Üstel ve Logaritmik Fonksiyon

Üstel fonk:

$a>0$ ve $a \neq 1$ olmak üzere $y=a^x$ şeklindeki fonksiyonlara üstel fonksiyon denir.
x'in her değeri için tanımlı fonksiyonlardır. $D(f)=\mathbb{R}$

$0<a<1$ için $y=a^x$ azalan

$a>1$ için $y=a^x$ artan

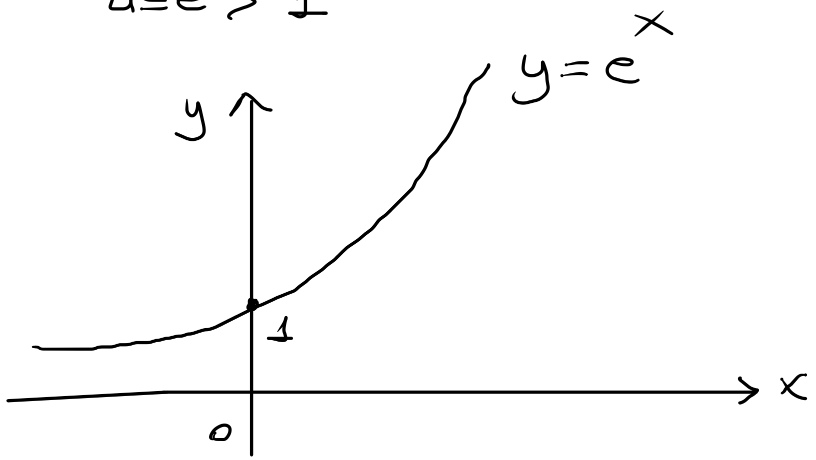
$a=\frac{1}{3}$ $\quad y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$

$x=0 \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^0=1$

$x=1 \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^1=\frac{1}{3}$

$x \to \infty \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^\infty = 0$

$a=e>1$



$a=3$ $\quad y=3^x$

$x=0 \Rightarrow 3^0=1$

$x=1 \Rightarrow 3^1=3$

$x \to \infty \Rightarrow 3^\infty=\infty$

$R(f): (0,\infty)$

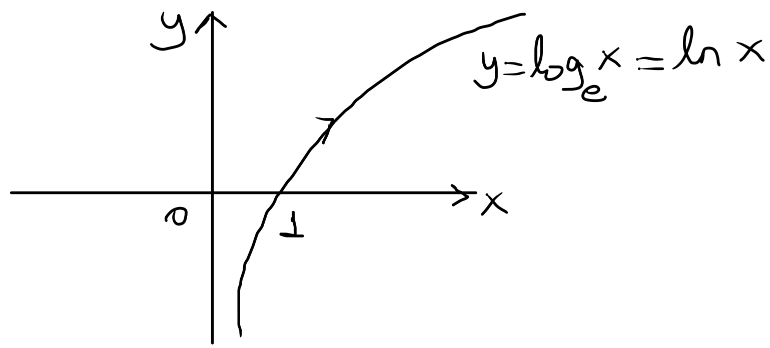
Logaritma fonk:

$a>0$ ve $a \neq 1$ olmak üzere $y=\log_a x$ fonksiyonuna logaritma fonksiyonu denir. Tanım kümesi $D(f)=(0,\infty)$'dur. $R(f)=\mathbb{R}$

$0<a<1$ için $y=\log_a x$ azalan

$a>1$ için $y=\log_a x$ artan bir fonksiyondur.

$a=e>1$



Özellikleri:

$x>0$, $y>0$, $a>0$, $b>0$, $a\neq 1$, $b \neq 1$ olmak üzere

1°) $\log_a x + \log_a y = \log_a (x \cdot y)$,

2°) $\log_a x - \log_a y = \log_a \left(\frac{x}{y}\right)$

3°) $\log_a 1 = 0$

4°) $\log_a a = 1$

5°) $\log_a \left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a x$

6°) $\log_a (x^y) = y \log_a x$

7°) $\log_a \infty = \infty$

8°) $\log_a 0 = -\infty$

9°) $\log_a b = \dfrac{\log_x b}{\log_x a}$ 11°) $a^x = e^{x.\ln a}$ 13°) $\ln e^x = x$

10°) $a^{\log_a x} = x$ 12°) $e^{\ln x} = x$ 14°) $\log_a a^x = x$

Hiperbolik Fonksiyonlar

Herhangi x reel sayısı için hiperbolik sinüs $(\sinh x)$ ve hiperbolik kosinüs $(\cosh x)$ fonksiyonları

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad D(\sinh x) = \mathbb{R}, \quad D(\cosh x) = \mathbb{R}$$

şeklinde tanımlanmış fonksiyonlardır.

Bu fonksiyonlara hiperbolik denmesinin sebebi, herhangi t için $(\overset{x}{\cosh t}, \overset{y}{\sinh t})$ noktasının $x^2 - y^2 = 1$ hiperbolü üzerinde olmasından dolayıdır.

Bu tanımlara göre; $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1 \quad t \in \mathbb{R}$

$\cosh 0 = 1 \qquad \sinh 0 = 0$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \qquad D(\tanh x) = \mathbb{R}$$

$\cosh(-x) = \cosh x$ çift fonk.

$\sinh(-x) = -\sinh x$ tek fonk.

$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \qquad D(\coth x) = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^{x}+e^{-x}} \qquad \operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^{x}-e^{-x}}$$

$D(\operatorname{sech} x) = \mathbb{R}$ $\qquad$ $D(\operatorname{csch} x) = \mathbb{R}-\{0\}$

$$\boxed{\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1}$$

$$\cosh(x\mp y) = \cosh x \cdot \cosh y \mp \sinh x \sinh y$$

$$\sinh(x\mp y) = \sinh x \cdot \cosh y \mp \cosh x \cdot \sinh y$$

$$\cosh(2x) = \cosh^2 x + \sinh^2 x = 2\cosh^2 x - 1 = 1 + 2\sinh^2 x$$

$$\sinh(2x) = 2\sinh x \cdot \cosh x$$

$$1-\tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$$

$$1-\left(\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}\right)^2 = \frac{(e^{x}+e^{-x})^2-(e^{x}-e^{-x})^2}{(e^{x}+e^{-x})^2}$$

$$= \frac{(\cancel{e^{x}}+e^{-x}-\cancel{e^{x}}+e^{-x})(e^{x}+\cancel{e^{-x}}+e^{x}-\cancel{e^{-x}})}{(e^{x}+e^{-x})^2} = \frac{2e^{-x}\cdot 2e^{x}}{(e^{x}+e^{-x})^2} = \frac{4}{(e^{x}+e^{-x})^2} = \left(\frac{2}{e^{x}+e^{-x}}\right)^2 = \operatorname{sech}^2 x$$

$$1-\coth^2 x = \operatorname{csch}^2 x$$

$$\cos(x\mp y) = \cos x \cos y \pm \sin x \sin y$$

$$\sin(x\mp y) = \sin x \cos y \mp \cos x \sin y$$

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$
$$= 1 - 2\sin^2 x$$
$$= 2\cos^2 x - 1$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$1+\tan^2 x = \sec^2 x$$

$$1+\cot^2 x = \csc^2 x$$

Ters Hiperbolik Fonksiyonlar

- sinhx ve tanhx fonksiyonları tüm reel eksende tanımlı 1-1 fonksiyonlardır. Dolayısıyla tersleri mevcuttur.

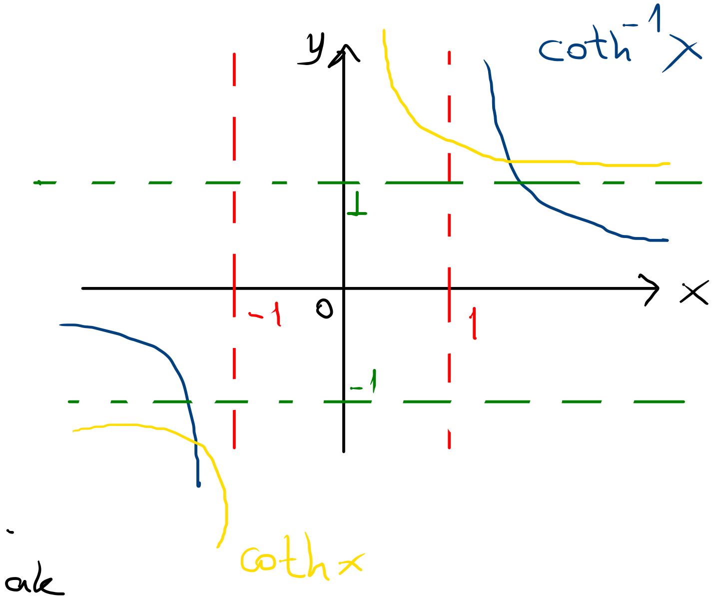
$$y=\sinh^{-1}x \Leftrightarrow x=\sinh y \;, \quad \forall y\in\mathbb{R}$$

$$y=\tanh^{-1}x \Leftrightarrow x=\tanh y \;, \quad \forall y\in\mathbb{R}$$

- cothx ve cschx fonksiyonları $\mathbb{R}-\{0\}$ kümesinde tanımlı 1-1 fonksiyonlardır. Dolayısıyla bu kümede tersleri vardır.

$$y=\coth^{-1}x \Leftrightarrow x=\coth y \;, \quad \forall y\in\mathbb{R}-\{0\}$$

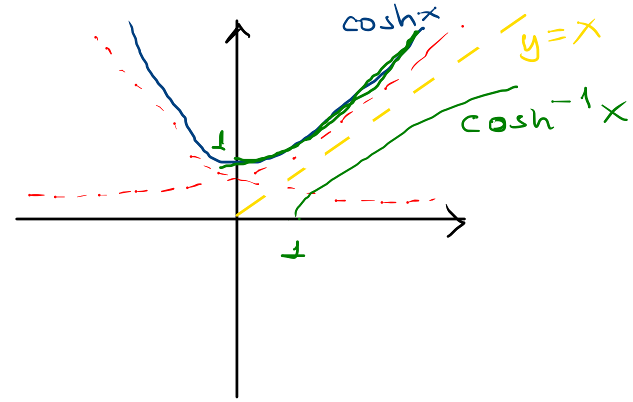
$$y=\operatorname{csch}^{-1}x \Leftrightarrow x=\operatorname{csch} y \;, \quad \forall y\in\mathbb{R}-\{0\}$$



- coshx ve sech x fonksiyonları ise tüm reel eksende tanımlı olmalarına karşın 1-1 fonksiyonlar değildirler. Dolayısıyla tanım kümeleri $[0,\infty)$ aralığına kısıtlanmak suretiyle 1-1 hale getirilebilirler ve bu durumda tersleri mevcut olur.

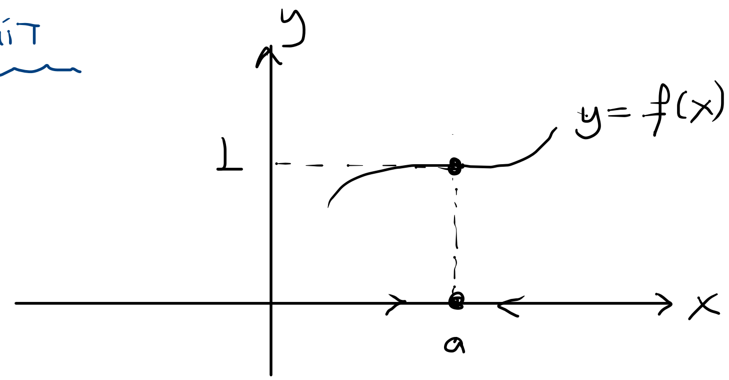
$y=\cosh^{-1}x \iff x=\cosh y, \quad \forall y\in[0,\infty)$

$y=\mathrm{sech}^{-1}x \iff x=\mathrm{sech}\,y, \quad \forall y\in[0,\infty)$



LİMİT ve SÜREKLİLİK

LİMİT



x bağımsız değişkeni, a sbt olmak üzere a'dan farklı ve a sayısına istenildiği kadar yakın değerler alıyorsa (Başka bir deyişle x ile a arasındaki fark x değiştiğinde istenildiği kadar küçük pozitif bir sayıdan daha küçük kalıyorsa yani $|x-a|<\delta$ ($\delta>0$) oluyorsa) ve buna karşılık f(x)'nde a noktası yakınındaki her x için tanımlı olmak üzere (a'da tanımlı olmayabilir) L gibi bir değere istediğimiz kadar yakın olmasını sağlayabiliyorsak x a'ya yaklaşırken f(x) de L limitine yaklaşır deriz.

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ şeklinde gösterilir.

Ör/1. $\lim_{x\to a} x = a$

2- $\lim_{x\to a} c = c$

* Fonksiyonun (f(x)) x=a noktasını içeren bir açık aralıkta tanımlı olması ve grafiğinin herhangi bir kırılma (kopma) olmadan (a, f(a)) noktasından geçmesi halinde

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

dır.

* Eğer f(x) fonksiyonu x=a da tanımlı değilse o zaman uygun cebirsel işlemler yapılarak limit hesaplanabilir.

* f(x) fonksiyonu x=a'da tanımlı olmadığı gibi limiti de olmayabilir.

$y = \frac{1}{\sin x}$ $x=\pi$'de tanımsız.

$\lim_{x\to\pi} \frac{1}{\sin x} \to \infty$ limit mevcut değil.

Örnekler.

1) $$\lim_{x\to -2} \frac{x^2+x-2}{x^2+5x+6} = \frac{(-2)^2+(-2)-2}{(-2)^2+5(-2)+6} = \frac{4-2-2}{4-10+6} = \frac{0}{0}$$

$\boxed{(x+2)}$

$$= \lim_{x\to -2} \frac{\cancel{(x+2)}(x-1)}{\cancel{(x+2)}(x+3)} = \lim_{x\to -2} \frac{x-1}{x+3} = \frac{-2-1}{-2+3} = \frac{-3}{1} = -3$$

2) $$\lim_{x\to a} \frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{a}}{x-a} = \frac{0}{0}$$

$x-a$

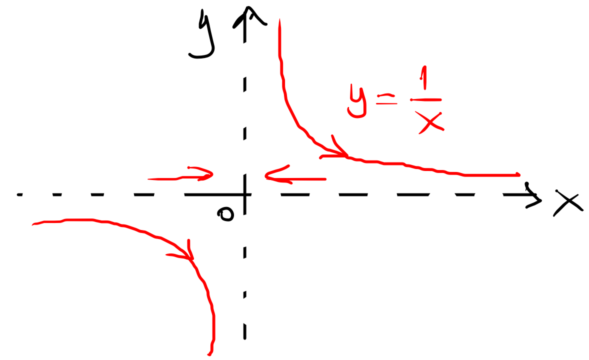
$$= \lim_{x\to a} \frac{\frac{a-x}{xa}}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{-\cancel{(x-a)}}{\cancel{(x-a)}\cdot x\cdot a} = \lim_{x\to a} \frac{-1}{x\cdot a} = \frac{-1}{a^2}$$

3) $$\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x^2-16} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x\to 4} \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}+2)(x^2-16)} = \lim_{x\to 4} \frac{\cancel{x-4}}{(\sqrt{x}+2)\cancel{(x-4)}(x+4)} = \lim_{x\to 4} \frac{1}{(\sqrt{x}+2)(x+4)} = \frac{1}{32}$$

NOT: Bir $f(x)$ fonksiyonu $x=a$ noktasının her iki yanında tanımlı olmasına karşın bu noktada limite sahip olmayabilir.

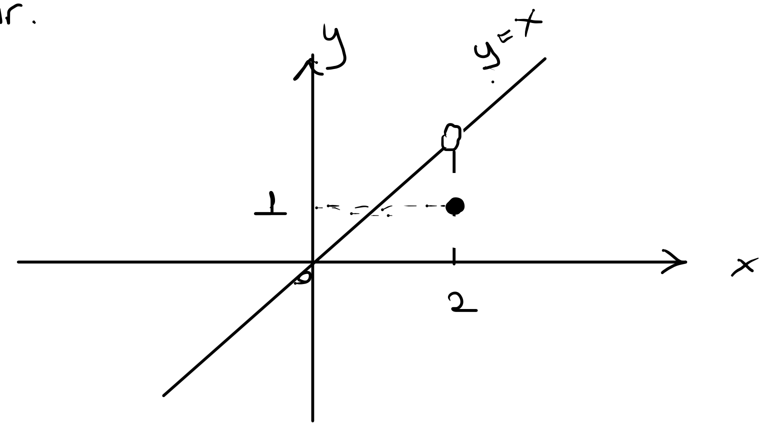
$y=\frac{1}{x}$ $\qquad D(f): \mathbb{R}-\{0\}$



$\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}$ → mutlak değerce $\frac{1}{x}$ büyür.
Belli bir L değeri söz konusu değildir.

NOT: Bir $f(x)$ fonksiyonu $x=a$ noktasında tanımlı olabilir ancak x a'ya yaklaşırken limit değeri $f(a)$'ya eşit olmayabilir.

$$f(x)=\begin{cases} x & x\neq 2 \\ 1 & x=2 \end{cases}$$



$$\lim_{x\to 2} f(x)=2 \neq f(2)=1$$

Sağ - Sol Limitler (Kenar limitler)

Sol limit : f(x) fonksiyonu a'nın solundaki bir (b,a) aralığında tanımlı ve x'i a'nın solundan a'ya yeterince yakın alarak, f(x)'in L'ye istediğimiz kadar yakın olmasını sağlayabiliyorsak f(x) x=a'da sol limite sahiptir deriz.

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L$$

şeklinde gösterilir.

Sağ limit : f(x) fonksiyonu a'nın sağındaki bir (a,b) aralığında tanımlı ve x'i a'nın sağından a'ya yeterince yakın alarak f(x)'in M'ye istediğimiz kadar yakın olmasını sağlayabiliyorsak f(x) x=a'da sağ limite sahiptir deriz.

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = M$$

şeklinde gösterilir.

Ör/

$$\operatorname{sgn}(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, & x>0 \\ -1, & x<0 \\ \text{Tanımsız} & x=0 \end{cases}$$

x→0 sağ ve sol limitini bulunuz.

$$\lim_{x\to 0^-} \operatorname{sgn}(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$$

$$\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sgn}(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$$

Ör/ $f(x)=\dfrac{|x-2|}{x^2+x-6}$ $x=2$'de sağ ve sol limitlerini bulalım.

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{-(x-2)}{x^2+x-6} \overset{0}{\underset{0}{=}} \lim_{x\to 2}\frac{-\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(x+3)}=\lim_{x\to 2}\frac{-1}{x+3}=-\frac{1}{5}$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2+x-6} \overset{0}{\underset{0}{=}} \lim_{x\to 2}\frac{\cancel{x-2}}{\cancel{(x-2)}(x+3)}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x+3}=\frac{1}{5}$$

TEOREM: Bir $f(x)$ fonksiyonunun bir $x=a$ noktasında L limitine sahip olması için gerek ve yeter koşul $x=a$ noktasında sağ ve sol limitlerinin mevcut ve birbirine eşit olmasıdır.

Buna göre verilen son örnekte $\text{sgn}(x)=\dfrac{|x|}{x}$ $x=0$'da, ve $f(x)=\dfrac{|x-2|}{x^2+x-6}$ fonksiyonu $x=2$'de limite sahip değildir.

Limit kuralları

Eğer $\lim_{x\to a} f(x)=L$, $\lim_{x\to a} g(x)=M$ ve k bir sabit ise;

1°) Limit varsa tektir.

2°) $\lim_{x\to a}\left[f(x)\mp g(x)\right]=\lim_{x\to a} f(x)\mp\lim_{x\to a} g(x)=L\mp M$

3°) $\lim\limits_{x\to a} [k.f(x)] = k.\lim\limits_{x\to a} f(x) = k.L$

4°) $\lim\limits_{x\to a} [f(x).g(x)] = [\lim\limits_{x\to a} f(x)].[\lim\limits_{x\to a} g(x)] = L.M$

5°) $\lim\limits_{x\to a} \left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{[\lim\limits_{x\to a} f(x)]}{[\lim\limits_{x\to a} g(x)]} = \dfrac{L}{M}$ ($\lim\limits_{x\to a} g(x) = M \neq 0$ olması koşuluyla)

6°) $m \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ olsun. Eğer n çift iken $L > 0$ ise ve $m < 0$ iken $L \neq 0$ ise

$$\lim_{x\to a} [f(x)]^{m/n} = L^{m/n} \text{ 'dir.}$$

7°) Eğer a noktasını içeren bir aralık üzerinde (a 'noktası aralığın herhangi bir uç noktası olmayacak) $f(x) \leq g(x)$ ise

$$\lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} g(x) \Rightarrow L \leq M \text{ 'dir.}$$

8°) (Sandviç teoremi) a noktasını içeren bir açık aralıktaki tüm x'ler için $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ ($x=a$'da olmayabilir) olduğunu kabul edelim. Ve $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = L$ olsun.

O zaman $\lim_{x\to a} g(x) = L$'dir.

- Verilen tüm kurallar sağ – sol limitler için de geçerlidir.
- Limit kuralları belirsizlik söz konusu olmadığında da geçerlidir.

Ör/ $\lim_{x\to a} |f(x)| = 0$ ise $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ olduğunu gösteriniz.

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$$

$$\lim_{x\to a} |f(x)| = 0 \Rightarrow \lim_{x\to a} -|f(x)| = -\lim_{x\to a} |f(x)| = 0$$

$\lim_{x\to a} -|f(x)| = \lim_{x\to a} |f(x)| = 0$ olduğundan sandviç teoremine göre $\lim_{x\to a} f(x) = 0$'dır.