f(25)=5$ $\qquad f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(25)=\dfrac{1}{10}$

$f(25+1)\cong f(25)+f'(25).1$

$f(26)\cong 5+\dfrac{1}{10}=5{,}1$

Ör/ $e^{0{,}2}\cong ?$ $\qquad f(x)=e^x \quad f'(x)=e^x \qquad x=0 \quad \Delta x=0{,}2 \qquad f(0)=f'(0)=e^0=1$

$f(0+0.2)\cong f(0)+f'(0).\Delta x = 1+1.(0.2)\cong 1{,}2$

Belirsiz Şekiller

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0\cdot\infty,\ \infty-\infty,\ \underbrace{1^{\infty},\ 0^{0},\ \infty^{0}}_{\text{üstel belirsizlikler}}$$

L'Hospital kuralları

Teorem 1

f ve g fonksiyonlarının (a,b) aralığında türevlenebilir olduğunu ve bu aralıkta $g'(x)\neq 0$ olduğunu kabul edelim. Ayrıca

i) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} g(x) = 0$ ve

ii) $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$ (L sonlu veya ∞ ya da $-\infty$ olabilir)

olsun. O zaman

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L \text{'dir.}$$

Benzer sonuçlar $\lim_{x \to b^-}$ veya ($a < c < b$ için) $\lim_{x \to c}$ limitleri için de geçerlidir.
($a = -\infty$, $b = \infty$ olabilir)

Ör/ $$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x^2 - 1} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{L'H}{=}} \lim_{x \to 1} \frac{1/x}{2x} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

Ör/ $$\lim_{x \to 0} \frac{2\sin x - \sin(2x)}{2e^x - 2 - 2x - x^2} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{L'H}{=}} \lim_{x \to 0} \frac{2\cos x - 2\cos(2x)}{2e^x - 2 - 2x} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{L'H}{=}} \lim_{x \to 0} \frac{-2\sin x + 4\sin(2x)}{2e^x - 2}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{\underset{L'H}{=}} \lim_{x \to 0} \frac{-2\cos x + 8\cos(2x)}{2e^x}$$

$$= \frac{-2+8}{2} = 3$$

Ör/ $$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{2x - \pi}{\cos^2 x} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{L'H}{=}} \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{2}{-2\sin x . \cos x} = -\infty$$

Ör/ $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right) \overset{\infty-\infty}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x - x}{x\sin x} \underset{L'H}{\overset{0/0}{=}} \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x - 1}{\sin x + x\cos x} \underset{L'H}{\overset{0/0}{=}} \lim_{x\to 0^+} \frac{-\sin x}{2\cos x - x\sin x}$

$= \frac{0}{2-0} = 0$

Teorem 2

f ve g fonksiyonları (a,b) aralığında türevlenebilir ve $g'(x) \neq 0$ olsun. Ayrıca

i) $\lim_{x\to a^+} f(x) = \mp\infty$ ve $\lim_{x\to a^+} g(x) = \mp\infty$ ve

ii) $\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ (L sonlu bir sayı veya ∞ veya $-\infty$ olabilir)

olduğunu kabul edelim. O zaman

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L\text{'dir.}$$

Benzer sonuçlar $\lim_{x\to b^-}$ ve $\lim_{x\to c}$ $(a<c<b)$ limitleri için de sağlanır.

Ör/ $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{e^x}\right) \underset{L'H}{\overset{\infty/\infty}{=}} \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{e^x}\right) \underset{L'H}{\overset{\infty/\infty}{=}} \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{e^x}\right) = 0$

Ör/ $\lim_{x\to 0^+} x^a . \ln x \qquad (a>0)$

$$\lim_{x\to 0^+} x^a . \ln x \overset{0.(-\infty)}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x^{-a}} \underset{L'H}{\overset{\infty/\infty}{=}} \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-a . x^{-a-1}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{-a . x^{-a}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^a}{-a} = 0$$

1^∞, 0^0, ∞^0 Belirsizlikleri

$(1^{\to}0)$

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)} = e^{\ln\left[\lim_{x\to a}(f(x))^{g(x)}\right]} = e^{\lim_{x\to a}\left[\ln[f(x)]^{g(x)}\right]} = e^{\lim_{x\to a}\overbrace{\left[g(x).\ln[f(x)]\right]}^{0.\infty}}$$

$$= e^{\lim_{x\to a}\overbrace{\frac{\ln[f(x)]}{1/g(x)}}^{\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty}}} \overset{L'H}{=} \cdots = e^{A}$$

2-)0)

$y = \lim_{x \to a} [f(x)]^{g(x)} \Rightarrow$ Her iki tarafın doğal Logaritmasını alalım.

$$\ln y = \ln \left[\lim_{x \to a} [f(x)]^{g(x)} \right]$$

$$= \lim_{x \to a} \left[\ln [f(x)]^{g(x)} \right] = \lim_{x \to a} g(x) . \ln [f(x)] \overset{0.\infty}{=} \lim_{x \to a} \frac{\ln [f(x)]}{1/g(x)}$$

$$\underset{L'H}{\overset{\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}}{=}} \cdots\cdots = A$$

$$\Rightarrow \ln y = A \Rightarrow y = e^{A}$$

Ör $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = 1^{\infty}$ B.Ş.

$$y=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} \Rightarrow \ln y = \lim_{x\to\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]$$

$$= \lim_{x\to\infty} x \cdot \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

$$\overset{0\cdot\infty}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{1/x} \underset{L'H}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{-1/x^2}{1+\frac{1}{x}}}{-1/x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 1$$

$$\ln y = 1 \Rightarrow y = e^{1} = e$$

Ör/ $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x = ?$ $\quad 0^0$

$$y=\lim_{x\to 0^+} x^x \Rightarrow \ln y = \lim_{x\to 0^+} x\cdot \ln x \overset{0\cdot\infty}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/x} \underset{L'H}{\overset{\infty/\infty}{=}} \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0^+} -x = 0$$

$$\ln y = 0 \Rightarrow y = e^0 = 1$$

Ör/ $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\sin\left(\frac{3}{x}\right)\right)^x = ?$ $\quad 1^\infty$

$$y=\lim_{x\to\infty}\left(1+\sin\left(\frac{3}{x}\right)\right)^x \Rightarrow \ln y = \lim_{x\to\infty} x\cdot\ln\left(1+\sin\left(\frac{3}{x}\right)\right) \overset{0\cdot\infty}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\sin\left(\frac{3}{x}\right)\right)}{1/x}$$

$$\underset{L'H}{\overset{0/0}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{-\frac{3}{\cancel{x^2}}\cdot\cos\left(\frac{3}{x}\right)}{1+\sin\left(\frac{3}{x}\right)}}{-\frac{1}{\cancel{x^2}}}$$

$$= 3 \cdot \lim_{x\to\infty} \frac{\cos\left(\frac{3}{x}\right)}{1+\sin\left(\frac{3}{x}\right)} = 3 \Rightarrow \ln y = 3 \Rightarrow y = e^3$$

ROLLE VE ORTALAMA DEĞER TEOREMLERİ

Teorem (kritik nokta)

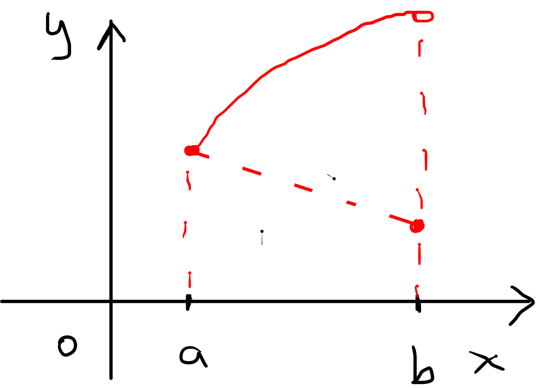
Eğer bir f fonksiyonu (a,b) aralığında tanımlı ve bu aralıktaki bir c noktasında maksimum (veya minimum) değerini alıyorsa ve de $f'(c)$ mevcut ise o zaman $f'(c)=0$'dır.

$x=c$'ye fonksiyonun kritik noktası denir.

Rolle Teoremi : Bir f fonksiyonu kapalı ve sonlu bir $[a,b]$ aralığı üzerinde sürekli ve (a,b) aralığı üzerinde türevlenebilir olsun. Eğer $f(a)=f(b)$ ise $f'(c)=0$ olacak şekilde bir $c\in(a,b)$ noktası vardır.

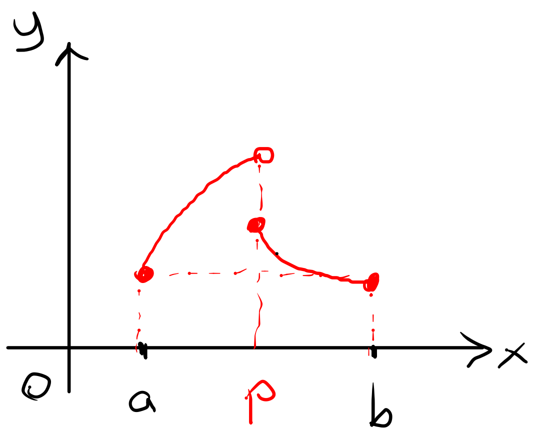
Ortalama Değer Teoremi : Bir f fonksiyonu kapalı ve sonlu bir $[a,b]$ aralığı üzerinde sürekli ve (a,b) aralığı üzerinde türevlenebilir ise o zaman

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$ olacak şekilde $c\in(a,b)$ sayısı vardır.



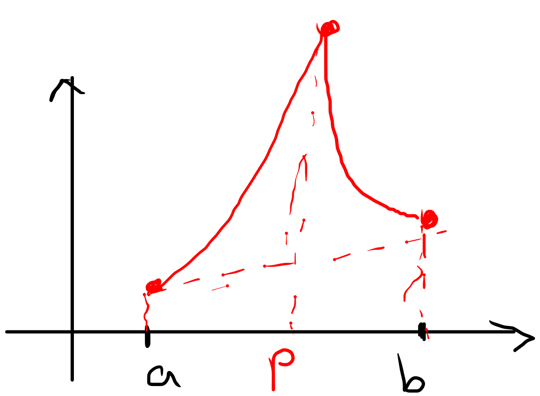
Fonksiyon kapalı aralıkta sürekli değil.

O.D.T uygulanamaz.



Fonksiyon tanım kümesinin bir iç noktasında süreksizdir.

O.D.T. uygulanamaz.



Fonksiyon $p \in (a,b)$ iç noktasında türeve sahip değildir.

O.D.T. uygulanamaz.

ÖRNEKLER

1) $x>0$ için $\sin x < x$ olduğunu gösteriniz.

$x > 2\pi$ ise $\quad \sin x \leq 1 < 2\pi < x$ ✓

$0 \leq x \leq 2\pi$'de $\sin x$ sürekli, $0 < x < 2\pi$'de türevlenebilir o halde O.D.T'ni uygulayalım.

$x>0$ $\quad f(x) = \sin x$

$[0, x] \to f(x)$ sürekli

$(0, x) \to f(x)$ türevli

$\Rightarrow f'(c) = \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$

$[0, x] \subset [0, 2\pi]$

$(0, x) \subset (0, 2\pi)$

$\Rightarrow \cos c = \dfrac{\sin x - 0}{x - 0} \Rightarrow \dfrac{\sin x}{x} = \cos c < 1 \quad c \in (0, 2\pi)$

$\sin x < x$

2) $x>0$ ve $-1\le x<0$ için $\sqrt{1+x} < 1+\frac{x}{2}$ olduğunu gösteriniz.

$\underline{x>0}$ $\quad f(x)=\sqrt{1+x}$ $\quad D(f): [-1,\infty)$ $\quad f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}$ $\quad D(f')=(-1,\infty)$

$[0,x]\subset[-1,\infty)$, $f(x)$ sürekli dir.

$(0,x)\subset(-1,\infty)$, $f(x)$ türevlenebilir.

O.D.T. uygulanabilir.

$$f'(c)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \text{ o.ş. } c\in(0,x) \text{ vardır.} \quad \frac{1}{2\sqrt{1+c}}<\frac{1}{2} \quad c\in(0,x)$$

$$\frac{1}{2\sqrt{1+c}}=\frac{\sqrt{1+x}-1}{x} \Rightarrow \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}<\frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{1+x}-1<\frac{x}{2} \Rightarrow \sqrt{1+x}<1+\frac{x}{2} \checkmark$$

Türevin Uygulamaları

Ekstrem Değerler (Ekstremumlar)

Tanım : (Mutlak Ekstrem Değerler)

- Eğer, f'in tanım aralığındaki $\forall x$ için $f(x) \leq f(x_0)$ olacak şekilde tanım aralığına ait bir x_0 noktası varsa, f fonksiyonu x_0 noktasında $f(x_0)$ mutlak maksimum değerine sahiptir denir.

- Eğer, f'in tanım aralığındaki $\forall x$ için $f(x) \geq f(x_1)$ olacak şekilde tanım aralığına ait bir x_1 noktası varsa, f fonksiyonu x_1 noktasında $f(x_1)$ mutlak minimum değerine sahiptir denir.

NOT : • Bir fonksiyon birden fazla noktada mutlak max. ya da mutlak min. değerine sahip olabilir.

- $f(x) = \sin x$ $\quad x = \frac{\pi}{2} \mp 2n\pi$ $(n \in \mathbb{N})$ mut.max. değeri 1 dir.

  $x = \frac{-\pi}{2} \mp 2n\pi$ $(n \in \mathbb{N})$ mut.min değeri -1 dir.

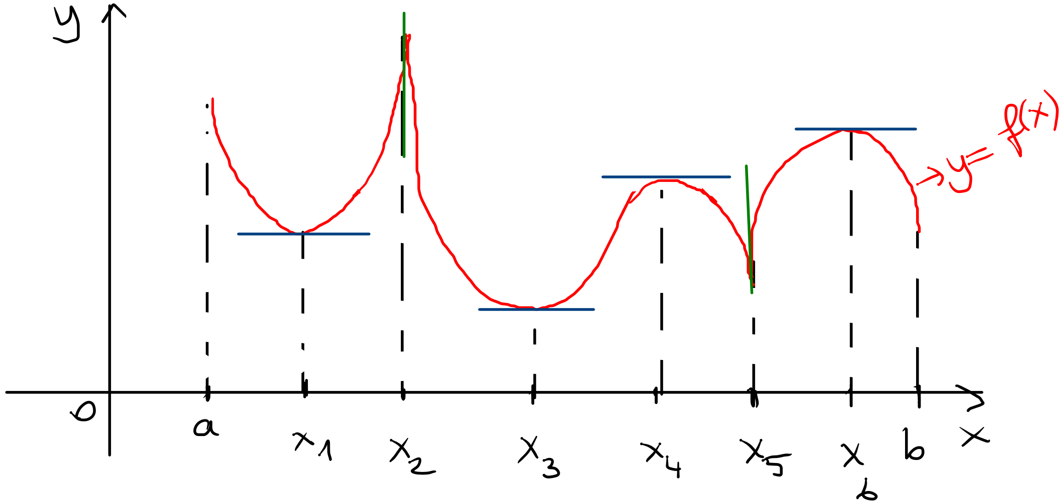
- Her fonksiyonun mut. max. ya da mut. min değerine sahip olması gerekmez.

- $f(x)=\frac{1}{x}$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty \qquad \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=\infty$$

- Fonksiyonun sınırlı olması onun mutlak max veya mutlak min. sahip olmasını garanti etmez.
  - $f(x)=x \ (x\in(0,1))$ fonksiyonu sınırlıdır ancak mutlak max. veya mutlak min. yoktur.

Teorem: (Ekstrem Değerlerin Varlığı)
Eğer fonksiyonun tanım bölgesi sonlu kapalı bir aralık veya bu şekildeki aralıkların sonlu birleşiminden oluşuyorsa ve f bu bölgede sürekli ise o zaman bir mutlak max ve bir mutlak min değere sahiptir.



Şekilde verilen fonksiyonu

mutlak maksimum değerini x_2 noktasında

mutlak minimum değerini x_1 noktasında alır.

Bu ekstrem değerlere ek olarak fonksiyonun yerel maksimum ve minimum değerleri de vardır.

Fonksiyon a uç noktasında, x_2, x_4 ve x_6'da yerel maksimum, b uç noktasında, x_1, x_3 ve x_5'de yerel minimum değerlere sahiptir.

Mutlak maksimum, yerel maksimumların en büyüğü, mutlak minimum da yerel minimumların en küçüğüdür.

Tanım: (Yerel ekstrem değerler)

Bir f fonksiyonu, eğer $x \in D(f)$ ve $|x - x_0| < h$ iken $f(x) \leq f(x_0)$ olacak şekilde bir $h > 0$ sayısı varsa x_0 noktasında $f(x_0)$ yerel maksimum değerine sahiptir denir.

Bir f fonksiyonu, eğer $x \in D(f)$ ve $|x - x_1| < h$ iken $f(x) \geq f(x_1)$ olacak şekilde bir $h > 0$ sayısı varsa x_1 noktasında yerel minimum değere sahiptir denir.