Hiperbolik ve Ters Hiperbolik Fonksiyonların Türevleri

$y = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ $\quad D(f): \mathbb{R} \quad R(f): \mathbb{R} \Rightarrow$

$y = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ $\quad D(f): \mathbb{R} \quad R(f): [0, \infty) \Rightarrow$ kısıtlanmış

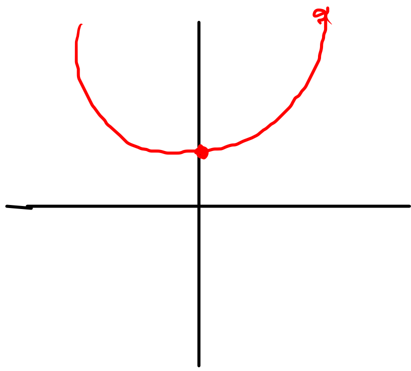
$y = \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \Rightarrow$ $\quad D(f): \mathbb{R} \quad R(f): \mathbb{R}$

$y = \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ $\quad D(f): \mathbb{R} - \{0\} \quad R(f): \mathbb{R} - \{0\}$

$y = \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$ $\quad D(f): \mathbb{R} \quad R(f): [0, \infty)$ kısıtlanmış

$y = \operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$ $\quad D(f): \mathbb{R} - \{0\} \quad R(f): \mathbb{R} - \{0\}$

Hiperbolik ve Ters Hiperbolik Fonksiyonların Türevleri



$y = \sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ $\quad D(f): \mathbb{R}$, $R(f): \mathbb{R}$ $\Rightarrow y' = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$

$y = \cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ $\quad D(f): \mathbb{R} \to [0, \infty)$, $R(f): [0, \infty)$ kısıtlanmış $\Rightarrow y' = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$

$y = \tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ $\Rightarrow$ $D(f): \mathbb{R}$, $R(f): \mathbb{R}$

$y' = \dfrac{\cosh x \cdot \cosh x - \sinh x \cdot \sinh x}{(\cosh x)^2} = 1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$

$y = \coth x = \dfrac{\cosh x}{\sinh x} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ $\quad D(f): \mathbb{R} - \{0\}$, $R(f): \mathbb{R} - \{0\}$

$y' = \dfrac{\sinh x \cdot \sinh x - \cosh x \cdot \cosh x}{(\sinh x)^2} = 1 - \coth^2 x = \dfrac{-1}{\operatorname{csch}^2 x}$

$y = \operatorname{sech} x = \dfrac{1}{\cosh x} = \dfrac{2}{e^x + e^{-x}}$ $\quad D(f): \mathbb{R}$, $R(f): [0, \infty)$ kısıtlanmış $\Rightarrow y' = \dfrac{-\sinh x}{\cosh^2 x} = -\operatorname{sech} x \cdot \tanh x$

$y = \operatorname{csch} x = \dfrac{1}{\sinh x} = \dfrac{2}{e^x - e^{-x}}$ $\quad D(f): \mathbb{R} - \{0\}$, $R(f): \mathbb{R} - \{0\}$ $\Rightarrow y' = -\dfrac{\cosh x}{\sinh^2 x} = -\operatorname{csch} x \cdot \coth x$

$u = u(x)$ ise;

$$y = \sinh u \Rightarrow y' = u' \cdot \cosh u$$

$$y = \cosh u \Rightarrow y' = u' \cdot \sinh u$$

$$y = \tanh u \Rightarrow y' = u' \cdot (1 - \tanh^2 u) = u' \cdot \operatorname{sech}^2 u$$

$$y = \coth u \Rightarrow y' = u' (1 - \coth^2 u) = -u' \operatorname{csch}^2 u$$

$$y = \operatorname{sech} u \Rightarrow y' = -u' \operatorname{sech} u \cdot \tanh u$$

$$y = \operatorname{csch} u \Rightarrow y' = -u' \operatorname{csch} u \cdot \coth u$$

Ters hiperbolik

$$y = \operatorname{argsinh} x \iff x = \sinh y = \frac{e^y - e^{-y}}{2} \Rightarrow e^y - e^{-y} = 2x$$

$$e^{-y}(e^{2y} - 1) = 2x$$

$$e^{2y} - 1 = 2xe^y$$

$$e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0$$

$$e^y = t \Rightarrow t^2 - 2xt - 1 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{-(-2x) \mp \sqrt{(-2x)^2 - 4.1.(-1)}}{2}$$

$$= \frac{2x \mp \sqrt{4(x^2+1)}}{2}$$

$$= x \mp \sqrt{x^2+1}$$

$$e^y = x + \sqrt{x^2+1}, \quad \cancel{e^y = x - \sqrt{x^2+1}}$$

$$y = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$$

$y = \operatorname{argsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$	$\mathbb{R}$
$y = \operatorname{arg\,cosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$	$[0,\infty)$
$y = \operatorname{argtanh} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$	$\mathbb{R}$
$y = \operatorname{argcoth} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$	$\mathbb{R} - \{0\}$
$y = \operatorname{argsech} x = \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$	$[0,\infty)$
$y = \operatorname{argcsch} x = \ln\left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1+x^2}}{\lvert x\rvert}\right)$	$\mathbb{R} - \{0\}$

$$y = \operatorname{argsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \Rightarrow y' = \frac{1 + \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{\frac{\sqrt{x^2+1} + x}{\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$y = \operatorname{argcosh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \Rightarrow y' = \frac{1 + \frac{\cancel{2}x}{2\sqrt{x^2-1}}}{x + \sqrt{x^2-1}} = \frac{\frac{\sqrt{x^2-1} + x}{\sqrt{x^2-1}}}{x + \sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$y = \operatorname{argtanh} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \Rightarrow y' = \frac{1}{2}\,\frac{\frac{(1-x)+(1+x)}{(1-x)^2}}{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1}{2}\,\frac{2}{(1-x)(1+x)} = \frac{1}{1-x^2}$$

$$y = \operatorname{argcoth} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \Rightarrow y' = \frac{1}{2}\,\frac{\frac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2}}{\frac{x+1}{x-1}} = \frac{1}{2}\,\frac{-2}{(x-1)(x+1)} = \frac{-1}{x^2-1} = \frac{1}{1-x^2}$$

$$y = \operatorname{argsech} x = \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right) =$$

$$y = \operatorname{argsech} x = \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right) = \ln\left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)'}{\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}}$$

$$= \frac{-\frac{1}{x^2} + \left[\frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{1-x^2}} \cdot x - \sqrt{1-x^2}\right] \cdot \frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}}$$

$$= \frac{-\frac{1}{x^2} + \left[\frac{-x^2 - (1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}\right] \cdot \frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}} = \frac{\frac{-\sqrt{1-x^2} - 1}{x^{\cancel{2}}\sqrt{1-x^2}}}{\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{\cancel{x}}}$$

$$= \frac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}$$

$$y = \operatorname{argcsch} x = \ln\left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|}\right) \Rightarrow y' = \frac{-1}{|x|\sqrt{1+x^2}}$$

$u = u(x)$ ise;

$$y = \operatorname{argsinh} u = \sinh^{-1} u \Rightarrow y' = \frac{u'}{\sqrt{1+u^2}}$$

$$y = \operatorname{argcosh} u = \cosh^{-1} u \Rightarrow y' = \frac{u'}{\sqrt{u^2-1}}$$

$$y = \operatorname{argtanh} u = \tanh^{-1} u \Rightarrow y' = \frac{u'}{1-u^2}$$

$$y = \operatorname{argcoth} u = \coth^{-1} u \Rightarrow y' = \frac{u'}{1-u^2}$$

$$y = \operatorname{argsech} u = \operatorname{sech}^{-1} u \Rightarrow y' = \frac{-u'}{u\sqrt{1-u^2}}$$

$$y = \operatorname{argcsch} u = \operatorname{csch}^{-1} u \Rightarrow y' = \frac{-u'}{|u|\sqrt{1+u^2}}$$

Limit Problemleri

1) $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} \overset{0/0}{=} \lim_{t \to 0} \frac{t}{\ln(1+t)}$

$e^x - 1 = t$

$x \to 0$

$t \to 0$

$e^x = 1 + t$

$x = \ln(1+t)$

$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

$\lim_{n \to 0} (1+n)^{1/n} = e$

$= \lim_{t \to 0} \frac{1}{\frac{1}{t} \ln(1+t)}$

$= \lim_{t \to 0} \frac{1}{\ln(1+t)^{1/t}}$

$= \frac{1}{\ln e} = 1$

2) $\lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2} - 1}{1 - \cos x} = \lim_{x \to 0} \left[\frac{e^{x^2} - 1}{2\sin^2 \frac{x}{2}} \cdot \frac{x^2}{x^2} \right]$

$= \lim_{x \to 0} \left[\frac{e^{x^2} - 1}{x^2} \cdot \frac{x^2}{2 \cdot \sin\frac{x}{2} \cdot \sin\frac{x}{2}} \right]$

$= \lim_{x \to 0} \left[\underbrace{\frac{e^{x^2} - 1}{x^2}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{\frac{x}{2} \cdot 2}{\sin\frac{x}{2}}}_{\to 1} \right]$

$= 2$

3)
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(2-e^{x})}{1-e^{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln[1+(1-e^{x})]}{1-e^{x}} = \lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\cdot\ln(1+t)$$

$$= \lim_{t\to 0}\ln(1+t)^{1/t} = \ln e = 1$$

$1-e^{x}=t$

$x\to 0$

$t\to 0$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = e$$

$$\lim_{n\to 0}(1+n)^{1/n} = e$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n} = e^{x}$$

4)
$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\arctan x^{2}}{1-xe^{1/x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x}\left(1+\frac{\arctan x^{2}}{x}\right)}{\cancel{x}\left(\frac{1}{x}-e^{1/x}\right)} = \frac{1}{-1} = -1$$

5)
$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\theta}{1-\sqrt{1+\arcsin\theta}} = \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{1-\sqrt{1+t}} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{1-\sqrt{1+t}}\cdot\frac{1+\sqrt{1+t}}{1+\sqrt{1+t}}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{\overset{1}{\sin t}\,(1+\sqrt{1+t})}{\cancel{1}-\cancel{1}-t} = \frac{1+1}{-1} = -2$$

$\arcsin\theta = t$

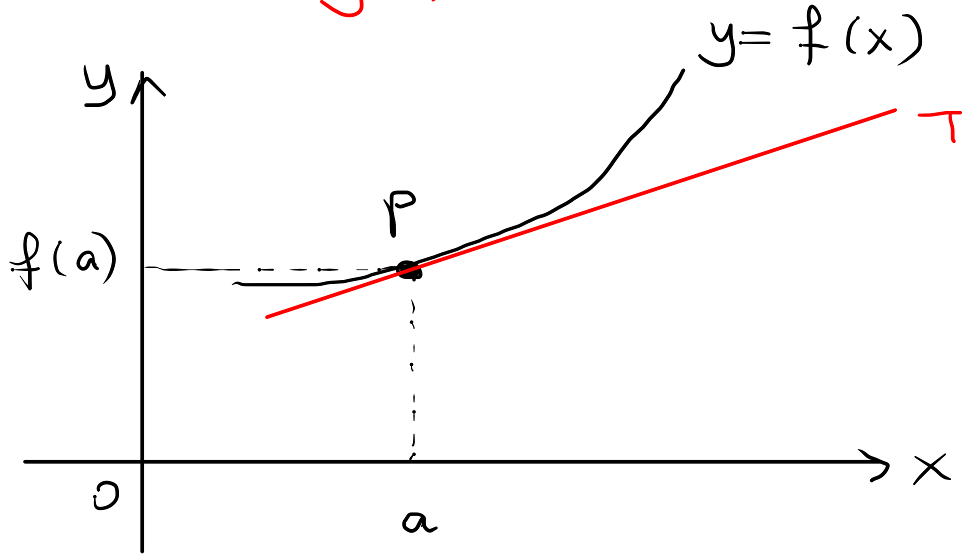
$\theta = \sin t$

$\theta\to 0$

$t\to 0$

Ödev: $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x-1}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{\frac{x-1}{x}}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{x}}\right)^x = \frac{1}{e^{-1}} = e$

Lineer Yaklaşımlar ve Diferansiyeller
(Lineerizasyon)



f fonksiyonu $x=a$ noktasında türevlenebilir bir fonksiyon ise teğet denklemi bu nokta civarındaki fonksiyonun değerlerine en iyi yaklaşımı verir.

$$L(x) = f(a) + f'(a)\,(x-a)$$

Lineer yaklaşım fonksiyonu f'in $x=a$ daki Lineerizasyonudur.

$$f(x) \approx L(x)$$

alınır. $x=a$ yaklaşımın merkezidir.

Ör/ $f(x)=\sqrt{1+x}$ 'nin $x=0$'daki Lineerizasyonunu bulunuz.

$f(0)=\sqrt{1+0}=1$

$f(0,2)\cong ?$

$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}} \Rightarrow f'(0)=\dfrac{1}{2}$

$f(0.2)\cong L(0.2)=1+\frac{1}{2}\cdot(0.2)$

$L(x)=f(0)+f'(0)\cdot(x-0)$

$=1,1$

$L(x)=1+\frac{1}{2}x$

Ör/ $\cos 59^\circ \cong ?$

$f(x)=\cos x$ $\quad x=\frac{\pi}{3}$ civarında Lineerizasyonu kullanalım.

$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$ $\quad f'(x)=-\sin x \Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$L(x)=f\left(\frac{\pi}{3}\right)+f'\left(\frac{\pi}{3}\right).\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$

$f(59^\circ)=f\left(\frac{59\pi}{180}\right)\cong L\left(\frac{59\pi}{180}\right)=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{59\pi}{180}-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}\pi}{360}$

Diferansiyel

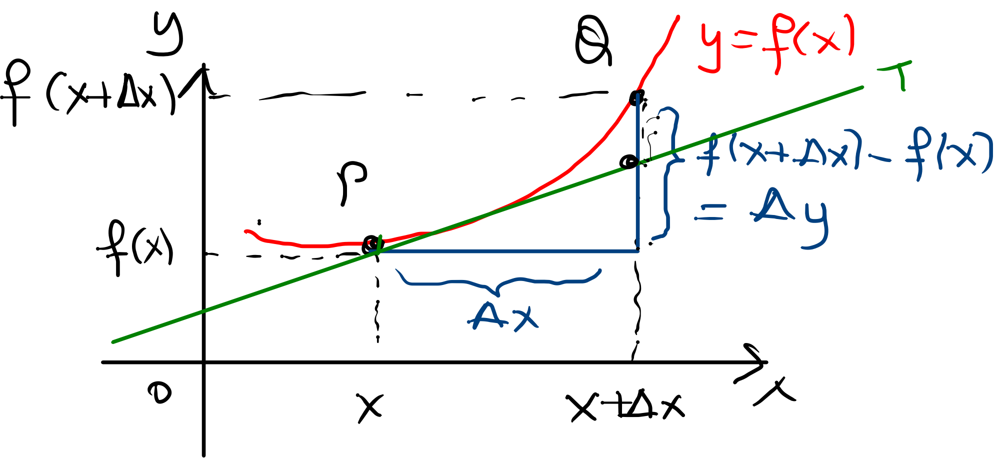
$y=f(x)$ türevlenebilir bir fonksiyon olsun. dx diferansiyeli bağımsız bir değişken olmak üzere y'nin diferansiyeli

$$\boxed{dy = f'(x)\,dx}$$ dir.

$$\boxed{dx = \Delta x}$$

$y = x$

$dy = 1 \cdot dx$



$\Delta y \cong dy \Rightarrow$

$$f(x+\Delta x) - f(x) \cong f'(x) \cdot dx \rightarrow \Delta x$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x+\Delta x) \cong f(x) + f'(x)\,\Delta x}$$

Ör/ $y=\tan 2x \Rightarrow dy = 2(1+\tan^2 2x)\,dx$

Ör/ $y=\dfrac{x}{x+1} \Rightarrow dy = \left(\dfrac{x}{x+1}\right)' dx = \left[\dfrac{x+1-x}{(x+1)^2}\right] dx = \dfrac{dx}{(x+1)^2}$

Ör/ $\sqrt{26}$ 'yı diferansiyel yardımıyla yaklaşık olarak hesaplayalım.

$f(x)=\sqrt{x}$

$\sqrt{26} = \sqrt{25+1}$

$x=25 \qquad f(25)=5$

$\Delta x = 1 \qquad f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(25)=\dfrac{1}{10}$

$f(25+1) \cong f(25)+f'(25).1$

$= 5+\dfrac{1}{10}.1 = 5.1$

Ör/ $e^{0.2} \cong ?$

$f(x)=e^x \qquad f'(x)=e^x$

$e^{0.2} = e^{(0+0.2)} \qquad f(0)=f'(0)=e^0=1$

$x=0$

$\Delta x = 0.2$

$f(0+0.2) \cong f(0)+f'(0).(0.2)$

$= 1+0.2$

$= 1.2$

Belirsiz Şekiller

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0.\infty,\ \infty-\infty,\ \underbrace{1^{\infty},\ 0^{0},\ \infty^{0}}_{\text{üstel belirsizlikler}}$$

L'Hopital kuralları

Teorem 1

f ve g fonksiyonlarının (a,b) aralığında türevlenebilir olduğunu ve bu aralıkta $g'(x) \neq 0$ olduğunu kabul edelim. Ayrıca

i) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} g(x) = 0$ ve

ii) $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$ (L sonlu veya ∞ ya da $-\infty$ olabilir)

olsun. O zaman

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L \text{'dir.}$$

Benzer sonuçlar $\lim\limits_{x\to b^-}$ veya $(a<c<b$ için$)$ $\lim\limits_{x\to c}$ limitleri için de geçerlidir. $(a=-\infty,\ b=\infty$ olabilir$)$

Ör/ $$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x^2-1}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{L'H}{=}}\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{2x}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{2x^2}=\frac{1}{2}$$

Ör/ $$\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x-\sin(2x)}{2e^x-2-2x-x^2}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{L'H}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{2\cos x-2\cos 2x}{2e^x-2-2x}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{L'H}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin x+2\sin 2x}{2e^x-2}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{\underset{L'H}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{-2\cos x+4\cos 2x}{2e^x}=\frac{-2+4}{2}=1$$

Ör/ $$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-}\frac{2x-\pi}{\cos^2 x}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{L'H}{=}}\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-}\frac{\cancel{2}}{-\cancel{2}\cos x.\sin x}=-\infty$$

Ör/ $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)\overset{\infty-\infty}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x - x}{x\sin x}\underset{L'H}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos x - 1}{\sin x + x\cos x}$

$\underset{L'H}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to 0^+}\frac{-\sin x}{\cos x+\cos x - x\sin x} = \frac{0}{2} = 0$

Teorem 2

f ve g fonksiyonları (a,b) aralığında türevlenebilir ve $g'(x)\neq 0$ olsun. Ayrıca

i) $\lim_{x\to a^+} f(x) = \mp\infty$ ve $\lim_{x\to a^+} g(x) = \mp\infty$ ve

ii) $\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ (L sonlu bir sayı veya ∞ veya $-\infty$ olabilir)

olduğunu kabul edelim. O zaman

$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)} = L$'dir.

Benzer sonuçlar $\lim\limits_{x\to b^-}$ ve $\lim\limits_{x\to c}$ $(a<c<b)$ limitleri için de sağlanır.

Ör/ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{e^x}\right) \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{L'H}{=}} \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x}{e^x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{L'H}{=}} \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{e^x} = 0$

Ör/ $\lim\limits_{x\to 0^+} x^a . \ln x \qquad (a>0)$

$\overset{0.\infty}{=} \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{x^{-a}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{L'H}{=}} \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1/x}{-a\,x^{-a-1}} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{-a.x^{-a}} = \dfrac{0}{-a} = 0$ $\qquad \boxed{e^{\ln x} = x}$

$1^\infty,\ 0^0,\ \infty^0$ Belirsizlikleri

$(1^{-\infty})$ $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)} = e^{\ln\left[\lim\limits_{x\to a}(f(x))^{g(x)}\right]} = e^{\lim\limits_{x\to a}\left\{\ln[f(x)]^{g(x)}\right\}}$

$1^\infty, 0^0, \infty^0$

$= e^{\lim\limits_{x\to a}\left[\overbrace{g(x).\ln(f(x))}^{0.\infty}\right]} = e^{\lim\limits_{x\to a}\left[\overbrace{\frac{\ln(f(x))}{1/g(x)}}^{\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty}}\right]}$

$\underset{L'H}{=} \cdots = e^L$

2-10)

$y = \lim_{x \to a} [f(x)]^{g(x)} \Rightarrow$ Her iki tarafın doğal Logaritmasını alalım.

$1^{\infty}, 0^{0}, \infty^{0}$

$\ln y = \ln \left[\lim_{x \to a} [f(x)]^{g(x)} \right] = \lim_{x \to a} \left[\ln [f(x)]^{g(x)} \right]$

hiç dokunmuyoruz.

$= \lim_{x \to a} \underbrace{g(x) \cdot \ln [f(x)]}_{0 \cdot \infty}$

$\overset{0 \cdot \infty}{=} \lim_{x \to a} \frac{\ln [f(x)]}{1/g(x)} \overset{\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}}{\underset{L'H}{=}} \cdots = L$

$\Rightarrow \ln y = L \Rightarrow y = e^{L}$

Ör 4/ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} \overset{1^\infty}{=} y$

$$\Rightarrow \ln y = \ln\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[x \cdot \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$$

$$\overset{0\cdot\infty}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \underset{L'H}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{-1/x^2}{1+1/x}}{-1/x^2}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 1 \Rightarrow \ln y = 1$$

$$y = e^1 = e$$

Ör/ $\lim_{x\to 0^+} x^x \overset{0^0}{=} e^{\ln\left[\lim_{x\to 0^+} x^x\right]} = e^{\lim_{x\to 0^+}\left[\ln x^x\right]} = e^{\lim_{x\to 0^+}\left[x\cdot \ln x\right]}$

$\overset{0\cdot\infty}{=} e^{\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{\ln x}{1/x}\right]} = e^{\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{1/x}{-1/x^2}\right]} = e^{\lim_{x\to 0^+}(-x)}$

$= e^0 = 1$

Ör/ $\lim_{x\to\infty}\left(1+\sin\left(\frac{3}{x}\right)\right)^x \overset{1^\infty}{=} ?$

$y = \lim_{x\to\infty}\left(1+\sin\left(\frac{3}{x}\right)\right)^x \Rightarrow \ln y = \ln\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\sin\left(\frac{3}{x}\right)\right)^x\right]$

$\Rightarrow \ln y = \lim_{x\to\infty}\left[\ln\left(1+\sin\left(\frac{3}{x}\right)\right)^x\right] = \lim_{x\to\infty}\left[x\cdot\ln\left(1+\sin\left(\frac{3}{x}\right)\right)\right]$

$\overset{0\cdot\infty}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\sin\left(\frac{3}{x}\right)\right)}{1/x}$

$\underset{\text{L'H}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to\infty}\frac{+\frac{3}{x^2}\cdot\cos\left(\frac{3}{x}\right)}{1+\sin\left(\frac{3}{x}\right)}\cdot\frac{1}{\left(+1/x^2\right)}$

$= \lim_{x\to\infty}\frac{3\cos\left(\frac{3}{x}\right)}{1+\sin\left(\frac{3}{x}\right)} = 3 \Rightarrow \ln y = 3$

$y = e^3$

ROLLE VE ORTALAMA DEĞER TEOREMLERİ

Teorem (kritik nokta)

Eğer bir f fonksiyonu (a,b) aralığında tanımlı ve bu aralıktaki bir c noktasında maksimum (veya minimum) değerini alıyorsa ve de $f'(c)$ mevcut ise o zaman $f'(c)=0$'dır.

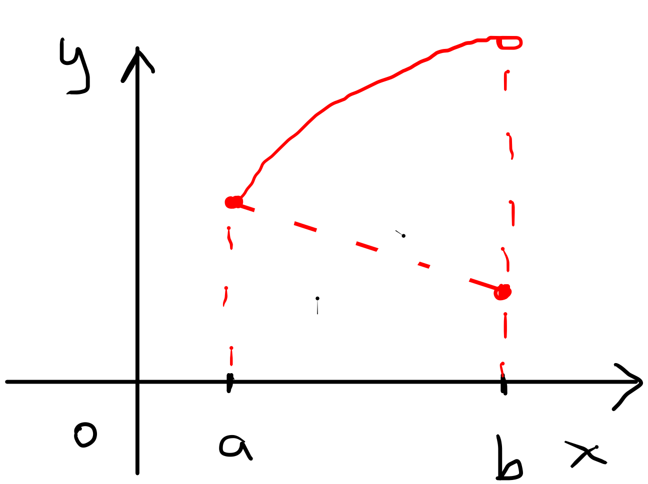
$x=c$'ye fonksiyonun kritik noktası denir.

Rolle Teoremi : Bir f fonksiyonu kapalı ve sonlu bir $[a,b]$ aralığı üzerinde sürekli ve (a,b) aralığı üzerinde türevlenebilir olsun. Eğer $f(a)=f(b)$ ise $f'(c)=0$ olacak şekilde bir $c\in(a,b)$ noktası vardır.

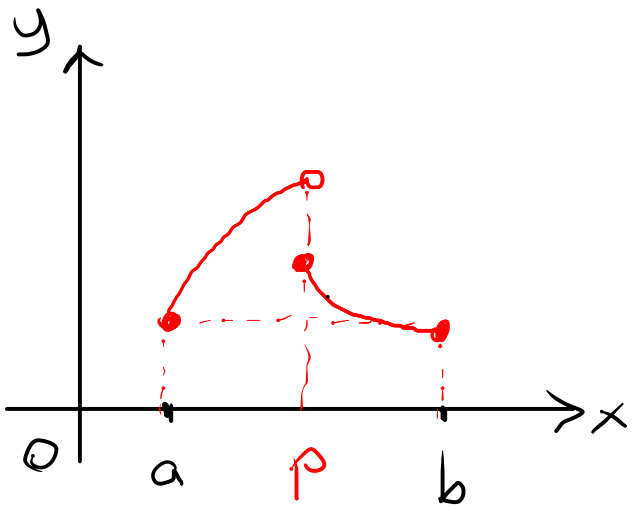
Ortalama Değer Teoremi : Bir f fonksiyonu kapalı ve sonlu bir $[a,b]$ aralığı üzerinde sürekli ve (a,b) aralığı üzerinde türevlenebilir ise o zaman

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

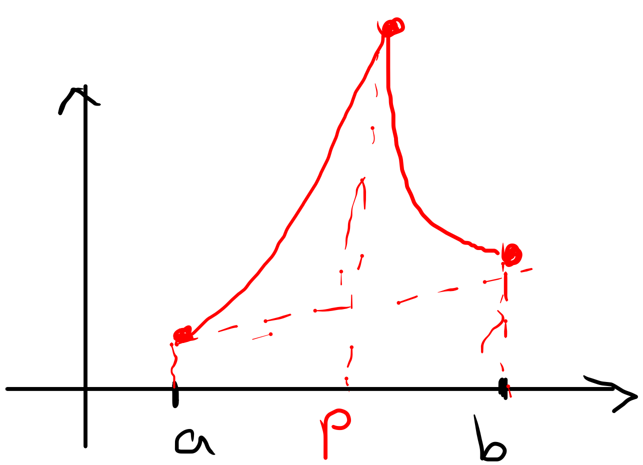
olacak şekilde $c\in(a,b)$ sayısı vardır.



Fonksiyon kapalı aralıkta sürekli değil.
O.D.T uygulanamaz.



Fonksiyon tanım kümesinin bir iç noktasında süreksizdir. O.D.T. uygulanamaz.



Fonksiyon $p \in (a,b)$ iç noktasında türeve sahip değildir. O.D.T. uygulanamaz.

ÖRNEKLER

1) $x > 0$ için $\sin x < x$ olduğunu gösteriniz.

2) $x > 0$ ve $-1 \leq x < 0$ için $\sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2}$ olduğunu

gösteriniz.

Türevin Uygulamaları

Ekstrem Değerler (Ekstremumlar)

Tanım: (Mutlak Ekstrem Değerler)

- Eğer, f'in tanım aralığındaki $\forall x$ için $f(x) \leq f(x_0)$ olacak şekilde tanım aralığına ait bir x_0 noktası varsa, f fonksiyonu x_0 noktasında $f(x_0)$ mutlak maksimum değerine sahiptir denir.
- Eğer, f'in tanım aralığındaki $\forall x$ için $f(x) \geq f(x_1)$ olacak şekilde tanım aralığına ait bir x_1 noktası varsa, f fonksiyonu x_1 noktasında $f(x_1)$ mutlak minimum değerine sahiptir denir.

NOT: • Bir fonksiyon birden fazla noktada mutlak max. ya da mutlak min. değerine sahip olabilir

- $f(x) = \sin x$ $\quad x = \frac{\pi}{2} \mp 2n\pi$ $(n \in \mathbb{N})$ mut. max. değeri 1 dir.

  $x = \frac{-\pi}{2} \mp 2n\pi$ $(n \in \mathbb{N})$ mut. min değeri -1 dir.

- Her fonksiyonun mut. max. ya da mut. min değerine sahip olması gerekmez.

- $f(x)=\frac{1}{x}$

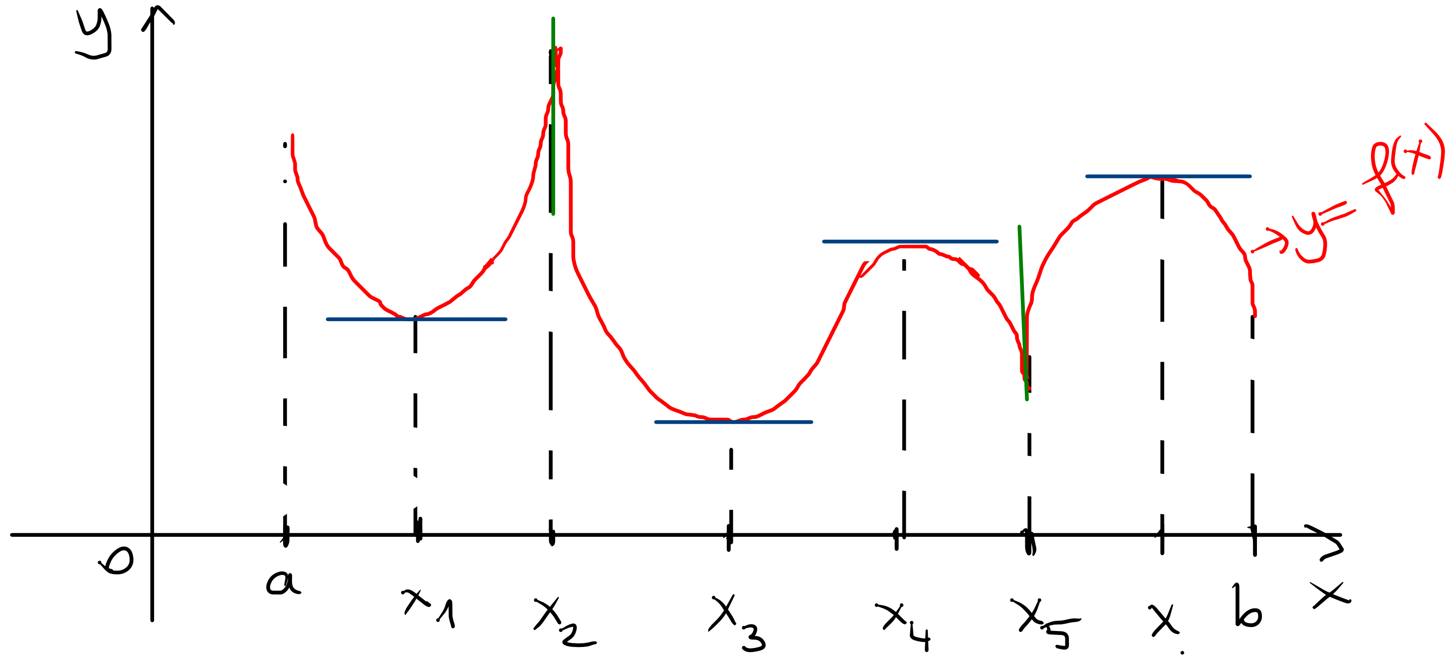
$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty \qquad \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=\infty$$

- Fonksiyonun sınırlı olması onun mutlak max veya mutlak min. sahip olmasını garanti etmez.

- $f(x)=x \ (x\in(0,1))$ fonksiyonu sınırlıdır ancak mutlak max. veya mutlak min. yoktur.

Teorem: (Ekstrem Değerlerin Varlığı)

Eğer fonksiyonun tanım bölgesi sonlu kapalı bir aralık veya bu şekildeki aralıkların sonlu birleşiminden oluşuyorsa ve f bu bölgede sürekli ise o zaman bir mutlak max ve bir mutlak min değere sahiptir.



b

Şekilde verilen fonksiyonu mutlak maksimum değerini x_2 noktasında mutlak minimum değerini x_1 noktasında alır. Bu ekstrem değerlere ek olarak fonksiyonun yerel maksimum ve minimum değerleri de vardır.

Fonksiyon a uç noktasında, x_2, x_4 ve x_6'da yerel maksimum, b uç noktasında, x_1, x_3 ve x_5'de yerel minimum değerlere sahiptir.

Mutlak maksimum, yerel maksimumların en büyüğü, mutlak minimum da yerel minimumların en küçüğüdür.

Tanım (Yerel ekstrem değerler)

Bir f fonksiyonu, eğer $x \in D(f)$ ve $|x - x_0| < h$ iken $f(x) \leq f(x_0)$ olacak şekilde bir $h > 0$ sayısı varsa x_0 noktasında $f(x_0)$ yerel maksimum değerine sahiptir denir.

Bir f fonksiyonu, eğer $x \in D(f)$ ve $|x - x_1| < h$ iken $f(x) \geq f(x_1)$ olacak şekilde bir $h > 0$ sayısı varsa x_1 noktasında $f(x_1)$ yerel minimum değerine sahiptir denir.