Ör/ $\int \sin^4 x \, dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int (1-2\cos 2x+\cos^2 2x)\, dx$

$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$

$$= \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x \, dx + \frac{1}{4}\int \cos^2 2x \, dx$$

$$= \frac{x}{4} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{4}\int \left(\frac{1+\cos 4x}{2}\right) dx$$

$$= \frac{x}{4} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{1}{8}\int dx + \frac{1}{8}\int \cos 4x \, dx$$

$$= \frac{x}{4} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{x}{8} + \frac{1}{32}\sin 4x + C$$

$\int \sec^m x \cdot \tan^n x \, dx$ veya $\int \csc^m x \cdot \cot^n x \, dx$ şeklindeki integraller

Bu integraller m tek ve n çift olmadıkça ya $\begin{pmatrix} \sec x = u \\ \csc x = u \end{pmatrix}$ ya da $\begin{pmatrix} \tan x = u \\ \cot x = u \end{pmatrix}$ değişken dönüşümleri yapılarak hesaplanır.

Ör/ $\int \tan^2 x\,dx = \int (\tan^2 x + 1 - 1)\,dx = \int (1+\tan^2 x)\,dx - \int dx$

$= \tan x - x + C$

Ör/ $\int \sec^4 x\,dx = \int \sec^2 x \cdot \sec^2 x\,dx = \int \sec^2 x\,(1+\tan^2 x)\,dx = \int (1+u^2)\,du = u + \frac{u^3}{3} + C$

$= \tan x + \frac{\tan^3 x}{3} + C$

$\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$

$\tan x = u$

$\sec^2 x\,dx = du$

Ör/ $\int \sec^3 x \tan^3 x\,dx = \int \sec x \cdot \sec^2 x \cdot \tan x \cdot \tan^2 x\,dx$

$\sec x = u$

$\sec x \cdot \tan x\,dx = du$

$= \int \sec^2 x \cdot \tan^2 x \; \sec x \cdot \tan x\,dx$

$= \int \sec^2 x \cdot (\sec^2 x - 1)\sec x \cdot \tan x\,dx$

$= \int u^2 (u^2 - 1)\,du = \int (u^4 - u^2)\,du = \frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3} + C = \frac{\sec^5 x}{5} - \frac{\sec^3 x}{3} + C$

$$\int \sin ax \cdot \sin bx \, dx$$

$$\int \sin ax \cdot \cos bx \, dx$$

$$\int \cos ax \cdot \cos bx \, dx$$

ör/ $\int \sin 3x \cdot \cos 5x \, dx$

$$= \int \frac{1}{2}\left[\sin(3x+5x) + \sin(3x-5x)\right] dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \sin 8x \, dx + \frac{1}{2}\int \sin(-2x)\, dx$$

$$= \frac{-1}{16}\cos 8x + \frac{1}{4}\cos 2x + C$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$+$

- $\sin a \cdot \cos b = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right]$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

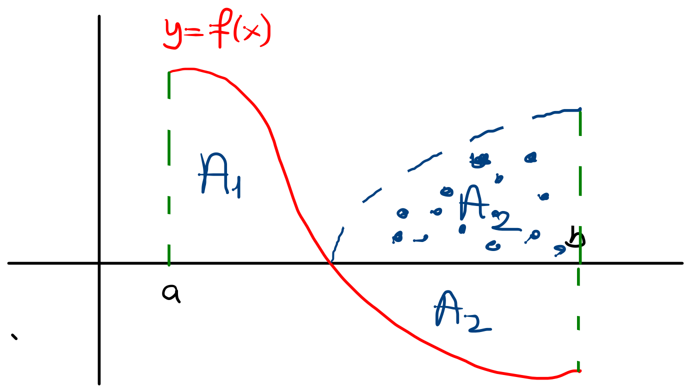
$+$

- $\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]$
- $\sin a \cdot \sin b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right]$

Düzlemsel Bölgelerin Alanları

$\int_a^b f(x)\,dx$ integrali $(a<b)$ $x=a$'dan $x=b$'ye f'in grafiği ile x-ekseni arasındaki alanı ölçer ancak bu alanın x-ekseninin altında kalan herhangi bir parçası negatif olarak gözükür.

$y=f(x)$, x-ekseni $(y=0)$, $x=a$ ve $x=b$ ile sınırlı tüm alanı ifade etmek için (alanın tümünü pozitif sayarak) f'in mutlak değerini integre etmemiz gerekir.



$$\int_a^b f(x)\,dx = A_1 - A_2$$

$$\int_a^b |f(x)|\,dx = A_1 + A_2$$

Ör/ $y=\cos x$; $y=0$, $x=0$ ve $x=\frac{3\pi}{2}$ arasında kalan alanı bulunuz.

$\cos x > 0 \quad x\in(0,\frac{\pi}{2})$ için

$\cos x \leq 0 \quad x\in(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$ için

$$A=\int_0^{\pi/2}\cos x\,dx-\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\cos x\,dx$$

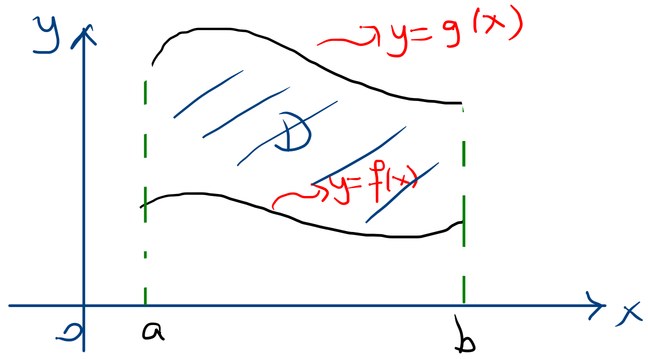
$$=\sin x\Big|_0^{\pi/2}-\left(\sin x\Big|_{\pi/2}^{3\pi/2}\right)$$

$$=(1-0)-(-1-1)$$

$$=1+2$$

$$=3\text{ br}^2$$

İki eğri arasındaki alan:

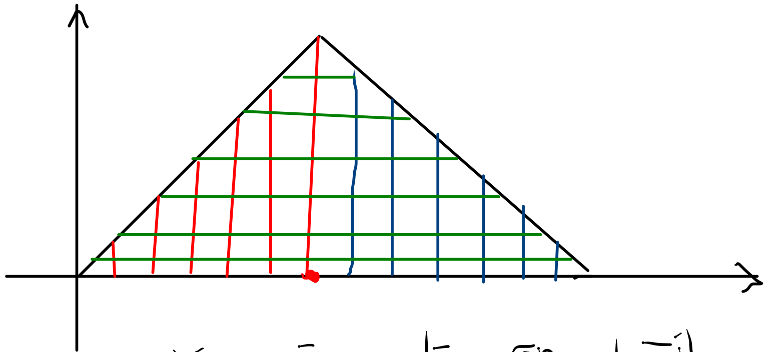


Düzlemsel D bölgesinin $y=f(x)$ ve $y=g(x)$ sürekli fonksiyonlarının grafiği ve dikey $x=a$, $x=b$ doğruları ile sınırlandığını kabul edelim. $a<b$ ve $[a,b]$ aralığında $f<g$ olsun.

Bu durumda düzlemsel D bölgesinin alanı

$$A=\underbrace{\int_a^b g(x)\,dx}_{g(x)\text{'in altında kalan alan}}-\underbrace{\int_a^b f(x)\,dx}_{f(x)\text{'in altında kalan alan}}=\int_a^b\left[g(x)-f(x)\right]dx$$

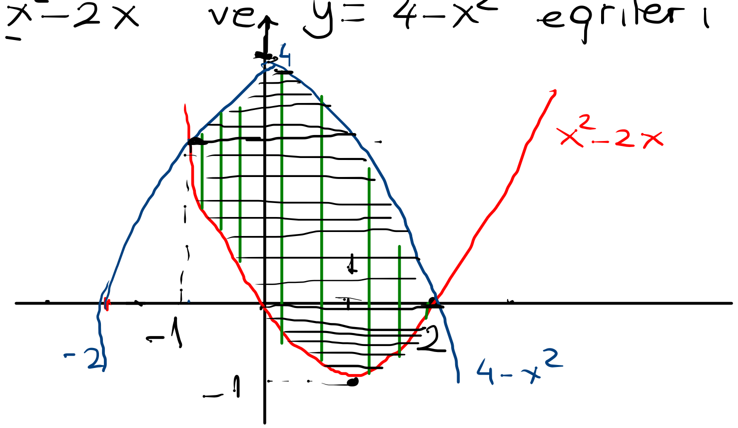
Düzgün bölge : Bölge eksenlere dik doğrularla tarandığında doğru hep aynı iki eğri arasında kalıyorsa bölge düzgündür denir.



x'e göre düzgün değil

y'ye göre bölge düzgündür.

Ör $y=x^2-2x$ ve $y=4-x^2$ eğrileri arasında kalan sınırlı düzlemsel bölgenin alanını bulunuz.



$$x^2-2x = 4-x^2$$

$$2x^2-2x-4=0$$

$$x^2-x-2=0$$

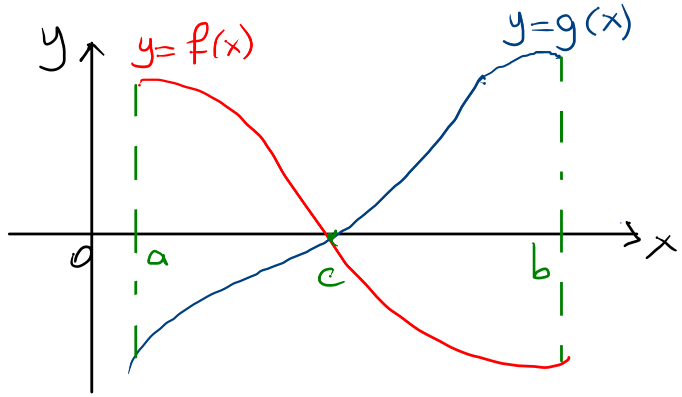
$$(x-2)(x+1)=0$$

$$x=2 \quad x=-1$$

$$A=\int_{-1}^{2}\left[(4-x^2)-(x^2-2x)\right]dx$$

$$=\int_{-1}^{2}(4-2x^2+2x)\,dx$$

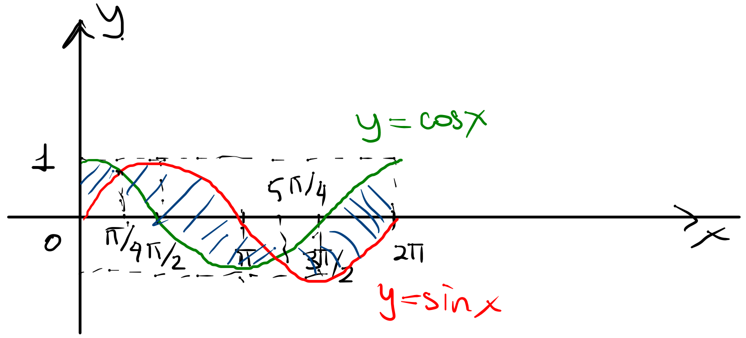
$$=4x-2\frac{x^3}{3}+x^2\Big|_{-1}^{2}=9\,br^2$$



$$A = \int_a^c [f(x) - g(x)]\,dx + \int_c^b [g(x) - f(x)]\,dx$$

$$= \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx$$

Ör/ x=0'dan x=2π'ye y=sinx ve y=cosx eğrileri arasında kalan toplam alanı bulunuz.



$$\sin x = \cos x$$

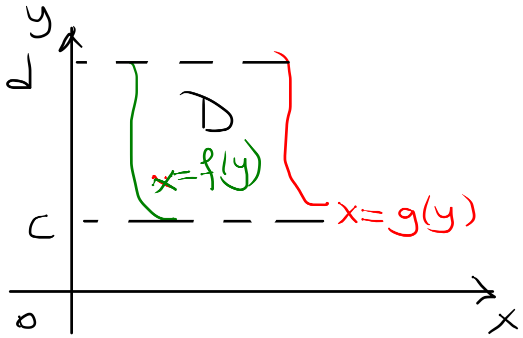
$$\tan x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \in [0, 2\pi]$$

$$A = \int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x)\,dx + \int_{\pi/4}^{5\pi/4} (\sin x - \cos x)\,dx + \int_{5\pi/4}^{2\pi} (\cos x - \sin x)\,dx$$

$$= \left(\sin x + \cos x \Big|_0^{\pi/4}\right) + \left(-\cos x - \sin x \Big|_{\pi/4}^{5\pi/4}\right) + \left(\sin x + \cos x \Big|_{5\pi/4}^{2\pi}\right)$$

$$= \left(\frac{2}{\sqrt{2}} - 1\right) + \left(\frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}}\right) + \left(1 - \left(-\frac{2}{\sqrt{2}}\right)\right)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{4}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}\ br^2$$

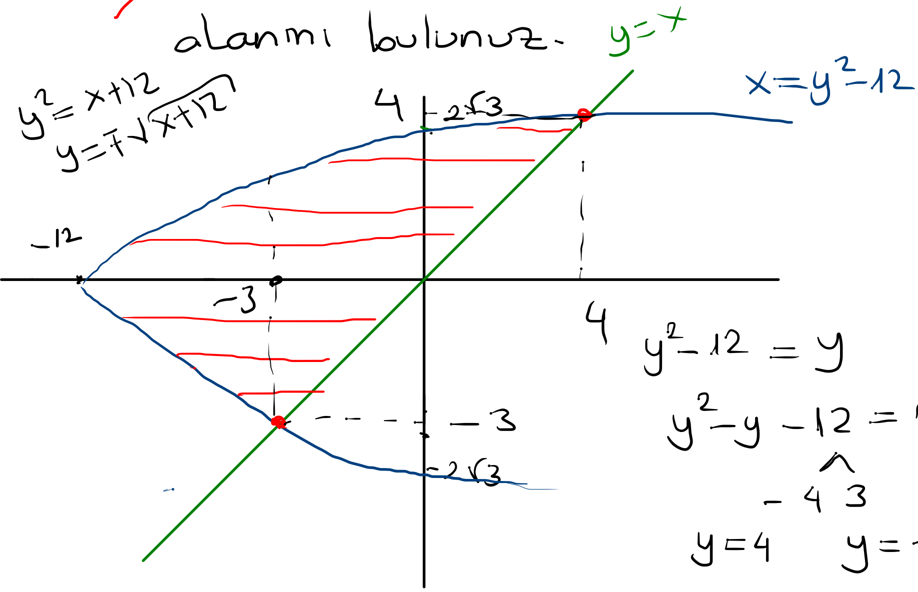


$x=f(y)$, $x=g(y)$ eğrileri ve $y=c$, $y=d$ doğruları ile sınırlı düzlemsel D bölgesinin alanı

$$A=\int_c^d [g(y)-f(y)]\,dy$$

şeklinde hesaplanır.

Ör/ $x=y^2-12$ parabolünün sağında ve $y=x$ doğrusunun solunda kalan düzlemsel bölgenin alanını bulunuz.



$$A=\int_{-3}^{4}\left[y-(y^2-12)\right]dy=\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3}+12y\Big|_{-3}^{4}$$

$y^2-12=y$

$y^2-y-12=0$

$-4 \quad 3$

$y=4 \qquad y=-3$

$$=\left(8-\frac{64}{3}+48\right)-\left(\frac{9}{2}+9-36\right)$$

$$=83-\frac{64}{3}-\frac{9}{2}$$

$$=\frac{343}{6}\ br^2$$

NOT: $A=\int_{-12}^{-3}\left[\sqrt{x+12}-(-\sqrt{x+12})\right]dx+\int_{-3}^{4}(\sqrt{x+12}-x)\,dx$

Ödev

1°) $x^2+y^2-2x=0$ dairesi ile $y=x^2$ parabolü arasındaki alanı hesaplayınız.

$(x-1)^2+y^2=1$

$M(1,0)$ $r=1$

2°) $\left.\begin{array}{l} y=6x-x^2 \\ y=x^2-2x \end{array}\right\}$ parabolleri arasında kalan alanı bulunuz.

İntegrasyon Teknikleri

1°) Kısmi integrasyon

$u(x)$ ve $v(x)$ türevlenebilir iki fonksiyon olsun.

$$\frac{d}{dx}(u.v)=u.\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}$$

denkleminin her iki tarafını integre ederek denklemi düzenleyelim;

$$\int \frac{\cancel{d}}{\cancel{dx}}(u.v)\,\cancel{dx}=\int u\frac{dv}{\cancel{dx}}\cancel{dx}+\int v\frac{du}{\cancel{dx}}\cancel{dx} \Rightarrow u.v=\int u\,dv+\int v\,du \Rightarrow \boxed{\int u\,dv=u.v-\int v\,du}$$

formülünü elde ederiz. Buna kısmi integrasyon formülü denir.

Bu yöntemde amaç $\int u\,dv$ integralini daha basit olan $\int v\,du$ integrali ile değiştirmektir.

Bunun için u ve dv'yi uygun olarak seçmek önemlidir.

L A P T Ü

- L → logaritma
- A → Ters trigonometrik
- P → polinom
- T → Trigonometrik
- Ü → üstel

$$\int \underbrace{\text{Logaritma}}_{u} \times \underbrace{\text{polinom}\ dx}_{dv} \qquad \int \underbrace{\text{Ters trigo.}}_{u} \times \underbrace{\text{polinom}\ dx}_{dv}$$

$$\int \underbrace{\text{polinom}}_{u} \times \underbrace{\text{trigonometrik}\ dx}_{dv} \qquad \int \underbrace{\text{polinom}}_{u} \times \underbrace{\text{üstel}\ dx}_{dv}$$

NOT:

İntegral içerisindeki ifade öyle iki kısma ayrılmalıdır ki biri kolayca türetilebilmeli (u diyeceğimiz kısım) diğeri kolayca integre edilebilmeli (dv diyeceğimiz kısım)

Örnekler

$\int u\,dv = u.v - \int v\,du$

1) $\int \underbrace{x}_{u}.\underbrace{e^x\,dx}_{dv} = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C$

$x = u$

$dx = du$

$\int e^x\,dx = \int dv$

$e^x = v$

2) $\int \underbrace{\ln x}_{u}\;\underbrace{dx}_{dv} = x\ln x - \int \cancel{x}.\frac{dx}{\cancel{x}} = x\ln x - \int dx$

$= x\ln x - x + C$

$\ln x = u$

$\frac{dx}{x} = du$

$\int dx = \int dV$

$x = V$

3) $\int \underbrace{\arcsin x}_{u}\;\underbrace{dx}_{dv} = x\arcsin x - \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$

$\arcsin x = u$

$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = du$

$\int dx = \int dv$

$x = v$

$1 - x^2 = t$

$-2x\,dx = dt$

$-x\,dx = \frac{dt}{2}$

$= x\arcsin x + \int \frac{\frac{dt}{2}}{\sqrt{t}}$

$= x\arcsin x + \int \frac{dt}{2\sqrt{t}}$

$= x\arcsin x + \sqrt{t} + C$

$= x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$

4) $\int \underbrace{x^2}_{u} \underbrace{\sin x \, dx}_{dv} = -x^2\cos x + 2\int \underbrace{x}_{u} \underbrace{\cos x \, dx}_{dv}$

$x^2 = u$

$2x\,dx = du$

$\sin x\,dx = dv$

$-\cos x = v$

$$= -x^2\cos x + 2\left[x\sin x - \int \sin x \, dx\right]$$

$$= -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C$$

$x = u$

$dx = du$

$\cos x\,dx = dv$

$\sin x = v$

UYGULAMA

1°) $a\in\mathbb{R}$ olm. üzere $\forall x>0$ için

$$6+\int_a^x \frac{f(t)}{t^2}\,dt = 2\sqrt{x}$$ eşitliğini sağlayan f fonksiyonunu ve a değerini bulunuz.

$$\frac{d}{dx}\left[6+\int_a^x \frac{f(t)}{t^2}\,dt\right] = \frac{d}{dx}\left[2\sqrt{x}\right]$$

$$1.\frac{f(x)}{x^2} - 0.\frac{f(a)}{a^2} = \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x}} = x^{3/2}$$

$$6+\int_a^x \frac{t^{3/2}}{t^2}\,dt = 2\sqrt{x} \Rightarrow 6+\int_a^x \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt = 2\sqrt{x}$$

$$\Rightarrow 6+\left(2\sqrt{t}\,\Big|_a^x\right) = 2\sqrt{x} \Rightarrow 6+\left(2\sqrt{x}-2\sqrt{a}\right) = 2\sqrt{x}$$

$$\Rightarrow 6-2\sqrt{a} = 0$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{a} = 6 \Rightarrow a = 9$$

2) Sürekli, türevlenebilir bir F fonksiyonu $x \geq 1$ olm. üzere

$$F(x) = \frac{1}{x} \int_1^{x^2} \left[e^{1-\sqrt{t}} - F'(\sqrt{t}) \right] dt$$ denklemini sağlıyor ise $F'(1) = ?$

$$F'(x) = -\frac{1}{x^2} \int_1^{x^2} \left[e^{1-\sqrt{t}} - F'(\sqrt{t}) \right] dt + \frac{1}{\cancel{x}} \cdot 2\cancel{x} \left[e^{1-x} - F'(x) \right]$$

$$3F'(x) = \frac{-1}{x^2} \int_1^{x^2} \left[e^{1-\sqrt{t}} - F'(\sqrt{t}) \right] dt + 2e^{1-x}$$

$$F'(x) = \frac{-1}{3x^2} \int_1^{x^2} \left[e^{1-\sqrt{t}} - F'(\sqrt{t}) \right] dt + \frac{2}{3} e^{1-x}$$

$$F'(1) = \frac{-1}{3} \underbrace{\int_1^1 \left[e^{1-\sqrt{t}} - F'(\sqrt{t}) \right] dt}_{=0} + \frac{2}{3} \underbrace{e^0}_{1} = \frac{2}{3}$$

3) $F: (-\infty, 0] \to \mathbb{R}$

$$F(x) = \int_1^{x^2} \frac{1+\sqrt{t}}{1+t^2}\, dt$$ kritik noktalarını bulunuz ve sınıflandırınız.

$$F'(x) = 2x \cdot \frac{1+x}{1+x^4} = \frac{2x(1+x)}{1+x^4}$$

x	$-\infty$	-1	0
F'	$+$	$-$	
F	$\nearrow$	$\searrow$	
		maks.	

$F'(x) = 0 \Rightarrow 2x(1+x) = 0$

$x = 0 \quad x = -1$ K.N.

$F(-1)$ maks.

$F(-1) = 0$

$$\int_0^1 (12 + 8x)\, dx$$

4) $$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{12}{n} + \frac{8}{n^2} i \right)$$ belirli int. olarak yazınız.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x_i = \int_a^b f(x)\, dx$$

$$\Delta x_i = \frac{b-a}{n} \qquad x_i = a + i \cdot \left(\frac{b-a}{n}\right)$$
$$= a + i \cdot \Delta x_i$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left(12 + \frac{8}{n} i\right)}_{f(x_i)} \cdot \underbrace{\frac{1}{n}}_{\Delta x_i}$$

$$= \int_0^1 (12 + 8x)\, dx$$

$\Delta x_i = \frac{1}{n} = \frac{1-0}{n}$

$a = 0, \; b = 1$

$x_i = \frac{i}{n}$

$f(x) = 12 + 8x$

5) $f(x) = c + d\cos x \qquad c, d \in \mathbb{R}$

fonksiyonuna $[-\pi, \pi]$ aralığında int. için ort. değer teo. uygulanabilir mi? Uygulanıyorsa ort. değeri bulunuz.

f, $[-\pi, \pi]$ de sürekli olduğundan teo. uygulanabilir.

$$\tilde{f}_{ort} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx \qquad f_{ort} = \frac{1}{\pi-(-\pi)} \int_{-\pi}^{\pi} (c + d\cos x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(cx + d\sin x \Big|_{-\pi}^{\pi} \right) = \frac{1}{2\pi} \left[c(\pi-(-\pi)) + d \cdot \cancel{[\sin\pi - \sin(-\pi)]}^{0} \right]$$

$$= \frac{1}{\cancel{2\pi}} \cdot \cancel{2\pi} c = c$$

6) $[0,2]$ aralığında $\int_0^2 \sqrt{1+2x^2}\,dx$ integralinin alabileceği en büyük ve en küçük değer nedir?

$$\min f \cdot (b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \text{maks} f \cdot (b-a)$$

$$1 \cdot 2 \leq \int_0^2 \sqrt{1+2x^2}\,dx \leq 3 \cdot 2$$

$$2 \leq \int_0^2 \sqrt{1+2x^2}\,dx \leq 6$$

$f(x) = \sqrt{1+2x^2} \qquad [0,2]$

$1 \leq 1+2x^2 \leq 9 \qquad b-a = 2$

$1 \leq \sqrt{1+2x^2} \leq 3$

NOT: Orjinal integralin eşitliğin sağ tarafında tekrar oluşması durumunda yapılacak işlem aşağıdaki örneklerde olduğu gibidir.

Ör/ $I=\int \underbrace{\sec^3 x \, dx}_{} = \int \underbrace{\sec x}_{u} \cdot \underbrace{\sec^2 x \, dx}_{dv} = \sec x \cdot \tan x - \int \sec x \cdot \tan^2 x \, dx$

$= \sec x \cdot \tan x - \int \sec x (\sec^2 x - 1) \, dx$

$= \sec x \cdot \tan x - \underbrace{\int \sec^3 x \, dx}_{I} + \int \sec x \, dx$

$\sec x = u$

$\sec x \cdot \tan x \, dx = du$

$\sec^2 x \, dx = dv$

$\tan x = v$

$\Rightarrow \quad 2I = \sec x \cdot \tan x + \int \sec x \, dx$

$2I = \sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x|$

$I = \frac{1}{2}\left[\sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x|\right] + c$

~~Or~~

$$I = \int \underbrace{e^x}_{u} \cdot \underbrace{\cos 2x \, dx}_{dv} = \frac{1}{2} e^x \cdot \sin 2x - \int \frac{1}{2} e^x \cdot \sin 2x \, dx$$

$$= \frac{1}{2} e^x \sin 2x - \frac{1}{2} \int \underbrace{e^x}_{u} \cdot \underbrace{\sin 2x \, dx}_{dv}$$

$$= \frac{1}{2} e^x \sin 2x - \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2} e^x \cdot \cos 2x + \frac{1}{2} \int e^x \cos 2x \, dx \right]$$

$$= \frac{1}{2} e^x \sin 2x + \frac{1}{4} e^x \cos 2x - \frac{1}{4} \underbrace{\int e^x \cos 2x \, dx}_{I}$$

$e^x = u$

$e^x \, dx = du$

$\cos 2x \, dx = dv$

$\frac{1}{2} \sin 2x = v$

$\sin 2x \, dx = dv$

$-\frac{1}{2} \cos 2x = v$

$$\Rightarrow \quad I + \frac{I}{4} = \frac{1}{2} e^x \sin 2x + \frac{1}{4} e^x \cos 2x$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{4}{5} \left[\frac{1}{2} e^x \sin 2x + \frac{1}{4} e^x \cos 2x \right] + C$$

$$= \frac{1}{5} \cdot e^x \left[2 \sin 2x + \cos 2x \right] + C$$

Belirli integralde kısmi integrasyon

Ör)

$$\int_1^e x^3(\ln x)^2\,dx = \frac{x^4}{4}(\ln x)^2\Big|_1^e - \int_1^e \cancel{2}\ln x\cdot\frac{1}{\cancel{x}}\cdot\frac{x^4}{\underset{2}{\cancel{4}}}\,dx$$

$$= \left[\frac{e^4}{4}(\overset{1}{\cancel{\ln e}})^2 - \frac{1}{4}(\overset{0}{\cancel{\ln 1}})^2\right] - \frac{1}{2}\int_1^e x^3\ln x\,dx$$

$$= \frac{e^4}{4} - \frac{1}{2}\left[\frac{x^4}{4}\cdot\ln x\Big|_1^e - \int_1^e \frac{x^4}{4}\cdot\frac{dx}{\cancel{x}}\right]$$

$$= \frac{e^4}{4} - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{e^4}{4}\overset{1}{\cancel{\ln e}} - \frac{1}{4}\overset{0}{\cancel{\ln 1}}\right) - \frac{1}{4}\int_1^e x^3\,dx\right]$$

$$= \frac{e^4}{4} - \frac{1}{2}\left[\frac{e^4}{4} - \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{x^4}{4}\Big|_1^e\right)\right]$$

$$= \frac{e^4}{4} - \frac{e^4}{8} + \frac{1}{8}\left(\frac{e^4}{4} - \frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{e^4}{4} - \frac{e^4}{8} + \frac{e^4}{32} - \frac{1}{32} = \frac{5e^4-1}{32}$$

$(\ln x)^2 = u$

$2\ln x\cdot\frac{1}{x}\,dx = du$

$x^3\,dx = dv$

$\frac{x^4}{4} = v$

$\ln x = u$

$\frac{dx}{x} = du$

İndirgeme Formülleri

Ör/ $\int x^4 e^{-x}\,dx = I_4$ $\qquad$ $I_0 = \int e^{-x}\,dx = -e^{-x} + c$ $\qquad$ $\boxed{24c = c_1}$

$$I_n = \int \underbrace{x^n}_{u}\, \underbrace{e^{-x}\,dx}_{dv} = -x^n e^{-x} + \int n x^{n-1} e^{-x}\,dx$$

$$= -x^n e^{-x} + n \underbrace{\int x^{n-1} e^{-x}\,dx}_{I_{n-1}} \Rightarrow I_n = -x^n e^{-x} + n\, I_{n-1}$$

$x^n = u$

$n x^{n-1}\,dx = du$

$e^{-x}\,dx = dv$

$-e^{-x} = v$

$$I_4 = -x^4 e^{-x} + 4 I_3 = -x^4 e^{-x} + 4\left[-x^3 e^{-x} + 3 I_2\right]$$

$$= -x^4 e^{-x} - 4x^3 e^{-x} + 12\left[-x^2 e^{-x} + 2 I_1\right]$$

$$= -x^4 e^{-x} - 4x^3 e^{-x} - 12x^2 e^{-x} + 24\left[-x e^{-x} + I_0\right]$$

$$= -x^4 e^{-x} - 4x^3 e^{-x} - 12x^2 e^{-x} - 24 x e^{-x} - 24 e^{-x} + C$$

$\int x^3 \sin x$

TÜREV		İNTEGRAL
$f(x) = x^3$	$+$	$g(x) = \sin x$
$3x^2$	$-$	$-\cos x$
$6x$	$+$	$-\sin x$
6	$-$	$\cos x$
0		$\sin x$

TÜREV		İNT.
x^4	$+$	e^{-x}
$4x^3$	$-$	$-e^{-x}$
$12x^2$	$+$	e^{-x}
$24x$	$-$	$-e^{-x}$
24	$+$	e^{-x}
0		$-e^{-x}$

$$-x^4e^{-x}-4x^3e^{-x}-12x^2e^{-x}-24xe^{-x}-24e^{-x}+C$$

Ör/ $\int_0^{\pi/2}\cos^n x\,dx$ $(n\in\mathbb{N})$ int. hesaplamak için bir indirgeme formülü bulunuz.

$$I_n=\int_0^{\pi/2}\cos^n x\,dx=\int_0^{\pi/2}\underbrace{\cos^{n-1}x}_{u}\cdot\underbrace{\cos x\,dx}_{dv}=\cos^{n-1}x\cdot\sin x\Big|_0^{\pi/2}+\int_0^{\pi/2}(n-1)\cdot\cos^{n-2}x\cdot\sin^2 x\,dx$$

$\cos^{n-1}x=u$ $\qquad\qquad$ $\cos x\,dx=dv$

$(n-1)\cdot\cos^{n-2}x\cdot(-\sin x)\,dx=du$ $\qquad\qquad$ $\sin x=v$

$$I_n = \underbrace{\int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx}_{} = \int_0^{\pi/2} \underbrace{\cos^{n-1} x}_{u} . \underbrace{\cos x \, dx}_{dv} = \cancelto{0}{\cos^{n-1} x . \sin x} \Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} (n-1) . \cos^{n-2} x . \sin^2 x \, dx$$

$$= (n-1) \int_0^{\pi/2} \cos^{n-2} x . \left(1 - \cos^2 x\right) dx$$

$$= (n-1) \underbrace{\int_0^{\pi/2} \cos^{n-2} x \, dx}_{I_{n-2}} - (n-1) \underbrace{\int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx}_{I_n}$$

$$\Rightarrow \quad I_n = (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n$$

$$\Rightarrow \quad [1 + (n-1)] I_n = (n-1) I_{n-2} \quad \Rightarrow \quad I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \qquad (n \geq 2)$$

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \cos x \, dx = \sin x \Big|_0^{\pi/2} = 1$$

$$I_5 = \int_0^{\pi/2} \cos^5 x \, dx = \frac{5-1}{5} I_3 = \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} I_1 = \frac{4}{5} . \frac{2}{3} . 1$$

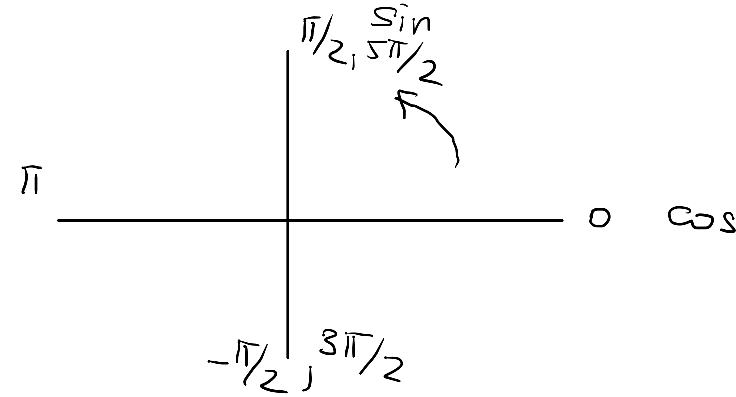
$$I_0 = \int_0^{\pi/2} dx = x \Big|_0^{\pi/2} = \pi/2$$

$$I_6 = \int_0^{\pi/2} \cos^6 x \, dx = \frac{6-1}{6} I_4 = \frac{5}{6} \, \frac{3}{4} \, I_2 = \frac{5}{6} . \frac{3}{4} . \frac{1}{2} I_0$$

$$= \frac{5}{6} . \frac{3}{4} . \frac{1}{2} . \frac{\pi}{2}$$

TERS DEĞİŞKEN DÖNÜŞÜMÜ

Trigonometrik ters değişken dönüşümler



$\sqrt{x^2-a^2}$, $\dfrac{1}{x^2+a^2}$, $\sqrt{x^2+a^2}$, $\sqrt{a^2-x^2}$

1°) İntegralde $a>0$ olmak üzere $\sqrt{a^2-x^2}$ şeklinde terim bulunuyorsa $x=a\sin t$ dönüşümü yapılır.

$$\sqrt{a^2-x^2} \overset{x=a\sin t}{=} \sqrt{a^2-a^2\sin^2 t} = \sqrt{a^2\cos^2 t} = a\cos t$$

$$\sqrt{a^2-x^2} \to a^2-x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq a^2 \Rightarrow -a \leq x \leq a$$

$$t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \cos t \geq 0$$

$$x = a\sin t \Rightarrow dx = a\cos t\, dt$$

$x=-a \Rightarrow -a = a\sin t$

$\sin t = -1 \Rightarrow t = -\pi/2$

$x = a \Rightarrow a = a\sin t$

$\sin t = 1 \Rightarrow t = \pi/2$

Ör/ $\displaystyle\int \frac{dx}{(5-x^2)^{3/2}} = \int \frac{dx}{\left(\sqrt{5-x^2}\right)^3} = \int \frac{\sqrt{5}\cos t\, dt}{\left(\sqrt{5-5\sin^2 t}\right)^3} = \int \frac{\sqrt{5}\cos t\, dt}{\left(\sqrt{5}\cos t\right)^3} = \frac{1}{5}\int \frac{dt}{\cos^2 t}$

$$= \frac{1}{5}\int \sec^2 t\, dt$$

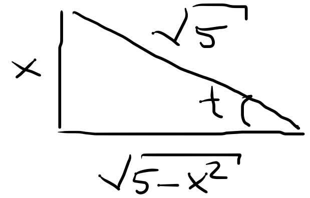
$$= \frac{1}{5}\tan t + c$$

$$= \frac{1}{5}\,\frac{x}{\sqrt{5-x^2}} + c$$

$x = \sqrt{5}\sin t$

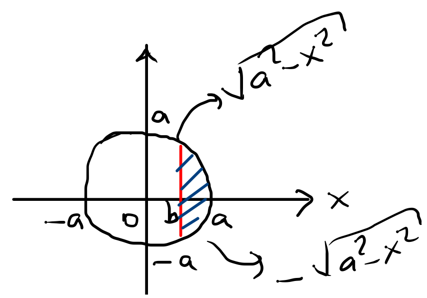
$dx = \sqrt{5}\cos t\, dt$

$\sin t = \dfrac{x}{\sqrt{5}}$



Öd/ $\displaystyle\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{1-x^2}}$

Ör/



$x^2+y^2=a^2$

$y = \mp\sqrt{a^2-x^2}$

$$T.A = 2\cdot\int_b^a \sqrt{a^2-x^2}\, dx = \int_{\arcsin\frac{b}{a}}^{\pi/2} \underbrace{\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}}_{a\cos t}\cdot a\cos t\, dt$$

$x = a\sin t$

$dx = a\cos t\, dt$

$x=b \Rightarrow b = a\sin t \Rightarrow \sin t = \dfrac{b}{a}$

$\Rightarrow t = \arcsin\dfrac{b}{a}$

$x=a \Rightarrow a = a\sin t \Rightarrow \sin t = 1 \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{2}$

$$= 2\int_{\arcsin\frac{b}{a}}^{\pi/2} a^2 \cdot \cos^2 t \, dt = 2a^2 \int_{\arcsin\frac{b}{a}}^{\pi/2} \left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right) dt = a^2 \int_{\arcsin\frac{b}{a}}^{\pi/2} dt + a^2 \int_{\arcsin\frac{b}{a}}^{\pi/2} \cos 2t \, dt$$

$$= a^2 \, t \Big|_{\arcsin\frac{b}{a}}^{\pi/2} + a^2 \cdot \frac{1}{2} \sin 2t \Big|_{\arcsin\frac{b}{a}}^{\pi/2}$$

$$= a^2 \left[\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{b}{a}\right] + \frac{a^2}{2}\left[\cancel{\sin\pi}^{\,0} - \sin 2\left(\arcsin\frac{b}{a}\right)\right]$$

$$= \frac{a^2\pi}{2} - a^2 \arcsin\frac{b}{a} + \frac{a^2}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2} \cdot \sin\left(\arcsin\frac{b}{a}\right) \cdot \cos\left(\arcsin\frac{b}{a}\right)$$

$$= \frac{a^2}{2}\pi - a^2 \arcsin\frac{b}{a} + a^2 \cdot \frac{b}{a} \cdot \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

$$= \frac{a^2}{2}\pi - a^2 \arcsin\frac{b}{a} + b\sqrt{a^2 - b^2} \quad br^2$$

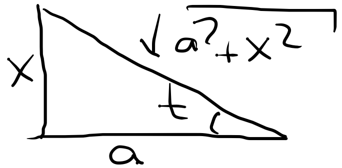
2°) İntegralde $a>0$ olmak üzere $\sqrt{a^2+x^2}$ veya $\dfrac{1}{a^2+x^2}$ şeklinde terim bulunuyorsa

$x = a\tan t$ değişken dönüşümü yapılır. $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ (sec t > 0)

$$\sqrt{a^2+x^2} = \sqrt{a^2+a^2\tan^2 t} = a\sqrt{\sec^2 t} = a\sec t$$

$$x = a\tan t \Rightarrow \tan t = \frac{x}{a}$$

$$dx = a\sec^2 t\, dt$$



Ör/
$$\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}} = \int \frac{2\sec^2 t\, dt}{\sqrt{4+4\tan^2 t}} = \int \frac{\cancel{2}\sec^{\cancel{2}} t\, dt}{\cancel{2}\cancel{\sec t}} = \int \sec t\, dt = \ln|\sec t + \tan t| + C$$

$$= \ln\left|\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a} + \frac{x}{a}\right| + C$$

$$= \ln\left|\frac{\sqrt{a^2+x^2}+x}{a}\right| + C$$

$$= \ln\left|\sqrt{a^2+x^2}+x\right| - \ln a + C$$

$$= \ln\left|\sqrt{a^2+x^2}+x\right| + c_1$$

$x = 2\tan t$

$dx = 2\sec^2 t\, dt$

$c_1 = c - \ln a$

Öd/
$$\int \frac{dx}{(1+9x^2)^2}$$

3°) İntegralde $a>0$ olmak üzere $\sqrt{x^2-a^2}$ şeklinde terim bulunuyorsa $x=a\sec t$ dönüşümü yapılır.

$$\sqrt{x^2-a^2} \to x^2-a^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq a^2 \Rightarrow x \leq -a \ , \ x \geq a$$

$$x \leq -a \Rightarrow \frac{\pi}{2} < t \leq \pi \quad , \quad x \geq a \Rightarrow 0 \leq t < \frac{\pi}{2}$$

$x=a\sec t$

$$\sqrt{a^2\sec^2 t-a^2} = a\sqrt{\sec^2 t-1} = a\sqrt{\tan^2 t} = a|\tan t|$$

$$x=a\sec t \Rightarrow dx = a\sec t\tan t\, dt$$

Ör/ $x \geq 2$ olm. üzere → olmasaydı. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}} = ?$

$$= \int \frac{1}{2}\frac{\tan t}{|\tan t|}dt = \begin{cases} -\frac{1}{2}\int dt & \frac{\pi}{2}<t\leq\pi \\ \frac{1}{2}\int dt & 0\leq t<\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$x=2\sec t$

$dx = 2\sec t\tan t\, dt$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}} = \int \frac{\cancel{2\sec t}\tan t\, dt}{\cancel{2\sec t}\,\underbrace{\sqrt{4\sec^2 t-4}}_{4\tan^2 t}} = \int \frac{\cancel{\tan t}}{2\cancel{\tan t}}dt = \frac{1}{2}t + C$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{arcsec}\frac{x}{2} + C$$

$$= \frac{1}{2}\arccos\frac{2}{x} + C$$

$$\sec t = \frac{x}{2} \Rightarrow t = \sec^{-1}\frac{x}{2} = \operatorname{arcsec}\frac{x}{2}$$