# UYGULAMA

1) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-2n}$ serisinin toplamını bulunuz.

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-2n} = \frac{1}{e^2} + \frac{1}{e^4} + \frac{1}{e^6} + \dots$$

$$= \frac{1}{e^2}\left[1 + \frac{1}{e^2} + \frac{1}{e^4} + \dots\right]$$

$$= \frac{1}{e^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{e^2}\right)^{n-1} = \frac{\frac{1}{e^2}}{1-\frac{1}{e^2}} = \frac{1}{e^2-1} \ //$$

$$a = \frac{1}{e^2} \quad r = \frac{1}{e^2}$$

$$|r| < 1$$

2) $|x|<1$ olmak üzere $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ kuvvet serisinden yararlanarak $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot n \cdot (n+1) \cdot x^{n+1}$ serisinin toplamını ve bu toplamdan yararlanarak $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot n \cdot (n+1)}{(2)^{n+1}}$ serisinin yakınsadığı değeri bulunuz.

$x \to -x$ yazarız $\Rightarrow \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n$$

türev aldık

$$\frac{-1}{(1+x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1) \cdot n \cdot (-x)^{n-1}$$

$-x^2$ ile çarptık

$$\frac{x^2}{(1+x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1) \cdot n \cdot (-x)^{n+1}$$

$$-\left[\frac{2x(1+x)^2 - 2(1+x) \cdot x^2}{(1+x)^4}\right] = \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)(-x)^n$$

$$-\left[\frac{2x(1+x) - 2x^2}{(1+x)^3}\right] = \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)(-x)^n$$

$$-\frac{2x}{(1+x)^3} = \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)(-x)^n$$

$-x$ ile çarptık

$$\frac{+2x^2}{(1+x)^3} = \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)(-x)^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot n \cdot (n+1) x^{n+1}$$

→ Geometrik serinin neye yakınsadığını söyleyebiliriz

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\, n\,(n+1)}{2^{n+1}} \qquad |x|<1$$

$$-1<x<1$$

$$\frac{1}{2} \in (-1,1)$$

$$x=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{+2\cdot\frac{1}{4}}{\left(1+\frac{1}{2}\right)^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\, n\,(n+1)}{2^{n+1}}$$

$$\frac{+\frac{1}{2}}{\left(\frac{3}{2}\right)^3} =$$

$$= \frac{+4}{27}$$

3) Genel terimi $a_n = n - \frac{1}{2}\ln(1+e^{2n})$ $n=1,2\ldots$ dizinin limitini bulunuz.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left[n-\frac{1}{2}\ln(1+e^{2n})\right] \to \infty-\infty$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\ln(e^n)-\frac{1}{2}\ln(1+e^{2n})\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \ln\left[\frac{e^n}{\sqrt{1+e^{2n}}}\right] \to \frac{\infty}{\infty}$$

$$= \ln\left[\lim_{n\to\infty}\frac{e^n}{\sqrt{1+e^{2n}}}\right] = \ln\left[\lim_{n\to\infty}\frac{e^n}{\frac{2e^{2n}}{2\sqrt{1+e^{2n}}}}\right] = \ln\left[\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{e^n}{\sqrt{1+e^{2n}}}}\right]$$

$$= \ln\left[\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{e^n}{e^n\sqrt{\frac{1}{e^{2n}}+1}}}\right]$$

$$= \ln 1$$

$$= \underline{\underline{0}}$$

Pay ve paydanın derecesi aynı olacak şekilde bir değer seçeriz.

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n^{4/3}}{2+n^{5/3}}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$$\sum a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n^{4/3}}{2+n^{5/3}}$$

$$\sum b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \quad p=\frac{1}{3}<1 \rightarrow \text{ıraksak}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+n^{4/3}}{2+n^{5/3}} \cdot \sqrt[3]{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{1/3}+n^{5/3}}{2+n^{5/3}} = 1 \neq 0,\infty$$

ıraksak

$\Downarrow$

öyleyse verilen seri de ıraksaktır.

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt{n}}{(n+1)\sqrt[3]{n^4+1}}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$$\frac{n \cdot n^{1/2}}{n \cdot n^{4/3}} = \frac{n^{3/2}}{n^{7/3}} = \frac{1}{n^{5/6}}$$

$$\frac{7}{3}-\frac{3}{2}=\frac{5}{6}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{5/6}}$ seçelim. $p=\frac{5}{6}<1 \rightarrow$ ıraksak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt{n}}{(n+1)\sqrt[3]{n^4+1}} \cdot n^{5/6} = 1 \neq 0,\infty$$

$\rightarrow$ Her iki seri aynı karakterdedir.

6) $\sum_{k=0}^{\infty} \left( \int_k^{k+1} \frac{dx}{(1+x)^2} \right)$ serisinin toplamını bulunuz.

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \frac{-1}{1+x} \Big|_k^{k+1} \right]$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \frac{-1}{1+k+1} + \frac{1}{1+k} \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{1+k} - \frac{1}{2+k} \right]$$

$\rightarrow$ teleskopik seri

$$S_k = \left[ \left(1-\cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}\right) + \dots + \left(\cancel{\frac{1}{1+k}}-\frac{1}{2+k}\right) \right]$$

$$S_k = 1-\frac{1}{2+k} \qquad \lim_{k\to\infty} S_k = \lim_{k\to\infty} \left(1-\frac{1}{2+k}\right)$$

$$= 1$$

7) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{(n+1)\cdot 2^n}$ serisinin karakterini belirleyin.

$\ln n < n \quad (n \geq 1)$

$\frac{\ln n}{(n+1)2^n} < \frac{n}{(n+1)2^n} < \frac{n}{n 2^n} = \frac{1}{2^n}$

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ → geometrik seri

$r = \frac{1}{2} \quad |r| < 1$ → yakınsak

$b_n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ → yakınsak

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{(n+1)\cancel{2^n}} \cdot \cancel{2^n}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{1/n}{1}$

$= 0$

8) $f(x) = \cos x$ mclauren'den yararlanarak yakınsaklık aralığını ve seriyi bulun.

$L(x) = \int_0^x \cos(t^2)dt = \int_0^x \left[1 - \frac{t^4}{2!} + \frac{t^8}{4!} - \dots\right]dt = t - \frac{t^5}{5 \cdot 2!} + \frac{t^9}{9 \cdot 4!} - \dots \Big|_0^x$

$= x - \frac{x^5}{5 \cdot 2!} + \frac{x^9}{9 \cdot 4!} - \dots$

$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{4n+1}}{(4n+1)\cdot(2n)!}$

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$

$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots$

$\cos t^2 = 1 - \frac{t^4}{2!} + \frac{t^8}{4!} - \dots$

$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(-1)^{n+1} x^{4n+5}}{(4n+5)\cdot(2n+2)!} \cdot \frac{(4n+1)\cdot(2n)!}{(-1)^n \cdot x^{4n+1}}\right|$

$= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{4n+1}{4n+5} \cdot x^4 \cdot \frac{\cancel{(2n)!}}{(2n+2)(2n+1)\cancel{(2n)!}}\right|$

$= 0$

$-\infty < x < \infty$ → aralığında yakınsaktır seri açılımı dediği zaman Mclauren serisi aklımıza gelmelidir !

9) $y = x \cdot e^{-x}$ fonksiyonunun seri açılımından yararlanarak

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$ alt serisinin toplamını bulunuz

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$x \cdot e^{-x} = x - x^2 + \frac{x^3}{2!} - \frac{x^4}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{n+1}}{n!}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} \cdot x^{n+2}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{(-1)^n \cdot x^{n+1}} \right| = 0 < 1 \Rightarrow x=1 \text{ için}$$

yakınsaklık aralığı: $-\infty < x < \infty$

her x değeri için yakınsaktır

$$x = 1 \text{ için} \Rightarrow 1 \cdot e^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$$

10) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n \cdot 3^n}$ yakınsaklık aralığını bulun.

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(x+2)^{n+1}}{(n+1) \cdot 3^{n+1}} \cdot \frac{n \cdot 3^n}{(x+2)^n} \right|$$

$$= \frac{1}{3} |x+2| < 1$$

$$-3 < x+2 < 3$$

$$-5 < x < 1$$

$x=-5$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-5+2)^n}{n \cdot 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n \cdot 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ → Alternatif harmonik seri şartlı yakınsak.

$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ → Harmonik seri ıraksak

1) $a_{n+1} \overset{?}{<} a_n$

$n < n+1 \Rightarrow \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$ ✓

2) $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ ✓

$\propto$ Geometrik ve teleskopik serilerin toplamını bulabiliriz

$$x=1: \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+2)^n}{n \cdot 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \rightarrow \text{Harmonik seri ıraksak}$$

Yakınsaklık aralığı $= \underline{\underline{[-5, 1)}}$

11) Parametrik denklemleri $x = 2\cos t$ ; $y = 2\sin t$ olan eğrinin $t = \frac{\pi}{4}$ noktasındaki teğet doğrusunun denklemini bulunuz ve $\frac{d^2y}{dx^2}$ türevinin $t = \frac{\pi}{4}$'deki değerini hesaplayınız

Teğet doğrusunun denklemi $= \boxed{y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)}$

$$x_0 = x \Big|_{t=\frac{\pi}{4}} = 2 \cdot \cos\frac{\pi}{4} = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$y_0 = y \Big|_{\frac{\pi}{4}} = 2\sin\frac{\pi}{4} = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2\cos t}{-2\sin t} \Rightarrow \frac{dy}{dx}\Big|_{t=\frac{\pi}{4}} = -\frac{1/\sqrt{2}}{1/\sqrt{2}} = \underline{\underline{-1}}$$

$$y - \frac{2}{\sqrt{2}} = -\left(x - \frac{2}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\sqrt{2}(x+y) = 4$$

$$\boxed{x + y = \frac{4}{\sqrt{2}}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d^2y}{dt^2} \cdot \frac{dx}{dt} - \frac{d^2x}{dt^2} \cdot \frac{dy}{dt}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}$$

$$= \frac{-2\sin t\,(-2\sin t) - (-2\cos t) \cdot 2\cos t}{(-2\sin t)^3}$$

$$= \frac{-1}{2\sin^3 t} \Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2}\Big|_{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{-1}{2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}}} = \underline{\underline{-\sqrt{2}}}$$

12) $0 \le x \le 1$ olmak üzere $C_1$ eğrisi $y=x^2$ fonksiyonunun grafiği ve $0 \le t \le 2$ olmak üzere $C_2$ eğrisi de $\left.\begin{array}{l} x=t\cos t \\ y=t\sin t \end{array}\right\}$ parametrik denklemlerine sahip fonksiyon eğrisi olduğuna göre bu iki eğrinin uzunlukları arasındaki ilişkiyi bulunuz

$$L_1 = \int_0^1 \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx = \int_0^1 \sqrt{1+(2x)^2}\,dx$$

$$\frac{dx}{dt} = \cos t - t\sin t$$

$$\frac{dy}{dt} = \sin t + t\cos t$$

$$L_2 = \int_0^2 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

$$= \int_0^2 \sqrt{(\cos t - t\sin t)^2 + (\sin t + t\cos t)^2}\,dt$$

$$= \int_0^2 \sqrt{\cos^2 t \cancel{- 2t\sin t\cos t} + t^2\sin^2 t + \sin^2 t \cancel{+ 2t\sin t\cos t} + t^2\cos^2 t}\,dt$$

$$= \int_0^2 \sqrt{1+t^2}\,dt \Rightarrow \begin{array}{l} t=2x \Rightarrow dt = 2dx \\ t=0 \Rightarrow x=0 \\ t=2 \Rightarrow x=1 \end{array}$$

$$= \int_0^1 \sqrt{1+(2x)^2}\,2dx = 2L_1 \qquad \boxed{L_2 = 2L_1}$$

13) $r = 1-\sin\theta$ kardiyoidinin dışında, $r=\sin\theta$ çemberinin içinde kalan bölgenin alanını hesaplayınız.

$r^2 = x^2+y^2 \quad y = r\sin\theta$

$r = 1-\sin\theta$

$r = \sin\theta \rightarrow r^2 = r\sin\theta$

$x^2+y^2 = y$

$$\boxed{x^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}}$$

$\theta \rightarrow -\theta \Rightarrow r = 1-\sin(-\theta)$

$= 1+\sin\theta \neq r$

$\neq -r$

$\theta \rightarrow \pi-\theta \Rightarrow r = 1-\sin(\pi-\theta)$

$= 1 - [\sin\pi\cos\theta - \cos\pi\sin\theta]$

$= 1-\sin\theta = r$

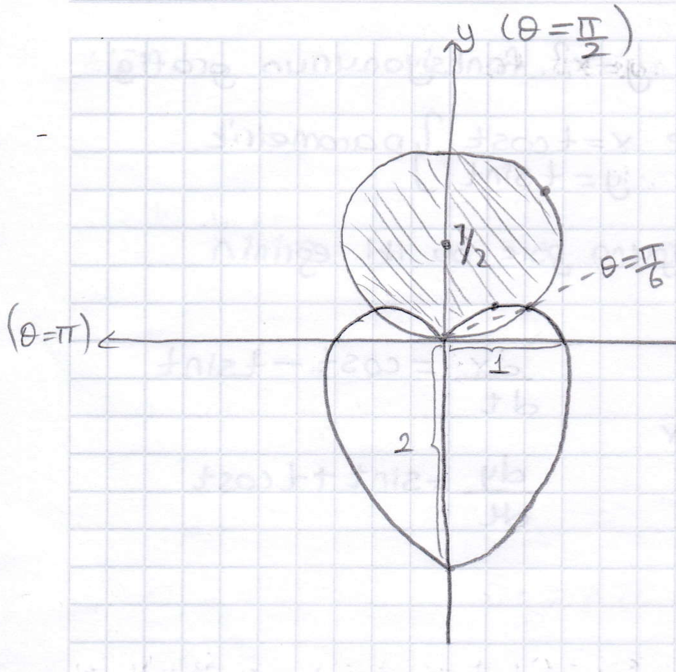
$\theta \rightarrow \pi+\theta \Rightarrow r = 1-\sin(\pi+\theta)$

$= 1+\sin\theta \neq r$

$\neq -r$

$\theta = \frac{\pi}{2}$ simetri ekseni, inceleme aralığı $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

| $\theta$ | $-\frac{\pi}{2}$ | $0$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|
| $r$ | $2$ | $1$ | $0$ |




$$1-\sin\theta = \sin\theta$$
$$2\sin\theta = 1$$
$$\sin\theta = \frac{1}{2} \quad \theta = \frac{\pi}{6}$$

$$\frac{A}{2} = \frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{\pi/2}\left[(\sin\theta)^2-(1-\sin\theta)^2\right]d\theta$$

$$A = \int_{\pi/6}^{\pi/2}\left[\sin^2\theta-(1-2\sin\theta+\sin^2\theta)\right]d\theta$$

$$= \int_{\pi/6}^{\pi/2}(-1+2\sin\theta)\,d\theta$$

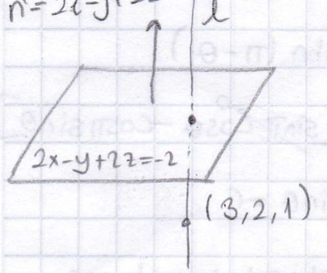
$$A = -\theta - 2\cos\theta \Big|_{\pi/6}^{\pi/2}$$

$$= -\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right) - 2\left(\cos\frac{\pi}{2}-\cos\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= -\left(\frac{2\pi}{6}\right) - 2\left(0-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= -\frac{\pi}{3}+\sqrt{3}$$

14) (3,2,1) noktasından geçen ve $2x-y+2z=-2$ düzlemine dik olan doğrunun parametrik denklemini yazınız. Bu doğru ile verilen düzlemin kesişim noktasını bulunuz.




$$\vec{r} = \vec{r_0} + \lambda\vec{n}$$

$$\langle x,y,z\rangle = \langle 3,2,1\rangle + \lambda\langle 2,-1,2\rangle$$

$$\left.\begin{aligned} x &= 3+2\lambda \\ y &= 2-\lambda \\ z &= 1+2\lambda \end{aligned}\right\} \text{doğrunun parametrik denklemi}$$

$$2(3+2\lambda)-(2-\lambda)+2(1+2\lambda) = -2$$
$$4\lambda+\lambda+4\lambda+6-2+2 = -2 \Rightarrow 9\lambda = -8$$
$$\lambda = \frac{-8}{9}$$

$$x = 3-\frac{16}{9} = \frac{11}{9}$$
$$y = 2+\frac{8}{9} = \frac{26}{9}$$
$$z = 1-\frac{16}{9} = \frac{-7}{9}$$

$\vec{u}$'nun $\vec{v}$ üzerindeki vektörel izdüşümü

15) $(\vec{u} - proj_{\vec{v}}\vec{u}) \perp \vec{v}$ dik olduğunu gösteriniz

$\Downarrow$

$(\vec{u} - proj_{\vec{v}}\vec{u}) \cdot \vec{v} = 0$ olmalıdır.

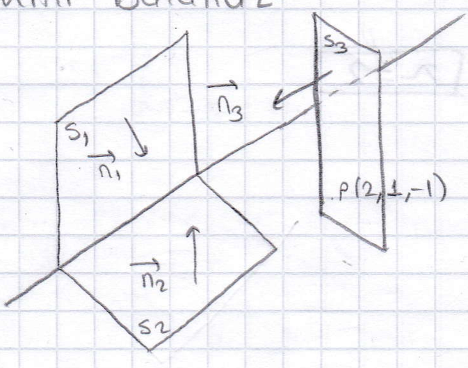
$$proj_{\vec{v}}\vec{u} = \vec{u}_{\vec{v}} = \vec{u} \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

$$\left(\vec{u} - \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|^2}\vec{v}\right)\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot\vec{v} - \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|^2}(\vec{v}\cdot\vec{v})$$

$$= \vec{u}\cdot\vec{v} - \vec{u}\cdot\vec{v}$$

$$= \underline{\underline{0}}$$

16) $P(2,1,-1)$ noktasından geçen ve $S_1 = 2x+y-z=3$ düzlemi ile $S_2: x+2y+z=2$ düzleminin kesişim doğrusuna dik olan düzlemin denklemini bulunuz.




$\vec{n_1} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$

$\vec{n_2} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$

$\vec{n_3} \perp \vec{n_1}$

$\vec{n_3} \perp \vec{n_2}$

$\vec{n_3} = \vec{n_1} \times \vec{n_2}$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3\vec{i} - 3\vec{j} + 3k$$

$\vec{PP_0} \cdot \vec{n_3} = 0$

$$[(x-2)\vec{i} + (y-1)\vec{j} + (z+1)\vec{k}][3\vec{i} - 3\vec{j} + 3\vec{k}] = 0$$

$$3(x-2) + 3(y-1) + 3(z+1) = 0$$

$$3x - 6 + 3y - 3 + 3z + 3 = 0$$

$$\boxed{x - y + z = 0}$$

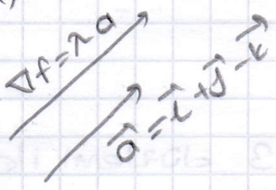
17) $f(x,y,z)$ fonksiyonunun bir P noktasındaki en büyük türevi $\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ yönündeki türevi olup bu türevin değeri $2\sqrt{3}$'tür.

a) $\nabla f$ vektörünün P noktasındaki değerini bulunuz

b) f fonksiyonunun $\vec{i}+\vec{j}$ yönündeki türevinin P noktasındaki değerini bulunuz.

> En büyük türev $\nabla f$ yönündeki türevdir

a)




$$|\nabla f| = 2\sqrt{3} \qquad \nabla f = 2\vec{i}+2\vec{j}-2\vec{k}$$

$$\nabla f = \lambda\vec{i}+\lambda\vec{j}-\lambda\vec{k}$$

$$\sqrt{\lambda^2+\lambda^2+\lambda^2} = 2\sqrt{3}$$

$$3\lambda^2 = 12$$

$$\lambda^2 = 4$$

$$\lambda = \mp 2 \quad \boxed{\lambda = 2}$$

b)

$$\vec{i}+\vec{j} = \vec{b}$$

$$D_{\vec{b}}(P) = \nabla f(P)\cdot\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$$

$$= (2\vec{i}+2\vec{j}-2\vec{k})\cdot\frac{\vec{i}+\vec{j}}{\sqrt{1+1}}$$

$$= \frac{2+2}{\sqrt{2}}$$

$$= \underline{\underline{2\sqrt{2}}}$$

18) $f(x,y) = \dfrac{x\cdot\cos\frac{\pi}{2}\cdot y}{x+y-2}$ fonksiyonunun $(1,1)$'deki limitinin varlığını inceleyiniz

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y) = \lim_{x\to 1}\left[\lim_{y\to 1}\frac{x\cos\frac{\pi}{2}y}{x+y-2}\right]$$

$$= \lim_{x\to 1}\left[\frac{x\cdot\cos\frac{\pi}{2}}{x-1}\right] = 0$$

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y) = \lim_{y\to 1}\left[\lim_{x\to 1}\frac{x\cos\frac{\pi}{2}y}{x+y-2}\right]$$

$$= \lim_{y\to 1}\left[\frac{\cos\frac{\pi}{2}y}{y-1}\right] \to \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{y\to 1}\frac{-\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}y}{1}$$

$$= -\frac{\pi}{2}$$

Ardışık limitler farklı olduğundan limit yoktur.

19) $f(x,y,z) = x^2y + y^2z + z^2x$ fonksiyonunun $(1,-1,1)$ noktasındaki teğet düzleminin ve normal doğrusunun denklemini bulunuz.

$$\nabla f = (2xy+z^2)\vec{i} + (x^2+2yz)\vec{j} + (y^2+2xz)\vec{k}$$

$$\nabla f(1,-1,1) = (-2+1)\vec{i} + (1-2)\vec{j} + (1+2)\vec{k}$$

$$\nabla f(1,-1,1) = -\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$$

Teğet düzlem denklemi:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{P_0(x_0,y_0,z_0)} (x-x_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{P_0} (y-y_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{P_0} (z-z_0) = 0$$

$$-1(x-1) + (-1)\cdot(y+1) + 3(z-1) = 0$$

$$-x-y+3z = 3$$

Normal doğrusunun Parametrik Denklemi:

$$x = x_0 + \lambda \cdot \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{P_0} \qquad x = 1-\lambda$$

$$y = y_0 + \lambda \cdot \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{P_0} \qquad y = -1-\lambda$$

$$z = z_0 + \lambda \cdot \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{P_0} \qquad z = 1+3\lambda$$

20) $f(x,y) = \sqrt[3]{x^2+y^4}$ ile verilen $f$ fonksiyonu için mevcut ise birinci mertebe kısmi türevlerin $(0,0)$ noktasındaki değerlerini bulunuz $\Rightarrow$ (Mevcut ise dediği için tanımdan çözmemiz gerekiyor)

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)} = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{h^2} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} h^{-1/3} \rightarrow \text{mevcut değil}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)} = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,0+k) - f(0,0)}{k}$$

$$= \lim_{k\to 0} \frac{\sqrt[3]{k^4} - 0}{k}$$

$$= \lim_{k\to 0} k^{1/3}$$

$$= 0$$

21) $\vec{r}(t) = \frac{1}{t}\vec{i} + (2-t)\vec{j} - t^2\vec{k}$ eğrisinin $(1,1,-1)$ noktasında $x^2+y^2+4z+2=0$ paraboloidine dik olup olmadığını araştırınız.

$P(1,1,-1)$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{t} = 1 \\ 2-t = 1 \\ -t^2 = -1 \end{array}\right\} t = 1$$

$f(x,y,z) = x^2+y^2+4z+2 = 0$

$\nabla f = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 4\vec{k}$

$\nabla f(1,1,-1) = 2\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k} = -2\frac{d\vec{r}}{dt}$ → $\nabla f \parallel \frac{d\vec{r}}{dt}$ olduğundan eğri bu noktada yüzeye diktir.

$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{-1}{t^2}\vec{i} - \vec{j} - 2t\vec{k}$

$\left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_P = -\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$

22) $\vec{r}(t) = \ln(t)\vec{i} + 2t\vec{j} + t^2\vec{k}$ eğrisinin $[1,e]$ kapalı aralığında kalan kısmının yay uzunluğunu bulunuz

$L = \int_1^e \|\vec{r}'(t)\|\, dt \Rightarrow \int_1^e \left(2t + \frac{1}{t}\right) dt = t^2 + \ln t \Big|_1^e$

$\vec{r}'(t) = \frac{1}{t}\vec{i} + 2\vec{j} + 2t\vec{k}$

$= (e^2 + \ln e) - (1 + \cancel{\ln 1}^{\,0})$

$= \underline{e^2}$

$|\vec{r}'(t)| = \sqrt{\frac{1}{t^2} + 4 + 4t^2}$

$= \sqrt{\left(2t + \frac{1}{t}\right)^2}$

$= 2t + \frac{1}{t}$

23) Yer vektörü $\vec{r}(t) = (3-e^t)\vec{i} + [1+\cos(t+\pi)]\vec{j} + e^t\vec{k}$ $(t \in (-\pi/2, \pi/2))$ olan eğrinin $x+2y+z=3$ düzlemini kestiği noktayı bulunuz ve bu noktada eğrinin teğeti ile düzlemin normali arasındaki açıyı hesaplayınız

$$\left.\begin{array}{l} x = 3-e^t \\ y = 1+\cos(\pi+t) \\ z = e^t \end{array}\right\} \Rightarrow 3 - e^t + 2[1+\cos(\pi+t)] + e^t = 3$$

$\cos(\pi+t) = -1$

$\pi + t = \pi$

$\boxed{t=0} \Rightarrow \begin{array}{l} x=2 \\ y=0 \\ z=1 \end{array}$

$\vec{r}'(t) = -e^t\vec{i} - [\sin(\pi+t)]\vec{j} + e^t\vec{k}$

$\vec{r}'(0) = -\vec{i} + \vec{k}$

$\vec{n} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$

$\vec{n} \cdot \vec{r}'(0) = |\vec{n}| \cdot |\vec{r}'(0)| \cdot \cos\alpha$

$-1 + 1 = \sqrt{1+4+1} \cdot \sqrt{1+1} \cdot \cos\alpha$

$\cos\alpha = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{\pi}{2}}$

24) $z = \sqrt{xy} + \arcsin\frac{x}{2}$ fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz ve düzlemde gösteriniz.

$xy \geq 0$

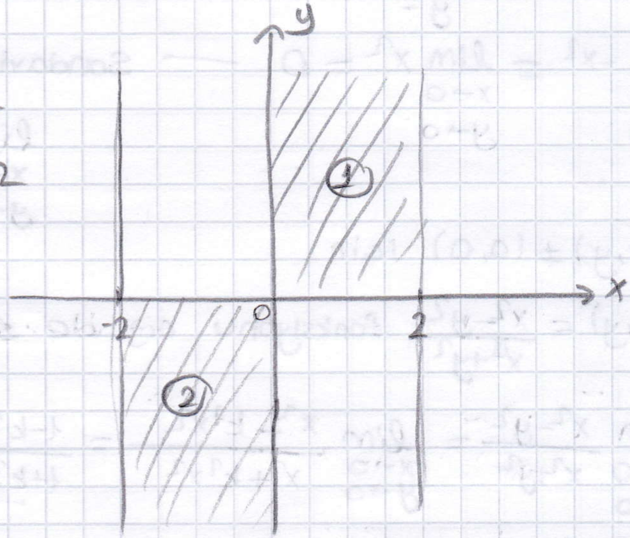
$x \geq 0$, $y \geq 0$ | $x \leq 0$, $y \leq 0$

① $0 \leq x \leq 2$, $y \geq 0$

② $-2 \leq x \leq 0$, $y \leq 0$

$-1 \leq \frac{x}{2} \leq 1$

$-2 \leq x \leq 2$

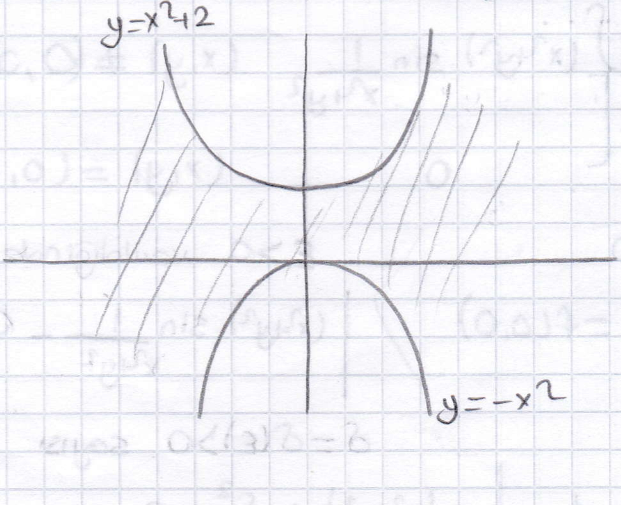



25) $z = \arccos\frac{y-1}{x^2+1}$ tanım kümesini bulun ve düzlemde gösterin

$-1 \leq \frac{y-1}{x^2+1} \leq 1$

$-x^2 - 1 \leq y - 1 \leq x^2 + 1$

$-x^2 \leq y \leq x^2 + 2$



26) $f(x,y) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin\frac{1}{y} & y \neq 0 \\ 0 & y = 0 \end{cases}$ fonksiyonunun $(0,0)$ noktasında sürekliliğini inceleyiniz

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$$

Fonksiyon $(0,0)$ noktasında tanımlı, limite sahip ve limit değeri fonksiyonun bu noktadaki değerine eşit olduğunda fonksiyon bu noktada süreklidir.

$(0,0)$ için $f(0,0) = 0$

$$-1 \leq \sin\frac{1}{y} \leq 1$$

$$-x^2 \leq x^2 \cdot \sin\frac{1}{y} \leq x^2$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} -x^2 = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} x^2 = 0 \longrightarrow$$ Sandaviç teoremine göre;

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} x^2 \cdot \sin\frac{1}{y} = 0$$

27) $(x,y) \neq (0,0)$ için

$f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ fonksiyonu orjinde sürekli olacak şekilde tanımlanabilir mi

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2-k^2x^2}{x^2+k^2x^2} = \frac{1-k^2}{1+k^2} \longrightarrow$$ k'nın her farklı değeri için fonksiyon farklı değerler alacağı için limite sahip değildir. Bu nedenle sürekli değildir.

28) $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2) \cdot \sin\frac{1}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ sürekliliğini araştırın

$f(0,0) = 0$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = f(0,0)$$

$\varepsilon > 0$ verildiğinde $0 \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq \delta$ iken $\left|(x^2+y^2) \cdot \sin\frac{1}{x^2+y^2} - 0\right| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı bulmalıyız

$$\left|(x^2+y^2) \cdot \sin\frac{1}{x^2+y^2}\right| < |x^2+y^2| < \delta^2 = \varepsilon$$

$$\boxed{\delta = \sqrt{\varepsilon} > 0}$$

29) $f$ ve $g$ tek değişkenli iki kez türevlenebilir fonksiyonlar olmak üzere

$$z = x.f(x+y) + y.g(x+y)$$ fonksiyonunun $$z_{xx} - 2z_{xy} + z_{yy} = 0$$

denklemini sağladığını gösteriniz.

$$z_x = f(x+y) + x.f'(x+y) + yg'(x+y)$$

$$z_{xx} = 2f'(x+y) + x.f''(x+y) + yg''(x+y)$$

$$z_{xy} = f'(x+y) + xf''(x+y) + g'(x+y) + y.g''(x+y)$$

$$z_y = x.f'(x+y) + g(x+y) + y.g'(x+y)$$

$$z_{yy} = x.f''(x+y) + 2g'(x+y) + y.g''(x+y)$$

$$z_{xx} - 2z_{xy} + z_{yy} = 2f'(x+y) + x.f''(x+y) + yg''(x+y) - 2\left[f'(x+y) + x.f''(x+y) + g'(x+y) + yg''(x+y)\right] + x.f''(x+y) + 2g'(x+y) + yg''(x+y)$$

$$= 0$$

30) $w = \ln(x^2+y^2) + z.\arctan\frac{y}{x}$

$$x.\frac{\partial^2 w}{\partial z \partial x} + y.\frac{\partial^2 w}{\partial z \partial y} = 0$$ sağladığını gösteriniz.

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \arctan\frac{y}{x}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z \partial x} = \frac{-y/x^2}{1+\frac{y^2}{x^2}} = \frac{-y}{x^2+y^2} \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} = \frac{1/x}{1+\frac{y^2}{x^2}} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

$$x.\frac{\partial^2 w}{\partial z \partial x} + y.\frac{\partial^2 w}{\partial z \partial y} = x.\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right) + y\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = 0$$

31) $x^2+y^2+z^2 = a^2$ eşitliğili ile verilen $z = f(x,y)$ fonksiyonu için birinci ve ikinci mertebeden türevleri bulunuz.

$$F(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-a^2 = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z} = -\frac{2x}{2z} = \frac{-x}{z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial z} = -\frac{2y}{2z} = -\frac{y}{z}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{-1.z + x.\frac{\partial z}{\partial x}}{z^2} = \frac{-z + x.\left(\frac{-x}{z}\right)}{z^2} = -\frac{x^2+z^2}{z^3}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{x.\frac{\partial z}{\partial y}}{z^2} = \frac{x\left(\frac{-y}{z}\right)}{z^2} = \frac{-xy}{z^3}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{-z + y.\frac{\partial z}{\partial y}}{z^2} = \frac{-z - y\left(\frac{y}{z}\right)}{z^2} = -\frac{z^2+y^2}{z^3}$$

> Eğer bir fonksiyon bileşik fonksiyon ise türevi de bileşik fonksiyondur.

32) $\left.\begin{array}{l} z = f(x,y) \\ x = e^s \cos t \\ y = e^s \sin t \end{array}\right\}$ $z_{ss}, z_{st}, z_{tt}$ türevlerini hesaplayınız.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = a(x,y)$$

$$z_s = \overbrace{\frac{\partial z}{\partial x}}^{a(x,y)} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \overbrace{\frac{\partial z}{\partial y}}^{b(x,y)} \cdot \frac{\partial y}{\partial s}$$

$$\frac{\partial a}{\partial s} = \left[\frac{\partial a}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial a}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s}\right]$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \cdot \frac{\partial y}{\partial s}$$

$$z_{ss} = \left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \cdot \frac{\partial y}{\partial s}\right] \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial^2 x}{\partial s^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \left[\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial y}{\partial s}\right] \cdot \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial^2 y}{\partial s^2}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

33) $f(x,y) = \ln(x^2+y^4)$ fonksiyonunun $4x = y^2$ parabolü yönündeki türevinin $(1,2)$ noktasındaki değerini bulunuz.

$x = t^2 \qquad x = 1 \Rightarrow t^2 = 1 \Rightarrow t = \mp 1$

$y = 2t \qquad y = 2 \Rightarrow 2t = 2 \Rightarrow t = 1$

$\boxed{t = 1}$

$\vec{r}(t) = t^2 \vec{i} + 2t\vec{j}$

$\vec{r}\,'(t) = 2t\vec{i} + 2\vec{j}$

$\vec{r}\,'(1) = 2\vec{i} + 2\vec{j}$

$\nabla f = \dfrac{2x}{x^2+y^4}\vec{i} + \dfrac{4y^3}{x^2+y^4}\vec{j}$

$\nabla f(1,2) = \dfrac{2}{17}\vec{i} + \dfrac{32}{17}\vec{j}$

$$D_{\vec{r}(1)} f = \nabla f(1,2) \cdot \frac{\vec{r}\,'(1)}{|\vec{r}\,'(1)|}$$

$$= \left(\frac{2}{17}\vec{i} + \frac{32}{17}\vec{j}\right) \cdot \frac{2\vec{i} + 2\vec{j}}{\sqrt{8}}$$

$$= \frac{2}{17\sqrt{2}} + \frac{32}{17\sqrt{2}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$= \sqrt{2}$$

**ÖR** $\Rightarrow f(x,y)=e^{x-2y}$ için x ve y'nin kuvvetlerine göre 3. derece Taylor polinomunu yazınız.

$e^t \longrightarrow f(t)=e^t$

$f'(t)=e^t=f''(t)=f'''(t)=\dots$

$f(0)=f'(0)=f''(0)=\dots=1$

$f(t)=e^t=1+t+\frac{t^2}{2!}+\frac{t^3}{3!}+\dots$

$t\to x-2y \qquad e^{x-2y}=1+(x-2y)+\frac{(x-2y)^2}{2!}+\frac{(x-2y)^3}{3!}$

$=1+(x-2y)+\frac{1}{2!}(x^2-4xy+4y^2)+\frac{1}{3!}(x^3-6x^2y+12xy^2-8y^3)$

**ÖR** $\Rightarrow f(x,y)=x^3-y^3-2xy+6 \rightarrow$ kritik noktalarını bulup sınıflandırınız

$\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2-2y=0 \Rightarrow y=\frac{3x^2}{2}$

$\frac{\partial f}{\partial y}=-3y^2-2x=0 \Rightarrow -3\cdot\left(\frac{3x^2}{2}\right)^2-2x=0$

$\frac{-27x^4}{4}-2x=0$

$-27x^4-8x=0$

$-x(27x^3+8)=0$

$x=0 \quad 27x^3+8=0$

$x^3=-\frac{8}{27} \Rightarrow x=-\frac{2}{3}$

$x=0 \Rightarrow y=0$

$x=-\frac{2}{3} \Rightarrow y=\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{9}=\frac{2}{3}$

$A(0,0)$, $B\left(-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right) \rightarrow$ kritik noktalar

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -2$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -6y$

A(0,0) için

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 = a$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -2 = b$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 = c$

$b^2 - ac = 4 - 0 > 0$

$(0,0) \rightarrow$ Eyer noktasıdır

$B\left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ için

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6 \cdot \left(\frac{-2}{3}\right) = -4 = a$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -2 = b$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -6 \cdot \left(\frac{2}{3}\right) = -4 = c$

$b^2 - ac = 4 - (-4) \cdot (-4)$

$= -12 < 0 \rightarrow$ max-min var

$a = -4 < 0$ max değere sahip

$f\left(\frac{-2}{3}, \frac{2}{3}\right) = \frac{120}{27} \rightarrow$ max değeri

**ÖR** $\Rightarrow f(x,y) = (x-y)^2 + x^4$ fonksiyonunun eğer mevcutsa ekstremum değerlerini bulunuz.

$\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2(x-y) + 4x^3 = 0 \Rightarrow 4x^3 = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 0$

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = -2(x-y) = 0 \Rightarrow x = y$

$(0,0) \rightarrow$ kritik nokta

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 + 12x^2$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -2$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$

(0,0)

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= 2 = a \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= -2 = b \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= 2 = c \end{aligned}\right\} \quad b^2 - ac = (-2)^2 - 2 \cdot 2$$

$= 0 \rightarrow$ ikinci türev testi cevap vermez

$\Delta f = f(a+h, b+k) - f(a,b)$

$\Delta f = f(0+h, 0+k) - f(0,0)$

$\Delta f = (h-k)^2 + h^4 > 0$

$\Delta f > 0$ olduğundan $(0,0)$ minimum noktadır

$f(0,0) = 0 \rightarrow$ minimum değerdir.

ÖR $\Rightarrow$ $\sin 31° . \cos 59° \cong$

$f(x,y) = \sin x . \cos y$

$L(x,y) = f(a,b) + f'_x(a,b)(x-a) + f'_y(a,b)(y-b)$

$a = 30° = \frac{\pi}{6}$ $\quad L(x,y) = f\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right) + f'_x\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right)\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + f'_y\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right)\left(y - \frac{\pi}{3}\right)$

$b = 60° = \frac{\pi}{3}$ $\quad = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{\sqrt{3}}{4}\left(y - \frac{\pi}{3}\right)$

$f\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$

$f'_x = \cos x . \cos y \Rightarrow f'_x\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}$ $\quad f'_y = -\sin x . \sin y \Rightarrow f'_y\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{4}$

$31° = \frac{31\pi}{180}$

$59° = \frac{59\pi}{180}$

$$f\left(\frac{31\pi}{180}, \frac{59\pi}{180}\right) \cong L\left(\frac{31\pi}{180}, \frac{59\pi}{180}\right)$$

$$\cong \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{31\pi}{180} - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{59\pi}{180} - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\cong \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} . \frac{\pi}{180} - \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{-\pi}{180}\right) = \underline{\underline{\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}\pi}{360}}}$$

2. YOL

$\Delta z \cong dz$ $\quad a = 30° = \frac{\pi}{6}$ $\quad b = 60° = \frac{\pi}{3}$

$\Delta x = 1° = \frac{\pi}{180}$ $\quad \Delta y = -1° = -\frac{\pi}{180}$

$$f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a,b) = \frac{\partial f}{\partial x} . \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} . \Delta y$$

$$f\left(\frac{31\pi}{180}, \frac{59\pi}{180}\right) \cong f\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right)} . \left(\frac{\pi}{180}\right) + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right)} \left(-\frac{\pi}{180}\right)$$

33) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x-y}{x+y}$ limitini inceleyiniz.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0}\left[\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{x-y}{x+y}\right]=\lim\limits_{x\to 0} 1 = 1 \\ \lim\limits_{y\to 0}\left[\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-y}{x+y}\right]=\lim\limits_{y\to 0} (-1) = -1\end{array}\right] \neq$$

olduğundan çift yol testine göre fonksiyon (0,0)'da limite sahip değildir.

34) $f(x,y)=\arctan\dfrac{y}{x}$ fonksiyonunun (0,1) noktasında limitinin varlığını inceleyiniz.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\lim\limits_{y\to 1}\arctan\dfrac{y}{x}\right]=\lim\limits_{x\to 0^+}\arctan\dfrac{1}{x}=\dfrac{\pi}{2} \\ \lim\limits_{x\to 0^-}\left[\lim\limits_{y\to 1}\arctan\dfrac{y}{x}\right]=\lim\limits_{x\to 0^-}\arctan\dfrac{1}{x}=-\dfrac{\pi}{2}\end{array}\right] \neq$$

olduğundan farklı yollardan alınan limitler birbirinden farklı çıkmıştır. O halde fonksiyon (0,1) noktasında limite sahip değildir.

23) $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{2^k - 3^{k-1}}{4^{k+1}}$ serisinin toplamını bulunuz.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k - 3^{k-1}}{4^{k+1}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{4^{k+1}} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^{k-1}}{4^{k+1}}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{16}\left(\frac{2^{k-1}}{4^{k-1}}\right) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{16}\left(\frac{3^{k-1}}{4^{k-1}}\right)$$

$$= \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}}_{\substack{a=\frac{1}{8} \quad r=\frac{1}{2} \\ |r|<1 \text{ yak.}}} - \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{16}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}}_{\substack{a=\frac{1}{16} \quad r=\frac{3}{4} \\ |r|<1 \text{ yak.}}}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k - 3^{k-1}}{4^{k+1}} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{1-\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$$

24) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(1+\ln^2 k)}$ serisinin karakterini inceleyiniz.

$f(k) = a_k = \frac{1}{k(1+\ln^2 k)}$ $[1, \infty)$ aralığında sürekli, pozitif.

$$f'(k) = \frac{-\left[(1+\ln^2 k) + \cancel{k} \cdot \frac{2\ln k}{\cancel{k}}\right]}{k^2(1+\ln^2 k)^2}$$

$$= \frac{-\left[1+\ln^2 k + 2\ln k\right]}{k^2(1+\ln^2 k)} < 0 \quad \text{azalan.}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{dk}{k(1+\ln^2 k)} = \lim_{R\to\infty} \int_1^R \frac{dk}{k(1+\ln^2 k)}$$

$\ln k = t$

$\frac{dk}{k} = dt$

$k=1 \Rightarrow t=0$

$k=R \Rightarrow t = \ln R$

$$= \lim_{R\to\infty} \int_0^{\ln R} \frac{dt}{1+t^2}$$

$$= \lim_{R\to\infty} \left( \arctan t \Big|_0^{\ln R} \right)$$

$$= \lim_{R\to\infty} \left( \arctan(\ln R) - 0 \right)$$

$$= \lim_{R\to\infty} \arctan(\ln R)$$

$$= \arctan(\infty)$$

$= \frac{\pi}{2}$ integral yakınsak olduğundan seri de yakınsaktır.

25) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+5n+1}{\sqrt{n^6+3n^2+2}}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ harmonik seri yakınsaktır.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+5n+1}{\sqrt{n^6+3n^2+2}} \cdot n$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n^3+5n^2+n}{\sqrt{n^6\left(1+\frac{3}{n^4}+\frac{2}{n^6}\right)}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^3}\left(2+\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{\cancel{n^3}\sqrt{1+\frac{3}{n^4}+\frac{2}{n^6}}}$$

$= 2 \neq 0, \infty$ olduğundan her iki seri aynı karakterdedir.

26) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n}{1+\sqrt{e^{2n}-1}}$ serisinin karakterini inceleyiniz.

$$a_n = \frac{e^n}{1+\sqrt{e^{2n}-1}} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{1+\sqrt{e^{2n}-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{1+\sqrt{e^{2n}(1-e^{-2n})}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{1+e^n\left(\sqrt{1-e^{-2n}}\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{e^n}}{\cancel{e^n}\left[e^{-n}+\sqrt{1-e^{-2n}}\right]}$$

$= \frac{1}{0+\sqrt{1-0}} = 1 \neq 0$ olduğundan n. terim testine göre ıraksaktır.

27) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n^2]{2n+n^3}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$$a_n = \sqrt[n^2]{2n+n^3} = (2n+n^3)^{1/n^2}$$

$$\Rightarrow \ln a_n = \frac{1}{n^2}\ln(2n+n^3)$$

$$\lim_{n\to\infty} \ln a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\ln(2n+n^3)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(2n+n^3)}{n^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2+3n^2}{2n+n^3}}{2n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(2+3n^2)}{2n(2n+n^3)} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty}(\ln a_n) = 0 \Rightarrow \ln\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = e^0 = 1 \neq 0$$

olduğundan n-terim testine göre seri ıraksaktır.

28) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{1+e^n}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$$a_n = \frac{\ln n}{1+e^n} \qquad a_{n+1} = \frac{\ln(n+1)}{1+e^{n+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1)}{1+e^{n+1}} \cdot \frac{1+e^n}{\ln n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln n} \cdot \frac{1+e^n}{1+e^{n+1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln n} \cdot \frac{\cancel{e^n}(e^{-n}+1)}{\cancel{e^n}(e^{-n}+e)}$$

$= \frac{1}{e} < 1$ olduğundan oran testine göre seri yakınsaktır.

29) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n}+3}\right)^{\sqrt{n^3}}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$$a_n = \left(\frac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n}+3}\right)^{n^{3/2}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n}+3}\right)^{n^{3/2}}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n}+3}\right)^{\sqrt{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{\sqrt{n}+3}\right)^{\sqrt{n}+3-3}$$

$\sqrt{n}+3 = t$

$n \to \infty$

$t \to \infty$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{\sqrt{n}+3}\right)^{\sqrt{n}+3} \left(1-\frac{1}{\sqrt{n}+3}\right)^{-3}$$

$$= \lim_{t\to\infty} \left(1-\frac{1}{t}\right)^{t} \left(1-\frac{1}{t}\right)^{-3}$$

$= e^{-1} \cdot 1 = \frac{1}{e} < 1$ olduğundan seri yakınsaktır.

30) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(k\pi)}{\sqrt{k}}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(k\pi)}{\sqrt{k}} = -1 + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} - \dots$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \quad \text{Alterne seri}$$

Mutlak değerlerden oluşan seriye bakarsak;

$$\sum_{k=1}^{n} \left| \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right| = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

p-serisidir. $p = \frac{1}{2} < 1$ olduğundan ıraksaktır.

O halde alterne seri testini uygularsak;

1°) $a_{n+1} \overset{?}{<} a_n$    $\forall n$ için

$$n < n+1$$
$$\sqrt{n} < \sqrt{n+1}$$
$$\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n+1}} \checkmark$$

2°) $\lim_{n\to\infty} a_n \overset{?}{=} 0$    $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0 \checkmark$

$\Rightarrow$ Alterne seri yakınsaktır. Mutlak değerlerden oluşan seri ıraksak olduğundan şartlı yakınsaktır.

31) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (2x-3)^k}{k\sqrt{k^2+1}}$ serisinin yakınsaklık merkezini, yakınsaklık yarıçapını ve yakınsaklık aralığını bulunuz.

$$u_k = \frac{(-1)^k (2x-3)^k}{k\sqrt{k^2+1}} = \frac{(-1)^k \cdot 2^k (x-\frac{3}{2})^k}{k\sqrt{k^2+1}}$$

$a_k$ $a_k$

$\Rightarrow$ $x = \frac{3}{2}$ yakınsaklık merkezi

$$r = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{(-1)^{k+1} \cdot 2^{k+1}}{(k+1)\sqrt{(k+1)^2+1}} \cdot \frac{k\cdot\sqrt{k^2+1}}{2^k \cdot (-1)^k} \right|$$

$$= \lim_{k\to\infty} 2 \cdot \left| \frac{k\sqrt{k^2+1}}{(k+1)\sqrt{(k+1)^2+1}} \right|$$

$= 2 \Rightarrow R = \frac{1}{r} = \frac{1}{2}$ yakınsaklık yarıçapı.

$(|x-c| < R)$

$\Rightarrow |x - \frac{3}{2}| < \frac{1}{2}$ için seri yakınsaktır.

$$-\frac{1}{2} < x - \frac{3}{2} < \frac{1}{2} \Rightarrow 1 < x < 2$$

$x = 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\sqrt{k^2+1}}$ olur.

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ p-serisi $p = 2 > 1$ yakınsaktır.

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{k\sqrt{k^2+1}}}{\frac{1}{k^2}} = \lim_{k\to\infty} \frac{k^2}{k\sqrt{k^2+1}} = 1 \neq 0, \infty$$

Her iki seri aynı karakterdedir.

$x=2 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k\sqrt{k^2+1}}$ olur. Alterne seridir. Mutlak değerlerden oluşan seriye bakarsak;

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^k}{k\sqrt{k^2+1}} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\sqrt{k^2+1}} \quad \text{yakınsaktır.}$$

O halde yakınsaklık aralığı $1 \leq x \leq 2$'dir.

32) $\frac{1}{3+2x}$'i temsil eden kuvvet serisini bulunuz ve yakınsaklık aralığını yazınız.

$$\frac{1}{3+2x} = \frac{1}{2\left(x+\frac{3}{2}\right)} \; ?$$

$$\frac{1}{3+2x} = \frac{1}{3\left(1+\frac{2x}{3}\right)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+\frac{2x}{3}}\right)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n \qquad |x|<1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3\left(1+\frac{2x}{3}\right)} = \frac{1}{3}\left[1 - \frac{2x}{3} + \left(\frac{2x}{3}\right)^2 - \left(\frac{2x}{3}\right)^3 + \dots\right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3}\left(-\frac{2x}{3}\right)^n \qquad \left|-\frac{2x}{3}\right| < 1$$

$$\Rightarrow \frac{2|x|}{3} < 1$$

$$\Rightarrow |x| < \frac{3}{2}$$

$$-\frac{3}{2} < x < \frac{3}{2}$$

33) $f(x)=\dfrac{1}{x}$ fonksiyonunun $x=3$ civarındaki seri açılımını bulunuz.

$$f(x)=\frac{1}{x} \qquad f(3)=\frac{1}{3}$$

$$f'(x)=\frac{-1}{x^2} \qquad f'(3)=\frac{-1}{3^2}$$

$$f''(x)=\frac{2}{x^3} \qquad f''(3)=\frac{2}{3^3}$$

$$f'''(x)=\frac{-6}{x^4} \qquad f'''(3)=\frac{-3!}{3^4}$$

$$f^{(4)}(x)=\frac{24}{x^5} \qquad f^{(4)}(3)=\frac{4!}{3^5}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

Seri açılım:

$$\Rightarrow \cancel{f(x)} = f(3)+f'(3)(x-3)+\frac{f''(3)}{2!}(x-3)^2+\dots$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}-\frac{1}{3^2}(x-3)+\frac{1}{3^3}(x-3)^2-\frac{1}{3^4}(x-3)^3+\frac{1}{3^5}(x-3)^4\dots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3}\frac{(x-3)^n}{3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3}\left(\frac{x-3}{3}\right)^n$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{3-x}{3}\right)^n=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{3-x}{3}}$$

$$a=\frac{1}{3} \quad r=\frac{3-x}{3} \qquad =\frac{1}{x}$$

$|r|<1$ için yakınsaktır.

$$|3-x|<3 \Rightarrow -3<3-x<3$$

$$-3<x-3<3$$

$$0<x<6$$

34) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(3^{-n})}{1+3^{n}}$ serisinin karakterini bulunuz.

$$\frac{\sin(3^{-n})}{1+3^{n}} < \frac{\sin(3^{-n})}{3^{n}} < \frac{1}{3^{n}}$$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^{n}}$ geometrik seri $|r| = \left|\frac{1}{3}\right| < 1$ yakınsak.

$\forall n$ için $\frac{\sin(3^{-n})}{1+3^{n}} < \frac{1}{3^{n}}$ olduğundan karşılaştırma testine göre verilen seri yakınsaktır.

35) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{1+4^{n}}} (x-2)^{n}$ serisinin yakınsaklık aralığını bulunuz.

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n+1}{\sqrt{1+4^{n+1}}} (x-2)^{n+1} \cdot \frac{\sqrt{1+4^{n}}}{n(x-2)^{n}} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n+1}{n} \cdot \frac{\sqrt{1+4^{n}}}{\sqrt{1+4^{n+1}}} \right| \cdot |x-2|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n+1}{n} \cdot \frac{\cancel{2^{n}} \cdot \sqrt{4^{-n}+1}}{\cancel{2^{n}} \sqrt{4^{-n}+4}} \right| |x-2|$$

$$= \frac{1}{2} |x-2| < 1 \Rightarrow |x-2| < 2$$

$$-2 < x-2 < 2$$

$$0 < x < 4$$

$x=0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{1+4^{n}}} \cdot (-2)^{n}$ $\quad \lim_{n\to\infty} \frac{n \cdot (-2^{n})}{\sqrt{1+4^{n}}} \neq 0$ ıraksak.

$x=4 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{1+4^{n}}} 2^{n}$ $\quad \lim_{n\to\infty} \frac{n \cdot 2^{n}}{\sqrt{1+4^{n}}} \neq 0$ ıraksak.

36) $g(x) = x \ln(1+x^2)$ ile tanımlı $g(x)$ fonksiyonunu temsil eden kuvvet serisini ve yakınsaklık aralığını bulunuz.

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad |x|<1$$

$x$ yerine $-x^2$ yazarsak;

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n . x^{2n} \qquad |x|<1$$

olur. Eşitliğin her iki tarafını $2x$ ile çarpıp terim terim integre edelim.

$$\frac{2x}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n . 2 . x^{2n+1} \Rightarrow$$

$$\int_0^x \frac{2t\,dt}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} 2.(-1)^n . \int_0^x t^{2n+1}\,dt$$

$$\Rightarrow \ln(1+t^2)\Big|_0^x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n . 2 . \left[ \frac{t^{2n+2}}{2n+2}\Big|_0^x \right]$$

$$\Rightarrow \ln(1+x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n . \frac{x^{2n+2}}{n+1}$$

$$\Rightarrow x . \ln(1+x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n . \frac{x^{2n+3}}{n+1} \qquad \begin{array}{c} |x|<1 \\ -1 \leq x \leq 1 \end{array}$$

$x=-1 \Rightarrow \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \Rightarrow$ Alterne harmonik seri gibi davranır. Şartlı yakınsaktır.

$x = 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ yine Alterne harmonik seri gibi davranır şartlı yakınsaktır.

37) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n-1)!} \Rightarrow x \cdot f'(x) = (1+x) \cdot f(x)$

olduğunu gösteriniz.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n-1)!} = x + x^2 + \frac{x^3}{2!} + \frac{x^4}{3!} + \cdots$$

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = 1 + 2x + 3\frac{x^2}{2!} + \frac{4x^3}{3!} + \cdots$$

$$x \cdot f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \frac{x^n}{(n-1)!} = x + 2x^2 + 3\frac{x^3}{2!} + \frac{4x^4}{3!} + \cdots$$

$n = k+1$ alalım.

$$x \cdot f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \cdot \frac{x^{k+1}}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{x^{k+1}}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k!}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{(k-1)!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{(k-1)!}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} x \cdot \frac{x^k}{(k-1)!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{(k-1)!}$$

$$= (1+x) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{(k-1)!}$$

$$= (1+x) \cdot f(x)$$

38) $f(x) = e^{1-2x^3}$ fonksiyonunun Mclaurin serisini bulunuz.

$$f(x) = e^{1-2x^3} = e \cdot e^{-2x^3}$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\Rightarrow e^{-2x^3} = 1 + (-2x^3) + \frac{(-2x^3)^2}{2!} + \frac{(-2x^3)^3}{3!} + \dots$$

$$= 1 - 2x^3 + \frac{2^2 \cdot x^6}{2!} - \frac{2^3 \cdot x^9}{3!} + \dots$$

$$e \cdot e^{-2x^3} = e\left(1 - 2x^3 + \frac{2^2 x^6}{2!} - \frac{2^3 x^9}{3!} + \dots\right)$$

$$= e \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^n \cdot x^{3n}}{n!}$$

39) 2. mertebe Taylor polinomunu kullanarak $\sqrt{26}$ 'nın değerini yaklaşık olarak hesaplayınız.

$$P_2(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2$$

$a = 25$ $\quad f(x) = \sqrt{x}$ $\quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\quad f''(x) = \frac{-1}{4 \cdot x^{3/2}}$

$$\Rightarrow f(25) = 5 \quad f'(25) = \frac{1}{10} \quad f''(25) = \frac{-1}{500}$$

$$\Rightarrow P_2(x) = 5 + \frac{1}{10}(x-25) - \frac{1}{1000}(x-25)^2$$

$$P_2(26) \cong 5 + \frac{1}{10} - \frac{1}{1000} = 5 + 0{,}1 - 0{,}001 = 5{,}099$$

40) $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\int_{k}^{k+1}\frac{dx}{(1+x)^2}\right)$ serisinin toplamını bulunuz.

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\int_{k}^{k+1}\frac{dx}{(1+x)^2}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{-1}{1+x}\Big|_{k}^{k+1}\right]$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{-1}{1+k+1}+\frac{1}{1+k}\right]$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{1}{1+k}-\frac{1}{2+k}\right]$$

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}\left[\frac{1}{1+k}-\frac{1}{2+k}\right]$$

$$=\left[\left(1-\cancel{\tfrac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\tfrac{1}{2}}-\cancel{\tfrac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\tfrac{1}{3}}-\cancel{\tfrac{1}{4}}\right)+\dots+\left(\cancel{\tfrac{1}{1+n}}-\frac{1}{2+n}\right)\right]$$

$$=1-\frac{1}{2+n}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2+n}\right)$$

$$=1\Rightarrow\sum_{k=0}^{\infty}\left(\int_{k}^{k+1}\frac{dx}{(1+x)^2}\right)=1$$

41) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sqrt{n}}{(n+1)\sqrt[3]{n^4+1}}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$$\left.\begin{array}{l}n\sqrt{n}\longrightarrow \text{derecesi } 3/2\\(n+1)\sqrt[3]{n^4+1}\longrightarrow \text{derecesi } 7/3\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{7}{3}-\frac{3}{2}=\frac{5}{6}$$

$\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{5/6}}$ p-serisi $p=\frac{5}{6}<1$ ıraksak.

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\sqrt{n}\cdot n^{5/6}}{(n+1)\cdot\sqrt[3]{n^4+1}}=1\neq 0,\infty$ Her iki seri aynı karakterdedir.

42) $f(x) = \int_0^x \cos(t^2)\,dt$ fonksiyonunun temsil ettiği kuvvet serisini bulunuz.

$$\int_0^x \cos(t^2)\,dt = \int_0^x \left[1 - \frac{t^4}{2!} + \frac{t^8}{4!} - \frac{t^{12}}{6!} + \cdots\right] dt$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \qquad -\infty < x < \infty$$

$$\Rightarrow \cos t^2 = 1 - \frac{t^4}{2!} + \frac{t^8}{4!} - \frac{t^{12}}{6!} + \cdots$$

$$\Rightarrow \int_0^x \cos(t^2)\,dt = t - \frac{t^5}{5.2!} + \frac{t^9}{9.4!} - \frac{t^{13}}{13.6!} + \cdots \Big|_0^x$$

$$= x - \frac{x^5}{5.2!} - \frac{x^9}{9.4!} - \frac{x^{13}}{13.6!} + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n . \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)(2n)!}$$