2. Üç değişkenli fonksiyonda bir bağıntı bulunması hali

$u=f(x,y,z)$ fonksiyonunun değişkenleri arasında $g(x,y,z)=0$ şeklinde bir bağıntı bulunması halinde ekstremum noktalarını arayalım.

$f(x,y,z)$, $g(x,y,z)$ fonksiyonları ve bunların birinci mertebeden kısmi türevleri bir V bölgesinde tanımlı ve sürekli olsunlar. Ayrıca

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial z}\right)^2>0$$

olsun. Bu koşuldan g'_x, g'_y, g'_z kısmi türevlerinden en az birinin sıfırdan farklı olduğu anlaşılır. Farzedelim ki $g'_z\neq 0$ olsun. O halde kapalı fonksiyon teoremine göre $g(x,y,z)=0$ denkleminin $z=h(x,y)$ şeklinde bir çözümü vardır.

$$u=f(x,y,h(x,y))=F(x,y)$$

Böylece üç değişkenli bir fonksiyonun max-min problemi iki değişkenli fonksiyonun max-min problemine dönüşür.

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x}&=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot 1+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot 0+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=0\\ \frac{\partial F}{\partial y}&=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot 0+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot 1+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=0\end{aligned}\right\}$$

$$g(x,y,z)=0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{g'_x}{g'_z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{g'_y}{g'_z}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\left[-\frac{g'_x}{g'_z}\right]=0\\ &\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\left[-\frac{g'_y}{g'_z}\right]=0 \end{aligned}\right\}\Rightarrow \begin{aligned} &\frac{f'_x\cdot g'_z-g'_x\cdot f'_z}{g'_z}=0 \Rightarrow f'_x g'_z-f'_z g'_x=0\\ &\frac{f'_y\cdot g'_z-f'_z\cdot g'_y}{g'_z}=0 \Rightarrow f'_y\cdot g'_z-g'_y f'_z=0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} f'_x & f'_z \\ g'_x & g'_z \end{vmatrix}=\frac{D(f,g)}{D(x,z)}=0\,, \qquad \begin{vmatrix} f'_y & f'_z \\ g'_y & g'_z \end{vmatrix}=\frac{D(f,g)}{D(y,z)}=0 \quad \text{olur.}$$

O halde $u=f(x,y,z)$ fonksiyonunun $g(x,y,z)=0$ bağıntısı altındaki ekstremum noktaları

$$\left.\begin{aligned} &g(x,y,z)=0\\ &\frac{D(f,g)}{D(x,z)}=0\\ &\frac{D(f,g)}{D(y,z)}=0 \end{aligned}\right\} \text{denklem sisteminin çözümüyle bulunur.}$$

Aynı sonucu Lagrange çarpanları yöntemiyle aşağıdaki şekilde elde edebiliriz:

λ bir parametre olmak üzere

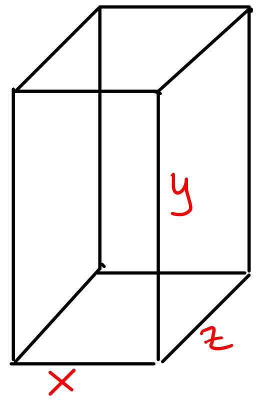
$$H(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) + \lambda g(x,y,z)$$

fonksiyonunu dört değişkenli bir fonksiyon olarak düşünürsek;

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial x} = 0 \\
\frac{\partial H}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial y} = 0 \\
\frac{\partial H}{\partial z} &= \frac{\partial f}{\partial z} + \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial z} = 0 \\
\frac{\partial H}{\partial \lambda} &= g(x,y,z) = 0
\end{aligned}\right\}$$

denklem sisteminin çözümüyle ekstremum noktalar elde edilir.

Ör/ Yüzey alanı a^2'ye eşit olacak şekilde maksimum hacimli bir dikdörtgenler prizmasının boyutlarını bulunuz.



$$2(xz + yz + xy) = a^2 \Rightarrow g(x,y,z) = 2(xz + yz + xy) - a^2 = 0$$

$$V = xyz \Rightarrow f(x,y,z) = xyz$$

$$H(x,y,z,\lambda) = xyz + \lambda\left[2xz + 2yz + 2xy - a^2\right]$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} = yz + \lambda\left[2z + 2y\right] = 0 \quad / x$$

$$\frac{\partial H}{\partial y} = xz + \lambda\left[2x + 2z\right] = 0 \quad / y$$

$$\frac{\partial H}{\partial z} = xy + \lambda\left[2x + 2y\right] = 0 \quad / z$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda} = 2xy + 2xz + 2yz - a^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} xyz + \lambda\left[2xz + 2xy\right] &= 0 \\ xyz + \lambda\left[2xy + 2yz\right] &= 0 \\ xyz + \lambda\left[2xz + 2yz\right] &= 0 \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$-\lambda\left[2xz + 2xy\right] = -\lambda\left[2xy + 2yz\right] = -\lambda\left[2xz + 2yz\right]$$

$$\cancel{2}xz + \cancel{2xy} = \cancel{2xy} + \cancel{2}yz \Rightarrow x = y$$

$$\cancel{2}xy + \cancel{2yz} = \cancel{2}xz + \cancel{2yz} \Rightarrow y = z$$

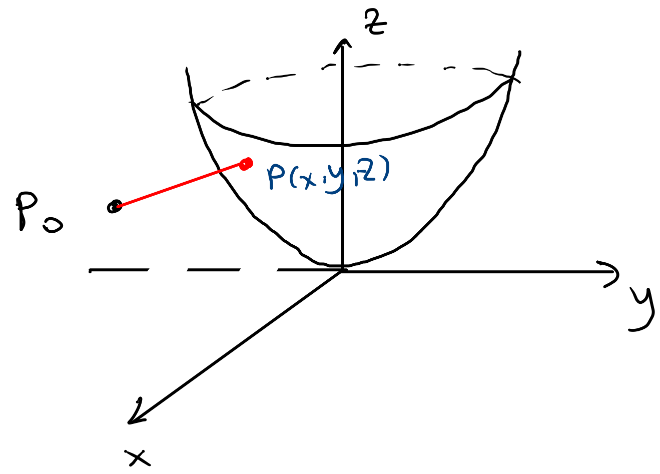
$$\cancel{2xz} + 2xy = \cancel{2xz} + 2yz \Rightarrow x = z$$

$x = y = z > 0$ Bu sonucu dördüncü denklemde yerine yazalım;

$$2x^2 + 2x^2 + 2x^2 - a^2 = 0$$

$$6x^2 = a^2 \Rightarrow x^2 = \frac{a^2}{6} \Rightarrow x = \frac{a}{\sqrt{6}} = y = z$$

Ör/ $P_0(3,-6,4)$ noktasının $z=x^2+y^2$ paraboloid yüzeyine en yakın uzaklığını bulunuz.



$$L=\sqrt{(x-3)^2+(y+6)^2+(z-4)^2}$$

$$g(x,y,z)=x^2+y^2-z=0$$

$$L^2=(x-3)^2+(y+6)^2+(z-4)^2=f(x,y,z)$$

$$H(x,y,z,\lambda)=(x-3)^2+(y+6)^2+(z-4)^2+\lambda(x^2+y^2-z)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial x}&=2(x-3)+2\lambda x=0\\ \frac{\partial H}{\partial y}&=2(y+6)+2\lambda y=0\\ \frac{\partial H}{\partial z}&=2(z-4)-\lambda=0\end{aligned}\right\}\quad \left.\begin{aligned}\lambda&=\frac{3-x}{x}\\ \lambda&=\frac{y+6}{-y}\\ \lambda&=2(z-4)\end{aligned}\right\}\Rightarrow \frac{3-x}{x}=\frac{y+6}{-y}=2(z-4)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda}=(x^2+y^2-z)=0$$

$$\Rightarrow\quad -3y+\cancel{xy}=\cancel{xy}+6x \qquad y=-2x$$

$$\left.\begin{aligned}3-x&=2xz-8x\\ 2xz&=3+7x\\ z&=\frac{3+7x}{2x}\end{aligned}\right\}\Rightarrow x^2+(-2x)^2-\frac{3+7x}{2x}=0$$

$$5x^2-\frac{3+7x}{2x}=0\Rightarrow 10x^3-7x-3=0$$

$$10x^3-7x-3=0 \Rightarrow (x-1)\underbrace{(10x^2+10x+3)}_{\text{reel kök yok}}=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow y=-2 \Rightarrow z=5$$

$$\begin{array}{l|l} \cancel{10x^3}-7x-3 & x-1 \\ \hline -\cancel{10x^3}+10x^2 & 10x^2+10x+3 \\ \cancel{10x^2}-7x-3 & \\ -\cancel{10x^2}+10x & \\ 3x-3 & \\ 3x-3 & \\ 0 & \end{array}$$

$(1,-2,5) \rightarrow$ ekstr. nok.

$$L=\sqrt{(x-3)^2+(y+6)^2+(z-4)^2}$$

$$=\sqrt{(1-3)^2+(-2+6)^2+(5-4)^2}$$

$$=\sqrt{4+16+1}$$

$$=\sqrt{21}$$

3) Üç değişkenli fonksiyonda iki bağıntı olması hali

$u=f(x,y,z)$ fonksiyonunun değişkenleri arasında $g(x,y,z)=0$ ve $h(x,y,z)=0$ şeklinde iki bağıntı bulunması halinde ekstremum noktalarını arayalım.

$f(x,y,z), g(x,y,z), h(x,y,z)$ fonksiyonları ve bunların birinci mertebeden kısmi türevleri bir V bölgesinde tanımlı ve sürekli olsunlar. Ayrıca;

$$\left[\frac{D(g,h)}{D(x,y)}\right]^2+\left[\frac{D(g,h)}{D(y,z)}\right]^2+\left[\frac{D(g,h)}{D(z,x)}\right]^2>0$$

olsun. Bu koşuldan fonksiyonel determinantların üçünün birden sıfır olmayacağı açıktır.

Farzedelim ki $\dfrac{D(g,h)}{D(y,z)} \neq 0$ olsun. Bu takdirde

$$\left.\begin{aligned} g(x,y,z)&=0\\ h(x,y,z)&=0 \end{aligned}\right\}$$

denklem sisteminin

$$y=\alpha(x)\,,\quad z=\beta(x)$$

şeklinde bir çözümü vardır. Bunları U fonksiyonunda yerine yazarsak;

$$U=f(x,\alpha(x),\beta(x))=F(x)$$

olur.

$$\Rightarrow\quad \left.\begin{aligned} \frac{dF}{dx}&=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot 1+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dx}=0\\ &\frac{\partial g}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{\partial g}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dx}=0\\ &\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{\partial h}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{\partial h}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dx}=0 \end{aligned}\right\}$$

denklem sisteminden

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\dfrac{D(g,h)}{D(x,z)}}{\dfrac{D(g,h)}{D(y,z)}}\qquad \frac{dz}{dx}=-\frac{\dfrac{D(g,h)}{D(y,x)}}{\dfrac{D(g,h)}{D(y,z)}}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{D(f,g,h)}{D(x,y,z)}=0 \quad \text{olur.}$$

O halde $u = f(x,y,z)$ fonksiyonunun $g(x,y,z)=0$ ve $h(x,y,z)=0$ bağıntıları altındaki ekstremum noktaları;

$$\left.\begin{aligned} & g(x,y,z)=0 \\ & h(x,y,z)=0 \\ & \frac{D(f,g,h)}{D(x,y,z)}=0 \end{aligned}\right\}$$ denklem sisteminin çözümüyle bulunur.

Lagrange çarpanları yöntemiyle ise; λ ve μ birer parametre olmak üzere

$$H(x,y,z,\lambda,\mu)=f(x,y,z)+\lambda g(x,y,z)+\mu h(x,y,z)$$

şeklindeki beş değişkenli fonksiyonun ekstremum noktaları;

$$\left.\begin{aligned} & \frac{\partial H}{\partial x}=f'_x+\lambda g'_x+\mu h'_x=0 \\ & \frac{\partial H}{\partial y}=f'_y+\lambda g'_y+\mu h'_y=0 \\ & \frac{\partial H}{\partial z}=f'_z+\lambda g'_z+\mu h'_z=0 \\ & \frac{\partial H}{\partial \lambda}=g(x,y,z)=0 \\ & \frac{\partial H}{\partial \mu}=h(x,y,z)=0 \end{aligned}\right\}$$ sisteminin çözümüyle elde edilir.

Ör/ $2x+y-z=0$ ve $xy+2z=24$ koşulları altında $f(x,y,z)=xyz$ fonksiyonunun ekstremum noktalarını bulunuz.

$$\left.\begin{array}{l} g(x,y,z)=2x+y-z \\ h(x,y,z)=xy+2z-24=0 \end{array}\right\} H(x,y,z,\lambda,\mu)=xyz+\lambda(2x+y-z)+\mu(xy+2z-24)$$

$$\frac{\partial H}{\partial x}=yz+2\lambda+\mu y=0 \Rightarrow 2\lambda=-yz-\mu y \Rightarrow \lambda=-\frac{1}{2}yz-\frac{1}{2}\mu y$$

$$\frac{\partial H}{\partial y}=xz+\lambda+\mu x=0 \Rightarrow \lambda=-xz-\mu x$$

$$\frac{\partial H}{\partial z}=xy-\lambda+2\mu=0 \Rightarrow \lambda=xy+2\mu$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda}=2x+y-z=0$$

$$\frac{\partial H}{\partial \mu}=xy+2z-24=0$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}yz-\frac{1}{2}\mu y=-xz-\mu x=xy+2\mu$$

$$yz+\mu y=2xz+2\mu x=-2xy-4\mu$$

$$yz+\mu y=2xz+2\mu x$$

$$\mu y-2\mu x=2xz-yz$$

$$\mu=\frac{2xz-yz}{y-2x} \quad \cdot 1$$

$$2xz+2\mu x=-2xy-4\mu$$

$$2xz+2xy=-2\mu x-4\mu$$

$$\mu=\frac{2xz+2xy}{-2(x+2)} \quad \cdot 2$$

$$yz + \mu y = -2xy - 4\mu$$

$$yz + 2xy = -4\mu - \mu y$$

$$\mu = \frac{yz + 2xy}{-(y+4)} \qquad \cdot 3$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2xz - yz}{y - 2x} = \frac{2xz + 2xy}{\cancel{-}2(x+2)} = \frac{yz + 2xy}{\cancel{-}(y+4)}$$

$x = -6 \Rightarrow y = -12 \Rightarrow z = \frac{(-6)(-12)}{2} = 36$

$x = 2 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow z = \frac{2 \cdot 4}{2} = 4$

$A(2, 4, 4)$

$B(-6, -12, 36)$