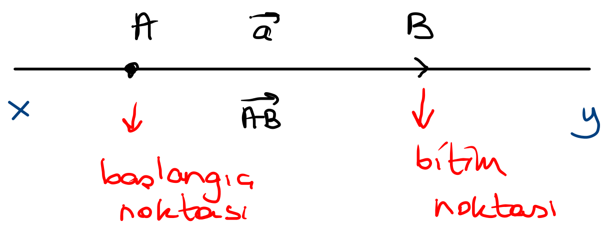
Vektörler

Yönlendirilmiş doğru parçasına vektör denir.



$xy \to$ doğrultusu

A'dan B'ye yönü

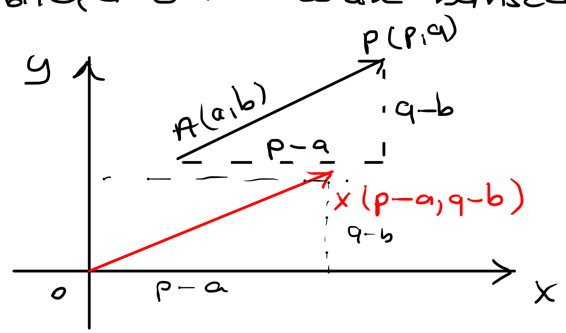
$|\vec{AB}| = |\vec{a}| \to$ uzunluğu

Aynı yönlü ve büyüklükteki herhangi bir yönlenmiş doğru parçası aynı vektörü temsil eder.

Herhangi iki $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ vektörü aynı uzunluk ve yöne sahip ise eşit kabul edilirler.

Düzlem vektörleri

Eğer kartezyen koordinat sistemini düzlemde alırsak; o zaman x ve y'den herhangi bir vektörün bileşenleri olarak bahsedebiliriz.



Eğer A(a, b) ve P(p, q) noktaları ile $\vec{AP}$ vektörü oluşturulursa bu vektörün bileşenleri sırasıyla $\langle p-a, q-b \rangle$ dır.

Eğer O orjin ve X (p−a, q−b) noktası ise o zaman

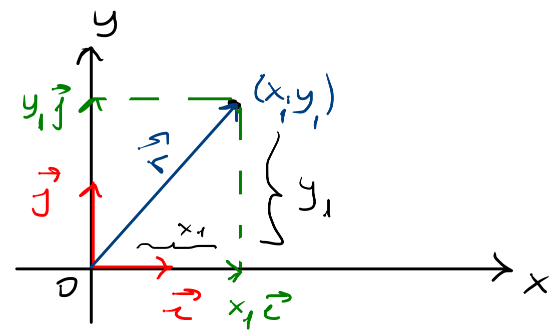
$|\vec{AP}| = \sqrt{(p-a)^2 + (q-b)^2} = |\vec{OX}|$ $\quad$ $\vec{AP}$ nin eğimi ; $\frac{q-b}{p-a}$.

Aynı zamanda $\vec{OX}$'nde eğimidir. $\vec{AP} = \vec{OX}$

Genel olarak iki vektörün eşit olması için gerek ve yeter koşul onların bileşenlerinin aynı olmasıdır.

Orjinden başlayan ve (x_1, y_1) noktasında sona eren $\vec{r} = \langle x_1, y_1 \rangle$ vektörüne (x_1, y_1) noktasının yer vektörü veya konum vektörü denir.

$$|\vec{r}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

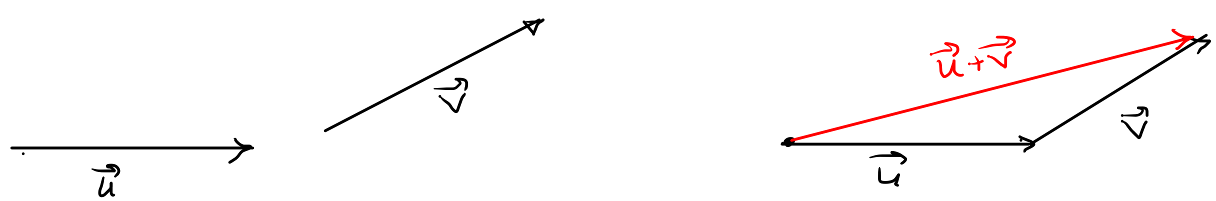


$$\vec{r} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$$

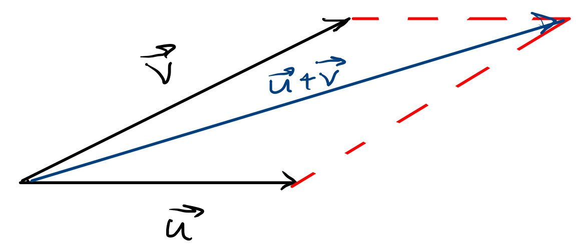
Vektörler için iki cebirsel işlem vardır.

1) Vektörlerin toplanması

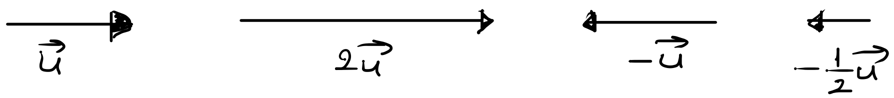
a) Üçgen kuralı



b) Paralel kenar kuralı



2) Vektörlerin bir skalerle çarpılması



Eğer bir $\vec{u}$ vektörü bir $t \in \mathbb{R}$ reel sayısı ile çarpılırsa o zaman $t.\vec{u}$ vektörü büyüklüğü $\vec{u}$ vektörünün $|t|$ katı olan ve

$t>0 \Rightarrow \vec{u}$ ile aynı yönde

$t<0 \Rightarrow \vec{u}$ ile ters yönde

olan bir vektördür.

$t=0 \Rightarrow |t.\vec{u}| = 0$'dır. $t.\vec{u}$'nun bir yönü yoktur ve $t.\vec{u}=\vec{0}$ sıfır vektör denir.

Teorem: $\vec{x}, \vec{y}$ ve $\vec{z}$ üç vektör, λ ve μ iki skaler olmak üzere

1) $\vec{x}+(\vec{y}+\vec{z}) = (\vec{x}+\vec{y})+\vec{z}$

2) $\vec{x}+\vec{y} = \vec{y}+\vec{x}$

3) $\lambda(\mu\vec{x}) = (\lambda\mu)\vec{x} = \mu(\lambda\vec{x})$

4) $(\lambda+\mu)\vec{x} = \lambda\vec{x}+\mu\vec{x}$

5) $\lambda(\vec{x}+\vec{y}) = \lambda\vec{x}+\lambda\vec{y}$

6) $1.x = \vec{x}$, $0.\vec{x} = \vec{0}$ $\quad (-1).\vec{x} = -\vec{x}$

Bir vektörün uzunluğu (modülü veya normu) düzlemdeki iki nokta arasındaki uzaklık formülüyle kolayca tanımlanabilir.

Bileşenleri $\langle x, y\rangle$ olan bir $\vec{u}$ vektörünün uzunluğu $|\vec{u}| = \sqrt{x^2+y^2}$ sayısıdır.

Özellikleri :

1). $|\vec{u}| \geq 0$ ve $|\vec{u}| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = 0$

2) $|\lambda \vec{x}| = |\lambda| . |\vec{x}|$

3) $|\vec{x}+\vec{y}| \leq |\vec{x}| + |\vec{y}|$

Uzunluğu bir olan vektörlere birim vektör denir.

Eğer $\vec{u} \neq 0$ ise bir $\vec{u}_x$ vektörü $\vec{u}$ ile aynı yönde ve $\vec{u}_x = \dfrac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$ olan bir birim vektördür.

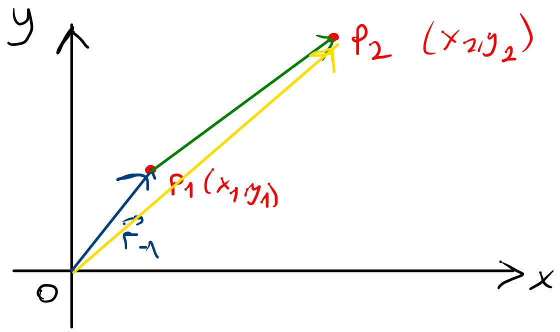
$$\left.\begin{array}{l} \vec{i} = (1,0) \\ \vec{j} = (0,1) \end{array}\right\}$$ olan kartezyen baz vektörleridir.

Her vektör, standart baz vektörleri cinsinden ifade edilebilir.

$$\vec{r} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} = x_1 . \langle 1,0\rangle + y_1 . \langle 0,1\rangle$$

$P_1(x_1, y_1)$

$P_2(x_2, y_2)$



$\overrightarrow{OP_1} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$

$\overrightarrow{OP_2} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$

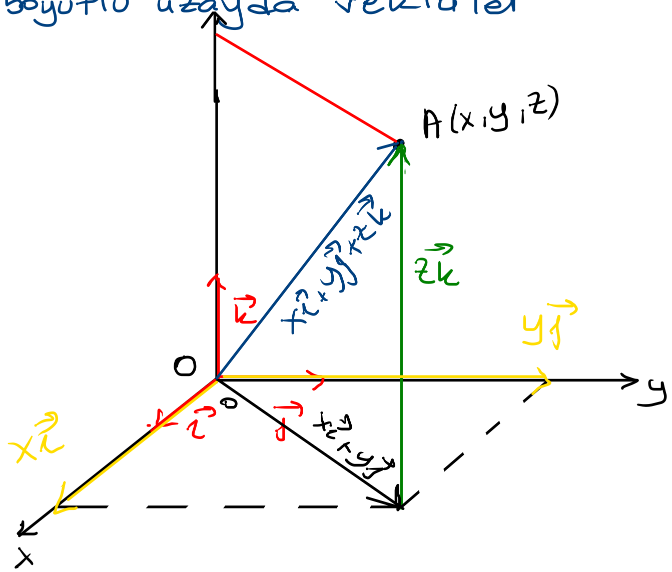
$\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2}$

$(x_1\vec{i} + y_1\vec{j}) + \overrightarrow{P_1P_2} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$

$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2\vec{i} + y_2\vec{j}) - (x_1\vec{i} + y_1\vec{j})$

$= (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j}$

Üç boyutlu uzayda vektörler



Üç boyutlu uzayda bir kartezyen koordinat sistemi verildiğinde sırasıyla orjinden $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ noktalarına olan, üç standart baz vektörü $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ tanımlanarak uzaydaki herhangi bir vektör bu baz vektörlerinin Lineer kombinasyonu olarak ifade edilebilir. Örneğin; $A(x, y, z)$ noktasının yer vektörü $\overrightarrow{OA} = \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ dır.

$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$P_1(x_1, y_1, z_1)$ ve $P_2(x_2, y_2, z_2)$ üç boyutlu uzayda iki nokta ise o zaman P_1 den P_2'ye olan $\overrightarrow{P_1P_2}$ vektörünün bileşenleri $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$, $z_2 - z_1$ olur. Yani $\vec{v} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$ şeklindedir.

n-boyutlu uzayda vektörler

$\mathbb{R}^n$'de standart baz vektörleri

$$\vec{e}_1 = (1,0,0,\dots,0)$$
$$\vec{e}_2 = (0,1,0,\dots,0)$$
$$\vdots$$
$$\vec{e}_n = (0,0,0,\dots,1)$$

olmak üzere yine $\mathbb{R}^n$'de bir vektör bu standart baz vektörlerinin Lineer kombinasyonu olarak ifade edilir.

$A(x_1,x_2,\dots,x_n)$ noktasının yer vektörü $\overrightarrow{OA} = \vec{r} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \dots + x_n\vec{e}_n$ şeklindedir ve uzunluğu

$$|\vec{r}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

ile hesaplanır.

Skaler Çarpım (Nokta Çarpım)

Düzlemde veya herhangi boyuttan bir uzayda gözönüne alınan iki vektörün skaler çarpımı, onların karşılıklı bileşenlerinin çarpımlarının toplamı olarak tanımlanır.

Düzlemde $\rightarrow$ $\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j}$ $\quad \vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} \Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2$

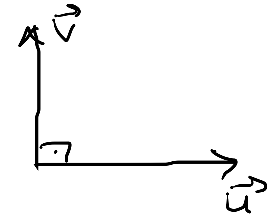
3-boyutlu uzayda $\longrightarrow$ $\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$ $\quad$ $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$$

Skaler çarpımın sonucu daima bir sayıdır.

Teorem: Eğer θ $(0 \leq \theta \leq \pi)$ $\vec{u}$ ile $\vec{v}$ 'nün yönleri arasındaki açı ise o zaman

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos\theta$$



$\theta \to 90^\circ = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \quad \vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{u} \perp \vec{v}$

Skaler çarpımın özellikleri

1) $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$
2) $\vec{u}\,(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}$
3) $t\,(\vec{u}\cdot\vec{v}) = (t\vec{u})\cdot\vec{v} = \vec{u}\,(t\cdot\vec{v})$
4) $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = 0$
5) $\vec{u}\cdot\vec{u} = |\vec{u}|^2$
6) $|\vec{u}\cdot\vec{v}| \leq |\vec{u}|.|\vec{v}|$ (Schwarz eşitsizliği)
7) $|\vec{u}+\vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}|$ (üçgen eşitsizliği)
8) $\vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow |\vec{u}+\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2$ (Pisagor bağıntısı)

Ör/ $\left.\begin{aligned} \vec{u} &= 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k} \\ \vec{v} &= 3\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$ $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ vektörleri arasındaki açıyı bulunuz.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| . |\vec{v}| . \cos\theta$$

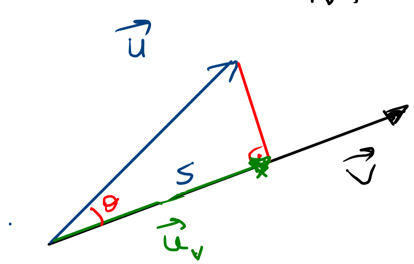
$$6 - 2 + 2 = \left(\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}\right) . \left(\sqrt{3^2 + (-2)^2 + (-1)^2}\right) . \cos\theta$$

$$6 = 3.\sqrt{14} . \cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{2}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{14}}{7} \Rightarrow \theta = \arccos\left(\frac{\sqrt{14}}{7}\right)$$

Ör/ NOT: (Skaler ve vektörel izdüşüm)

Bir $\vec{u}$ vektörünün sıfırdan farklı bir $\vec{v}$ vektörü yönündeki skaler izdüşümü s, $\vec{u}$ ile $\vec{v}$ yönündeki bir birim vektörün skaler çarpımıdır.

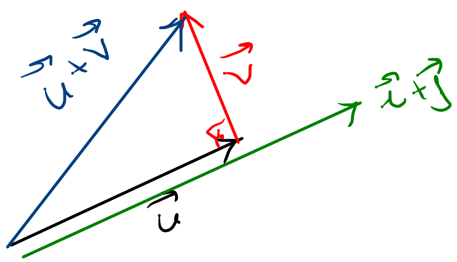
$$s = \vec{u} . \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = |\vec{u}| . \cos\theta$$



Bir $\vec{u}$ vektörünün $\vec{v}$ yönündeki vektör izdüşümü $\vec{u}_v$, $\vec{v}$ vektörü yönündeki bir birim vektörün skaler katıdır.

$$\vec{u}_v = s . \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \vec{u} . \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} . \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

$3\vec{i}+\vec{j}$ vektörünü, $\vec{u}$ vektörü $\vec{i}+\vec{j}$ vektörüne paralel ve $\vec{v}$ vektörü $\vec{u}$'ya dik olmak üzere $\vec{u}+\vec{v}$ vektörlerinin toplamı olarak ifade ediniz.



$$\vec{u} \parallel \vec{i}+\vec{j} \qquad \vec{v} \perp \vec{u} \qquad \vec{u}+\vec{v} = 3\vec{i}+\vec{j}$$

$\vec{u}$ vektörü $3\vec{i}+\vec{j}$ vektörünün $\vec{i}+\vec{j}$ vektörü üzerine vektör izdüşümü olmalıdır.

$$\vec{u} = (3\vec{i}+\vec{j}) \cdot \frac{\vec{i}+\vec{j}}{|\vec{i}+\vec{j}|} \cdot \frac{\vec{i}+\vec{j}}{|\vec{i}+\vec{j}|}$$

$$= \frac{3+1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{(\vec{i}+\vec{j})}{\sqrt{2}} = 2\vec{i}+2\vec{j} = 2(\vec{i}+\vec{j})$$

$$\vec{u}+\vec{v} = 3\vec{i}+\vec{j} \Rightarrow (2\vec{i}+2\vec{j})+\vec{v} = 3\vec{i}+\vec{j}$$

$$\vec{v} = (3\vec{i}+\vec{j}) - (2\vec{i}+2\vec{j})$$

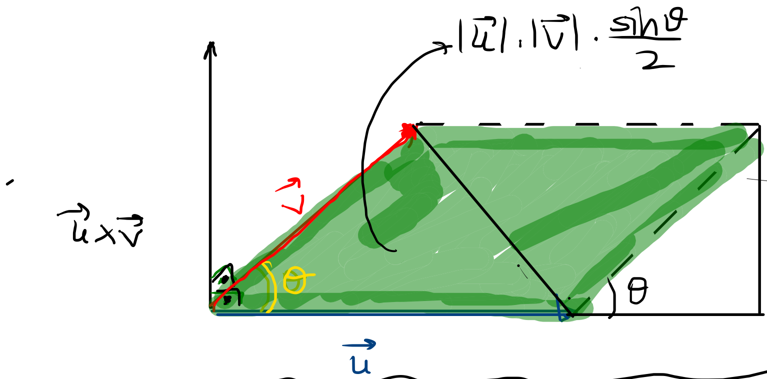
$$\vec{v} = \vec{i}-\vec{j}$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = (2\vec{i}+2\vec{j})(\vec{i}-\vec{j}) = 2-2=0 \qquad \vec{u}\perp\vec{v} \quad \checkmark$$

Vektörel Çarpım

Vektörel çarpım $\mathbb{R}^3$'deki iki vektörü çarpmanın diğer bir yoludur. $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ vektörleri paralel değillerse bir düzlem belirlerler $\vec{u} \times \vec{v}$ ile göstereceğimiz vektör bu düzleme dik bir vektördür.

- Sadece $\mathbb{R}^3$'de geçerli bir çarpım
- Sonuç daima bir vektördür.



Tanım: $\mathbb{R}^3$'deki herhangi $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ vektörleri için $\vec{u} \times \vec{v}$ vektörel çarpımı aşağıdaki koşulları sağlayan tek vektördür:

1°) $(\vec{u} \times \vec{v}).\vec{u} = 0$, $(\vec{u} \times \vec{v}).\vec{v} = 0$

2°) $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}|.|\vec{v}|.\sin\theta$ (θ, $\vec{u}$ ile $\vec{v}$ arasındaki açı)

3°) $\vec{u}$, $\vec{v}$ ve $\vec{u} \times \vec{v}$ sağ el ile belirlenen bir üçlü oluşturur.

$\vec{u} \times \vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{u} \parallel \vec{v}$

Özellikleri

1°) $\vec{u} \times \vec{u} = 0$

2°) $\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$

3°) $(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = (\vec{u} \times \vec{w}) + (\vec{v} \times \vec{w})$

4°) $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) + (\vec{u} \times \vec{w})$

5°) $(t\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (t\vec{w}) = t.(\vec{u} \times \vec{w})$

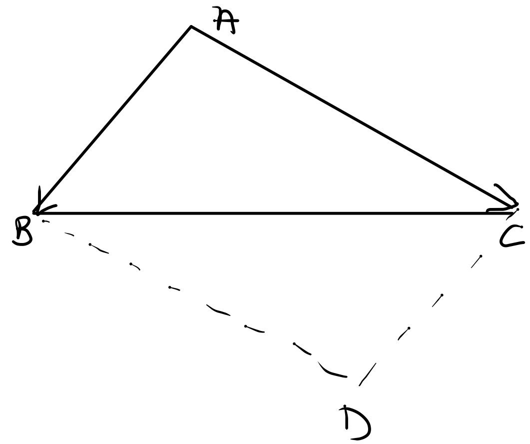
6°) $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$, $\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$
$\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$

7) $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) \neq (\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$

8) $|\vec{u} \times \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 \cdot |\vec{v}|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2$

9) $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| . |\vec{v}| . \sin\theta$ olduğundan $\vec{u}$ ve $\vec{v}$'nin belirlediği düzlemin alanını verir. (paralel kenarın alanı)

Ör/ köşeleri $A(2,1,3)$, $B(1,0,2)$, $C(5,-1,2)$ olan $A\hat{B}C$ üçgeninin alanını bulunuz.



$$A(A\hat{B}C) = \frac{1}{2} A(ABCD) = \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right|$$

$$\overrightarrow{AB} = (1-2)\vec{i} + (0-1)\vec{j} + (2-3)\vec{k}$$
$$= -\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$$

$$\overrightarrow{AC} = (5-2)\vec{i} + (-1-1)\vec{j} + (2-3)\vec{k}$$
$$= 3\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$
$$= -\vec{i} - 4\vec{j} + 5\vec{k}$$

$$A(A\hat{B}C) = \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right| = \frac{1}{2} \sqrt{1 + 16 + 25} = \frac{1}{2}\sqrt{42}$$

Karışık Çarpım (Karma Çarpım)

Herhangi $\vec{u}, \vec{v}$ ve $\vec{w}$ gibi üç vektör için $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})$ büyüklüğüne $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ vektörlerinin karışık çarpımı denir.

$$\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

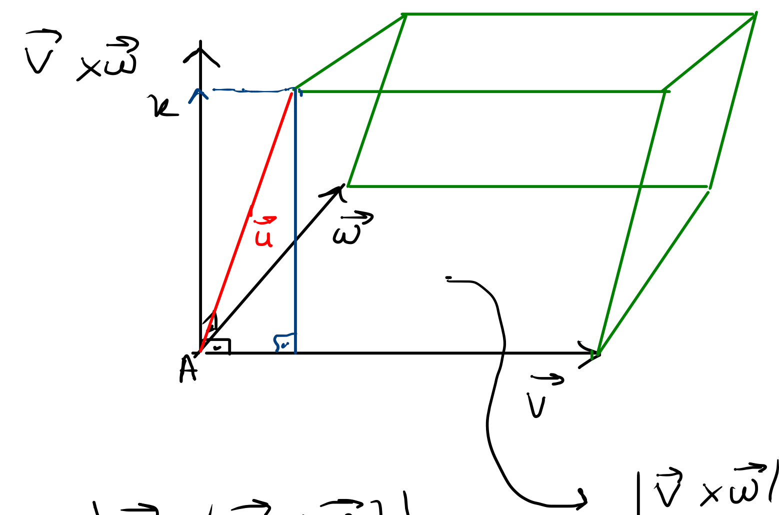
Teorem $\vec{u}, \vec{v}$ ve $\vec{w}$ vektörleri ile oluşmuş paralel yüzlünün hacmi $|\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})|$ dır.

Özellikleri

1°) $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w}) = \vec{v}\cdot(\vec{w}\times\vec{u}) = \vec{w}\cdot(\vec{u}\times\vec{v})$

2°) $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w}) = -\vec{u}\cdot(\vec{w}\times\vec{v})$

3°) $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w}) = 0$ ise üç vektör aynı düzlemdedir.



$$V = \underset{\text{yükseklik}}{h} \cdot \underset{\text{taban alanı}}{S}$$

$$= \underbrace{\vec{u}\cdot\frac{\vec{AK}}{|\vec{AK}|}}_{h} \cdot \underbrace{|\vec{v}\times\vec{w}|}_{S} = |\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})|$$

Ör/ kenarları

$\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$

$\vec{b} = -\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$

$\vec{c} = 4\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$

vektörleri ile belirtilen paralel yüzlünün hacmini bulunuz.

$$\vec{a}.(\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2.(-1)^{1+1}. \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 2.(-2-2)$$

$$= -8$$

$$V = |\vec{a}.(\vec{b} \times \vec{c})| = |-8| = 8 \text{ br}^3$$