Polinom ve Rasyonel Fonksiyonların limitleri

Polinom

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

$$\lim_{x \to c} P_n(x) = \lim_{x \to c} \left(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \right) = P_n(c)$$

Rasyonel Fonk

$P(x)$ ve $Q(x)$ herhangi polinomlar ve $Q(c) \neq 0$ olmak üzere

$$\lim_{x \to c} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \to c} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0} = \frac{P(c)}{Q(c)}$$

Eğer $P(c) = 0$, $Q(c) = 0$ ise cebirsel işlemler yapılır.

Sonsuzda Limitler

Pozitif sonsuzda limit.

$f(x)$ fonksiyonu bir (a, ∞) aralığında tanımlı ve x'i yeterince büyük alarak f'in L gibi bir değere istediğimiz kadar yakın olmasını sağlayabiliyorsak x, sonsuza yaklaşırken $f(x)$ de L limitine yaklaşır deriz. $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$

Negatif sonsuzda limit

f fonksiyonu $(-\infty, b)$ aralığında tanımlı ve x'i negatif ve mutlak değer olarak yeterince büyük alarak $f(x)$'in L gibi bir değere istediğimiz kadar yakın olmasını sağlayabiliyorsak x negatif sonsuza yaklaşırken $f(x)$ de L limitine yaklaşır deriz.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

şeklinde gösterilir.

Ör/ $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$

Ör/ $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x \to \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = 1$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \overset{-\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\cancel{x}}{-\cancel{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = -1$

$\lim\limits_{x \to \mp\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} =$
- $x \to \infty$ 1
- $x \to -\infty$ -1

NOT: Sadece sabit polinomlar ($P(x) = a_0$) $\mp\infty$'da limite sahiptirler.

- $\lim\limits_{x \to \mp\infty} P(x) = \lim\limits_{x \to \mp\infty} a_0 = a_0$

- $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$

$$\lim_{x \to \mp\infty} P(x) = \lim_{x \to \mp\infty} \left(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \right)$$

$$= \lim_{x \to \mp\infty} a_n x^n =$$

$$\lim_{x \to \infty} a_n x^n = \begin{cases} \infty & , \ a_n > 0 \\ -\infty & , \ a_n < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -\infty} a_n x^n = \begin{cases} \infty & , a_n > 0, \ n \text{ çift} \\ -\infty & , a_n > 0, \ n \text{ tek} \\ -\infty & , a_n < 0, n \text{ çift} \\ \infty & , a_n <, n \text{ tek} \end{cases}$$

Örnekler

1°) $\lim\limits_{x \to \mp\infty} (3x^3 - x^2 + 2)$

$\lim\limits_{x \to \infty} 3x^3 = \infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} 3x^3 = -\infty$

2°) $\lim\limits_{x \to \mp\infty} (x^4 - 5x^3 - x) = \lim\limits_{x \to \mp\infty} x^4 = \infty$

- $$\lim_{x\to\mp\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\lim_{x\to\mp\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\dots+b_1x+b_0}=\lim_{x\to\mp\infty}\frac{x^n\left(a_n+a_{n-1}\frac{1}{x}+\dots+a_1\frac{1}{x^{n-1}}+a_0\frac{1}{x^n}\right)}{x^m\left(b_m+b_{m-1}\frac{1}{x}+\dots+b_1\frac{1}{x^{m-1}}+b_0\frac{1}{x^m}\right)}$$

$$=\lim_{x\to\mp\infty}\frac{a_nx^n}{b_mx^m}=\begin{cases}\mp\infty\ (\text{limit yok}), & n>m \text{ ise}\\ \dfrac{a_n}{b_m}, & n=m \text{ ise}\\ 0, & n<m \text{ ise}\end{cases}$$

Ör/ $$\lim_{x\to\mp\infty}\frac{2x^2-x+3}{3x^2+5}=\frac{2}{3}$$

Ör/ $$\lim_{x\to\mp\infty}\frac{5x+2}{2x^3-1}=0$$

Ör/ $$\lim_{x\to\infty}\left[\sqrt{x^2+x}-x\right]\overset{\infty-\infty}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+x}-x)(\sqrt{x^2+x}+x)}{(\sqrt{x^2+x}+x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^2}+x-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+x}+x}$$

$$\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x})}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\left[\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right]}=\frac{1}{2}$$

NOT: (irrasyonel fonk'ların $\mp\infty$'da limiti)

$$\lim_{x\to\mp\infty}\sqrt{\underbrace{x^2+px+q}_{(x+\frac{p}{2})^2-\frac{p^2}{4}+q}} = \lim_{x\to\mp\infty}\left|x+\frac{p}{2}\right| = \begin{cases} x>0 \text{ için } \lim\limits_{x\to\infty}\left|x+\frac{p}{2}\right| = \lim\limits_{x\to\infty}\left(x+\frac{p}{2}\right) = \infty \\ x<0 \text{ için } \lim\limits_{x\to\infty}\left|\underbrace{x+\frac{p}{2}}_{<0}\right| = \lim\limits_{x\to-\infty} -\left(x+\frac{p}{2}\right) = \infty \end{cases}$$

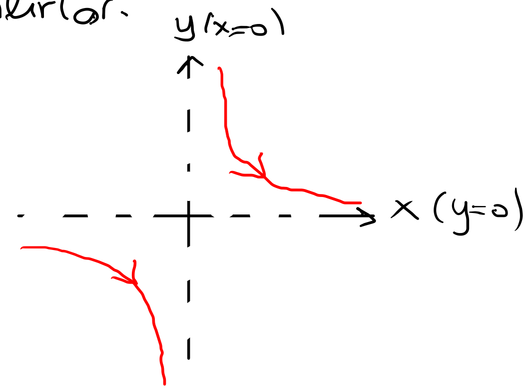
$$\to \sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2\left[1+\frac{\left(q-\frac{p^2}{4}\right)}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2}\right]}$$

Sonsuz Limitler:

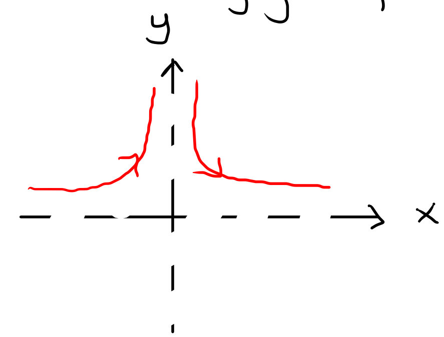
Değerleri keyfi olarak büyüyen fonksiyonlara sonsuz limite sahiptirler denir. "sonsuz" bir sayı olmadığından bu limitler gerçekte limit değildirler. Ancak, bu limitler keyfi olarak büyüyen fonksiyonların davranışını belirlemek için kullanılırlar.

Ör/ $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x} = \infty$

$\lim\limits_{x\to0^-}\frac{1}{x} = -\infty$

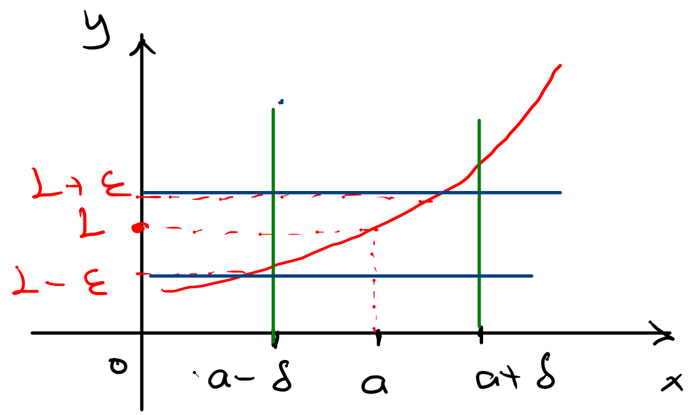


Ör/ $\lim\limits_{x\to0^{\mp}}\frac{1}{x^2} = \infty$



Limitin Formal Tanımı ($\varepsilon-\delta$ tanımı)

$\forall\,\varepsilon>0$ sayısı için $0<|x-a|<\delta$ iken $|f(x)-L|<\varepsilon$ olacak şekilde bir (muhtemelen ε'na bağlı) $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ sayısı bulunabiliyorsa x, a'ya yaklaşırken $f(x)$ de L limitine yaklaşır denir.



$|x-a|<\delta \Rightarrow -\delta < x-a < \delta$

$a-\delta < x < a+\delta$

$ax^2+bx+c=0$

$$x_{1,2}=\frac{-b\mp\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Ör/ $\lim\limits_{x\to 2} x^2=4$ olduğunu gösteriniz.

$a=2$, $L=4$

1. yol

$\forall \varepsilon>0$ için $|x-2|<\delta$ iken $|x^2-4|<\varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ sayısı bulmalıyız.

$$|x^2-4| = |(x-2)(x+2)| = |x-2||x+2| < |x+2|.\delta < \delta(4+\delta) = \varepsilon$$

$|x-2|<\delta \Rightarrow -\delta<x-2<\delta$

$2-\delta<x<2+\delta$

$4-\delta<x+2<4+\delta$

$\delta^2+4\delta=\varepsilon$

$\delta^2+4\delta-\varepsilon=0$

$$\delta_{1,2}=\frac{-4\mp\sqrt{16+4\varepsilon}}{2}$$

$$\delta=\frac{-4+\sqrt{16+4\varepsilon}}{2}>0$$

$$\delta=-2+\sqrt{4+\varepsilon}$$

2\. yol

$|x^2-4|<\varepsilon$

$\Rightarrow 5\delta=\varepsilon \Rightarrow \boxed{\delta=\frac{\varepsilon}{5}}$

$|x-2|<\delta$

$-\delta<\delta^2<\delta$

$-\delta<x-2<\delta$

$2-\delta<x<2+\delta$

$4-4\delta+\delta^2<x^2<4+4\delta+\delta^2$

$\delta^2-4\delta<x^2-4<\delta^2+4\delta$

$-\delta-4\delta<x^2-4<\delta+4\delta \Rightarrow -5\delta<x^2-4<5\delta$

$|x^2-4|<5\delta$

Kenar limitlerin Formal tanımları

Sağ limit

$\varepsilon>0$ verildiğinde $0<x-a<\delta$ iken $|f(x)-L|<\varepsilon$ o.ş. bir $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ sayısı bulunabiliyorsa x, a'ya sağdan yaklaşırken $f(x)$'in sağ limiti L'dir.

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=L$$

Sol limit

$\varepsilon>0$ verildiğinde $0<a-x<\delta$ iken $|f(x)-L|<\varepsilon$ o.ş. bir $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ sayısı bulunabiliyorsa x, a'ya soldan yaklaşırken $f(x)$'in sol limiti L'dir.

$$\lim_{x\to a^-} f(x)=L$$

Sonsuzda limitin formal tanımı

- $\forall\, \varepsilon>0$ sayısı için $x>R$ iken $x\in D(f)$ ve $|f(x)-L|<\varepsilon$ o.ş. bir $R=R(\varepsilon)$ sayısı varsa x sonsuza yaklaşırken $f(x)$ L limitine yaklaşır deriz.

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=L$$

- $\forall\, \varepsilon>0$ sayısı için $x<R$ iken $x\in D(f)$ ve $|f(x)-L|<\varepsilon$ o.ş. bir $R=R(\varepsilon)$ sayısı varsa x negatif sonsuza yaklaşırken $f(x)$ L limitine yaklaşır deriz.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=L$$

Sonsuz Limitin formal tanımı :

- Her pozitif B sayısı için $0<|x-a|<\delta$ iken $x\in D(f)$ ve $f(x)>B$ o.ş. bir $\delta=\delta(B)>0$ sayısı varsa x a'ya yaklaşırken $f(x)$ sonsuza yaklaşır denir.

$$\lim_{x\to a} f(x)=\infty$$

- Her negatif B sayısı için $0<|x-a|<\delta$ iken $x\in D(f)$ ve $f(x)<B$ o.ş. bir $\delta=\delta(B)>0$ sayısı varsa x, a'ya yaklaşırken $f(x)$ negatif sonsuza yaklaşır denir. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$

Ör/ $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$ olduğunu gösteriniz.

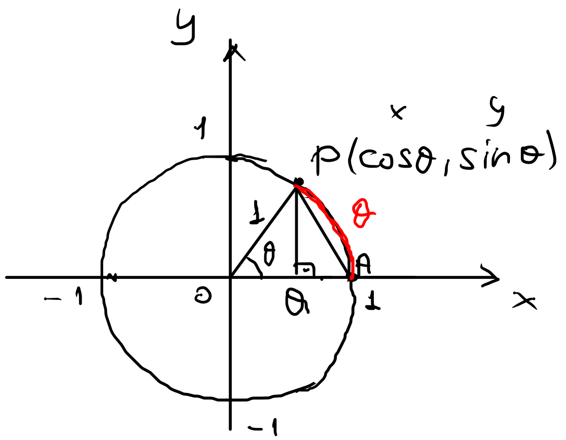
$\left|\frac{1}{x} - 0\right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{x} < \varepsilon \Rightarrow x > \frac{1}{\varepsilon} = R > 0$

$\forall \varepsilon > 0$ verildiğinde $x > R$ iken $\left|\frac{1}{x} - 0\right| < \varepsilon$ o.ş.
bir $R = R(\varepsilon) > 0$ bulmalıyız.

Trigonometrik Limitler

$\lim_{\theta\to 0} \sin\theta = 0$

$\lim_{\theta\to 0} \cos\theta = 1$ olduğunu gösterelim.



$|PQ| = \sin\theta$

$|QA| = 1 - \cos\theta$

$|PA|^2 = |PQ|^2 + |QA|^2$

$= \sin^2\theta + (1-\cos\theta)^2 < \theta^2$

$|\overline{PA}| < |\overset{\frown}{PA}|$

$$\left.\begin{array}{l} 0 < |\sin\theta| < |\theta| \\ 0 < |1-\cos\theta| < |\theta| \end{array}\right\}$$

$\lim_{\theta\to 0} 0 = 0$, $\lim_{\theta\to 0} \theta = 0 \Rightarrow \lim_{\theta\to 0} \sin\theta = 0$

$\lim_{\theta\to 0} 0 = 0$, $\lim_{\theta\to 0} \theta = 0 \Rightarrow \lim_{\theta\to 0} (1-\cos\theta) = 0$

$\lim_{\theta\to 0} 1 - \lim_{\theta\to 0} \cos\theta = 0$

$-\lim_{\theta\to 0} \cos\theta = -1$

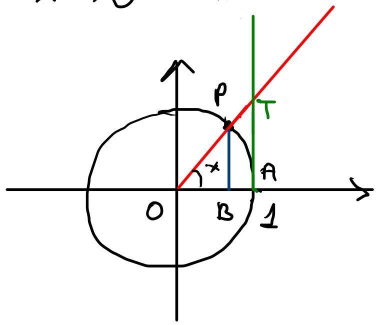
$\lim_{\theta\to 0} \cos\theta = 1$

- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sin x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\tan x} = 1$

$2\pi \quad \pi$

$x \quad ?$

$\dfrac{\cancel{\pi} x}{2\cancel{\pi}}$



$A(\overset{\triangle}{POB}) < A(\overset{\triangle}{POA}) < A(\overset{\triangle}{TOA})$

$\dfrac{\sin x . \cos x}{2} < \dfrac{x}{2} < \dfrac{\tan x}{2} \Rightarrow \sin x \cos x < x < \tan x$

$\cos x < \dfrac{x}{\sin x} < \dfrac{1}{\cos x}$, $\cos x < \dfrac{\sin x}{x} < \dfrac{1}{\cos x}$

$\lim\limits_{x\to 0} \cos x = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\cos x} = 1$ olduğundan sandoviç teo. göre

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sin x} = 1$ 'dir.

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \underbrace{\dfrac{\sin x}{x}}_{\to 1} \cdot \dfrac{1}{\cos x} = 1$

Örnekler :

1) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x\,(1+\cos x)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x(1+\cos x)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x.(1+\cos x)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\overbrace{\sin x}^{1}.\sin x}{x\,(1+\cos x)}$

$= \frac{0}{2} = 0$

$1-\cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2}$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\overbrace{\sin \frac{x}{2}}^{1} \cdot \sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = 0$

2) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x^2 + x.\sin 3x}{x.\sin x} = \lim\limits_{x\to 0} \left[\frac{\sin x^2}{x\sin x} + \frac{x\sin 3x}{x\sin x}\right]$

$= \lim\limits_{x\to 0} \left[\overbrace{\frac{x \sin x^2}{x^2 \sin x}}^{1} + \overbrace{\frac{3x\sin 3x}{3x.\sin x}}^{3}\right]$

$= 4$

3) $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{1-\sqrt{2+\cos x}}{1-\sqrt{1+\sin x}} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\left(1-\sqrt{2+\cos x}\right)\left(1+\sqrt{2+\cos x}\right)\left(1+\sqrt{1+\sin x}\right)}{\left(1-\sqrt{1+\sin x}\right)\left(1+\sqrt{1+\sin x}\right)\left(1+\sqrt{2+\cos x}\right)}$

$$= \lim_{x\to\pi} \frac{\left[1-(2+\cos x)\right]\left(1+\sqrt{1+\sin x}\right)}{\left[1-(1+\sin x)\right]\left[1+\sqrt{2+\cos x}\right]} = \lim_{x\to\pi} \frac{-(1+\cos x)\left(1+\sqrt{1+\sin x}\right)}{-\sin x\left(1+\sqrt{2+\cos x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to\pi} \frac{(\overbrace{1-\cos^2 x}^{\sin^2 x})\left(1+\sqrt{1+\sin x}\right)}{\sin x\,(1-\cos x)\left(1+\sqrt{2+\cos x}\right)} = \lim_{x\to\pi} \frac{\sin x \cdot \cancel{\sin x}\cdot\left(1+\sqrt{1+\sin x}\right)}{\cancel{\sin x}\,(1-\cos x)\left(1+\sqrt{2+\cos x}\right)}$$

$$= \frac{0\cdot 2}{2\cdot 2} = 0$$

Belirsiz Şekiller

$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0.\infty, \infty-\infty$, üstel Belirsizlikler $1^\infty, 0^0, \infty^0$

$\frac{0}{0}$: $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{(x-a)^n \cdot f_1(x)}{(x-a)^m \cdot g_1(x)} = \begin{cases} 0 & , \quad n>m \text{ ise} \\ \dfrac{f_1(a)}{g_1(a)} & , \quad n=m \text{ ise} \\ \text{limit yok} & , \quad n<m \text{ ise} \end{cases}$

($f(x)$ ve $g(x)$ birer polinom ise o zaman fonksiyonların çarpanlarından biri muhakkak $(x-a)$'dır.)

$\frac{\infty}{\infty}$: $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^p\, a_p}{x^q\, b_q} = \begin{cases} \text{limit yok}, & p>q \text{ ise} \\ \frac{a_p}{b_q}, & p=q \text{ ise} \\ 0, & p<q \text{ ise} \end{cases}$

$(a\to\infty)$

$f(x)$ ve $g(x) \rightarrow$ polinom

$0\cdot\infty$: $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\cdot g(x)\right] \overset{0\cdot\infty}{=} \lim\limits_{x\to a}\left[\frac{1}{1/f(x)}\cdot g(x)\right] = \lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\cdot\frac{1}{1/g(x)}\right]$

$= \lim\limits_{x\to a}\left[\frac{g(x)}{1/f(x)}\right] = \lim\limits_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{1/g(x)}\right]$

$= \frac{0}{0}$ veya $\frac{\infty}{\infty}$

$\infty - \infty$: a) $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x) - g(x)\right] \rightarrow$ Eşlenik ile ifade çarpılıp, bölünür ve belirsizlik ya $\frac{0}{0}$ ya da $\frac{\infty}{\infty}$ olur.

b) $\lim\limits_{x\to a}\left[\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{g(x)}\right] \rightarrow$ Payda eşitlenir ve belirsizlik $\frac{0}{0}$ veya $\frac{\infty}{\infty}$ olur.

$1^{\infty}, 0^{0}, \infty^{0}$:

$e^{\ln x} = x \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$$\lim_{x \to a} \left\{ [f(x)]^{g(x)} \right\} = e^{\ln \left[\lim_{x \to a} [f(x)]^{g(x)} \right]}$$

$$= e^{\lim_{x \to a} \left[\ln [f(x)]^{g(x)} \right]}$$

$$= e^{\lim_{x \to a} \left[g(x) . \ln [f(x)] \right]}$$

$$= e^{\lim_{x \to a} \left\{ \frac{\ln [f(x)]}{1/g(x)} \right\}}$$

$$= \cdots = e^{A}$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$
$$= 1 - 2\sin^2 x$$
$$= 2\cos^2 x - 1$$

$$\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}$$
$$= 1 - 2\sin^2 \frac{x}{2} \Rightarrow 1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2}$$
$$= 2\cos^2 \frac{x}{2} - 1 \Rightarrow 1 + \cos x = 2\cos^2 \frac{x}{2}$$

ÖRNEKLER

1) $$\lim_{x \to \pi} (1 + \cos x) . \tan \frac{x}{2} \overset{0.\infty}{=} \lim_{x \to \pi} \frac{(1 + \cos x) . \sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to \pi} \frac{2\cos^{\cancel{2}} \frac{x}{2} . \sin \frac{x}{2}}{\cancel{\cos \frac{x}{2}}} = \lim_{x \to \pi} \sin x = 0$$

2) $$\lim_{x \to 1} (1 - x) . \tan \frac{\pi x}{2} \overset{0.\infty}{=} \lim_{t \to 0} t . \tan \frac{\pi (1 - t)}{2} = \lim_{t \to 0} t . \frac{\sin \frac{\pi (1 - t)}{2}}{\cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi t}{2} \right)} = \lim_{t \to 0} \frac{\frac{\pi}{2} t . \overset{1}{\sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi t}{2} \right)}}{\frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi t}{2}}$$

$1 - x = t \qquad x = 1 - t$

$x \to 1$

$t \to 0$

$$= \frac{2}{\pi}$$

3) $\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{5}{x^3-1}\right)\overset{\infty-\infty}{=}\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{x^2+x+1-5}{x^3-1}\right)=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2+x-4}{x^3-1}=-\infty$

(x^2+x+1)

$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$

4) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x}\overset{1^\infty}{=}\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x^2}\right]^{\frac{1}{x}}=e^0=1$

NOT: $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$

SÜREKLİLİK

Fonksiyonların çoğunun tanım kümesi aralık veya ayrık aralıkların birleşimi şeklindedir.

P noktası fonksiyonun tanım kümesinin içinde kalan açık bir aralıkta bulunuyorsa P noktasına tanım kümesinin iç noktası denir. Eğer P noktası fonksiyonun tanım kümesinin bir noktası fakat iç noktası değilse o zaman tanım kümesinin bir uç noktasıdır.

$f(x)=\sqrt{4-x^2}$ $\quad D(f)=[-2,2]$ $\quad 0\in(-2,2)\Rightarrow 0$ iç noktadır.

$2\in[-2,2]\Rightarrow 2$ iç nokta olmadığından bir uç noktadır.

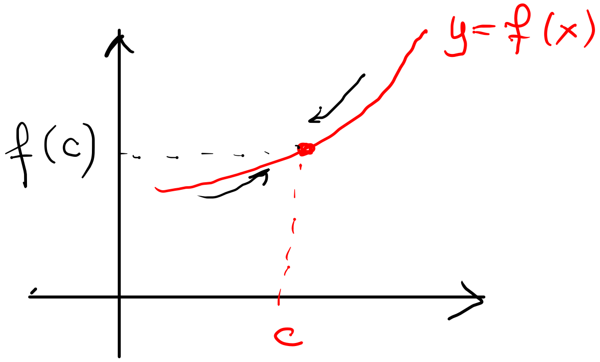
İç noktada süreklilik.

$c \in D(f)$ olmak üzere ve c bir iç nokta $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$ oluyorsa $f(x)$ fonksiyonu $x=c$'de süreklidir denir.

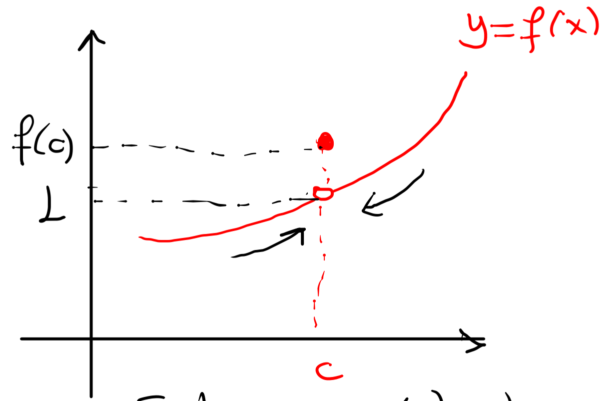
• Sağ-sol süreklilik

$\lim_{x \to c^+} f(x) = f(c)$ oluyorsa o zaman $f(x)$ fonksiyonu $x=c$'de sağdan süreklidir.

$\lim_{x \to c^-} f(x) = f(c)$ oluyorsa o zaman $f(x)$ fonksiyonu $x=c$'de soldan süreklidir.

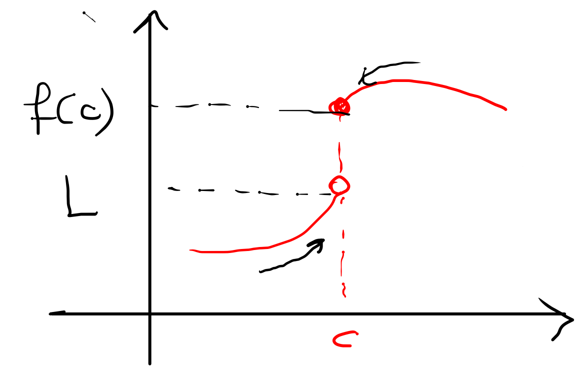


$f(x)$, $x=c$'de sürekli



Fonk. $x=c$'de tanımlı limite sahip ancak $\lim_{x \to c} f(x) \neq f(c)$ olduğundan süreksiz.

$\lim_{x \to c} f(x) = L \neq f(c)$



Fonk. $x=c$'de tanımlı fakat limite sahip değildir. Dolayısıyla süreksizdir.

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to c^-} f(x) = L \\ \lim_{x \to c^+} f(x) = f(c) \end{array}\right\} \neq$$

Teorem: Bir fonksiyonun bir c iç noktasında sürekli olması için gerek ve yeter koşul bu noktada hem sağdan hemde soldan sürekli olmasıdır.

Ör/

$$H(x)=\begin{cases}1 & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

$H(0)=1$

$\lim\limits_{x\to 0^-} H(x)=0\neq H(0)$

$\lim\limits_{x\to 0^+} H(x)=1=H(0)$

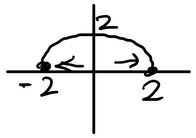
H(x) birim basamak fonksiyonu $x=0$ noktasında sağdan süreklidir. Ancak soldan sürekli değildir. Dolayısıyla $x=0$ da süreksizdir.

Uç noktada süreklilik

Eğer f fonksiyonu tanım kümesinin sol uç noktasında sağdan sürekli ise fonksiyon sol uç noktada süreklidir.

Eğer f fonksiyonu tanım kümesinin sağ uç noktasında soldan sürekli ise fonksiyon sağ uç noktada süreklidir.

$f(x)=\sqrt{4-x^2}$ $\quad D(f)=[-2,2]$



$x=-2$'de süreklilik: $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=f(-2)=0$ $\qquad$ $x=2$'de süreklilik: $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=f(2)=0$

Aralık üzerinde süreklilik

Eğer f fonksiyonu I aralığının her noktasında sürekli ise fonksiyon I aralığı üzerinde süreklidir denir.