$f(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$ fonksiyonunun orjinde limite sahip olduğunu gösteriniz.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0} \frac{x^2y}{x^2+y^2}\right] = \lim_{x\to 0}\left[\frac{0}{x^2}\right]=0$$

$\varepsilon>0$ verildiğinde $\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ iken $\left|\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}-0\right|<\varepsilon$ o.ş. $\delta=f(\varepsilon)>0$ bulmalıyız

$$\frac{x^2\,y}{x^2+y^2}$$

$$x^2<x^2+y^2 \Rightarrow \frac{x^2y}{x^2+y^2} < \frac{\cancel{(x^2+y^2)}\cdot y}{\cancel{x^2+y^2}} = y \leq |y| < \sqrt{x^2+y^2} < \delta = \varepsilon>0$$

$y^2<x^2+y^2$

$|y|<\sqrt{x^2+y^2}$

Süreklilik

$\varepsilon > 0$ verildiğinde $|x-a| < \delta$, $|y-b| < \delta$ iken (dikdörtgensel komşuluk) veya $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} < \delta$ iken (yuvar komşuluk) $|f(x,y) - f(a,b)| < \varepsilon$ olacak şekilde muhtemelen ε'na bağlı bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı bulunabiliyorsa $f(x,y)$ fonksiyonu (a,b) noktasında süreklidir denir ve

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$$

şeklinde gösterilir.

Süreklilik tanımı aşağıdaki şekilde de verilebilir

Δx ve Δy x ve y değişkenlerindeki çok küçük artımlar olmak üzere

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$$

eşitliğinde $x = a + \Delta x$ $y = b + \Delta y$ dönüşümünü yapalım.

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} f(a+\Delta x, b+\Delta y) = f(a,b) \Rightarrow \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} [\underbrace{f(a+\Delta x, b+\Delta y) - f(a,b)}_{\Delta z \text{ (fonksiyondaki değişim miktarı}}] = 0$$

$\Rightarrow \lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \Delta z = 0$ ise $z=f(x,y)$ (a,b) noktasında süreklidir denir.

Ör/ $z=x.y$ fonksiyonunun düzlemin her noktasında sürekli olduğunu gösteriniz.

Düzlemin (x_0,y_0) herhangi bir noktası olsun.

$\varepsilon>0$ verildiğinde $|x-x_0|<\delta$, $|y-y_0|<\delta$ iken $|xy-x_0y_0|<\varepsilon$ o.ş. bir $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ bulmalıyız.

$$|xy-x_0y_0| = |xy-x_0y-x_0y_0+x_0y|$$
$$= |y(x-x_0)+x_0(y-y_0)|$$
$$\leq |y|\,|x-x_0|+|x_0|\,|y-y_0|$$
$$< |y|\delta+|x_0|\delta < \delta(y_0+\delta)+x_0\delta = \delta^2+(x_0+y_0)\delta = \varepsilon$$

$$-\delta < y-y_0 < \delta$$
$$y_0-\delta < y < y_0+\delta$$

$$\delta^2+(x_0+y_0)\delta-\varepsilon=0$$
$$\delta_{1,2} = \frac{-(x_0+y_0)\mp\sqrt{(x_0+y_0)^2+4\varepsilon}}{2}$$

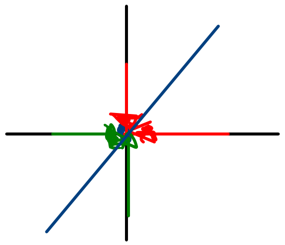
$$\delta = \frac{-(x_0+y_0)+\sqrt{(x_0+y_0)^2+4\varepsilon}}{2} > 0$$ seçildiğinde $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} x\cdot y = x_0 y_0$ olduğu görülür.

Ör.

$$z = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmış fonksiyonun $(0,0)$ noktasında iki kat limitini, limitini ve süreklilik durumunu inceleyiniz.

$f(0,0)=0$



$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0} \frac{2xy}{x^2+y^2}\right] = \lim_{x\to 0}\left[\frac{0}{x^2}\right] = 0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2} = \lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0} \frac{2xy}{x^2+y^2}\right] = \lim_{y\to 0}\left[\frac{0}{y^2}\right] = 0$$

$\neq$ limit yoktur

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{x\to 0 \\ y=x}} \frac{2x\cdot x}{x^2+x^2} = 1$$

$\neq f(0,0)$ sürekli değildir.

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \end{aligned}\right\} \quad r\to 0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{r\to 0 \\ x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta}} \frac{2\cancel{r^2}\sin\theta\cos\theta}{\cancel{r^2}} = \sin 2\theta$$

Sonuç θ'ya bağlı çıktığından limitin olmadığı söylenir.

Ör/ $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3-xy^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ fonksiyonunun sürekli olduğunu gösteriniz.

$f(0,0)=0$

$\varepsilon>0$ verildiğinde $\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ iken $\left|\dfrac{x^3-xy^2}{x^2+y^2}-0\right|<\varepsilon$ olacak şekilde $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ sayısı bulmalıyız.

$$\left|\frac{x^3-xy^2}{x^2+y^2}\right|=\left|\frac{x\,(x^2-y^2)}{x^2+y^2}\right|=|x|\cdot\left|\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right|\leq|x|\cdot\left|\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}\right|=|x|\leq\sqrt{x^2+y^2}<\delta$$

$|x|\leq\sqrt{x^2+y^2}$

$x^2-y^2<x^2+y^2$

$\delta=\varepsilon$ alınırsa

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=f(0,0)$ elde edilir.

Ör/ $z = \dfrac{x}{x+y^2}$ fonksiyonunun $(1,2)$ noktasında sürekli olup olmadığını gösteriniz.

$$\Delta z = f(1+\Delta x, 2+\Delta y) - f(1,2) = \frac{1+\Delta x}{(1+\Delta x)+(2+\Delta y)^2} - \frac{1}{5}$$

$$= \frac{5(1+\Delta x) - (1+\Delta x) - (2+\Delta y)^2}{5\left[(1+\Delta x)+(2+\Delta y)^2\right]}$$

$$= \frac{5+5\Delta x - 1 - \Delta x - (4+4\Delta y+(\Delta y)^2)}{5\left[(1+\Delta x)+(2+\Delta y)^2\right]}$$

$$= \frac{4\Delta x - 4\Delta y - (\Delta y)^2}{5\left[(1+\Delta x)+(2+\Delta y)^2\right]}$$

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \Delta z \overset{?}{=} 0 \qquad \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{4\Delta x - 4\Delta y - (\Delta y)^2}{5\left[(1+\Delta x)+(2+\Delta y)^2\right]} = \frac{0}{25} = 0$$

Fonksiyon $(1,2)$ noktasında süreklidir.

Sonuçlar

1) $f(x,y) = g(x)$ olsun. $g(x)$ sürekli ise $f(x,y)$ de süreklidir.

2) $P(x,y)$ ve $Q(x,y)$ iki polinom olsun.

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} P(x,y) = P(x_0,y_0)$$

(iki değişkenli polinomlar tanımlı oldukları her yerde süreklidirler)

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} \frac{P(x,y)}{Q(x,y)} = \frac{P(x_0,y_0)}{Q(x_0,y_0)}$$

($Q(x_0,y_0) \neq 0$ olması koşuluyla)

(iki değişkenli rasyonel fonksiyonlar tanımlı oldukları her yerde süreklidirler)

3) Sabit fonksiyon her yerde süreklidir.

4) Sürekli fonksiyonların toplamı, farkı, çarpımı, bölümü (payda sıfır olmadığı sürece), bir sabitle çarpımı ile oluşturulan fonksiyonlar da süreklidirler.

5) Bütün elemanter fonksiyonlar tanımlı oldukları her yerde süreklidirler.

6) Bir (a,b) noktasında sürekli olan fonksiyon bu noktanın bir komşuluğunda sınırlıdır.

7) Sürekli fonksiyonların bileşkesi de süreklidir.

Ör/

$$f(x,y) = \frac{\sqrt[3]{xy + e^{xy}}}{\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$$ (0,0)'da sürekli midir?

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt[3]{xy+e^{xy}}}{\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{\tan\frac{\pi}{4}} = 1 = f(0,0)$$

$$\left.\begin{array}{l} xy \to \text{sürekli} \\ e^{xy} \to \text{sürekli} \\ \sqrt[3]{\cdots} \to \text{sürekli} \end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt[3]{xy+e^{xy}} \to \text{sürekli}$$

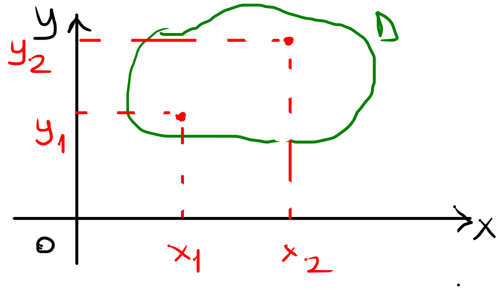
$$\tan \to \frac{\sin \to \text{sürekli}}{\cos \to \text{sürekli}}$$

$\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \neq 0$ sürekli.

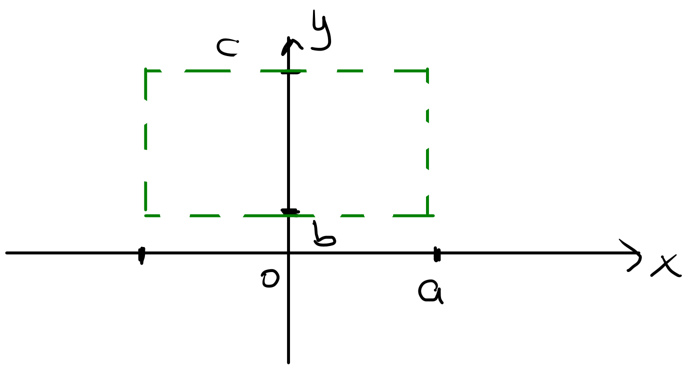
Düzgün Süreklilik

Bir D bölgesinde tanımlı $f(x,y)$ fonksiyonunu gözönüne alalım. $\forall\, \varepsilon > 0$ verildiğinde

$|x_2 - x_1| < \delta$, $|y_2 - y_1| < \delta$ iken $|f(x_1,y_1) - f(x_2,y_2)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa f fonksiyonu D bölgesinde süreklidir denir.



Ör/ $f(x,y)=\frac{x+y}{y}$ fonksiyonunun $x\in(-a,a)$ $y\in(b,c)$ $(a,b>0)$ ile tanımlı bölgede düzgün sürekli olduğunu gösteriniz.



$$\left|\frac{x_1+y_1}{y_1}-\frac{x_2+y_2}{y_2}\right| = \left|\frac{x_1y_2+\cancel{y_1y_2}-x_2y_1-\cancel{y_2y_1}}{y_2y_1}\right|$$

$$= \left|\frac{x_1y_2-x_2y_1}{y_1y_2}\right|$$

$$=\left|\frac{x_1y_2-x_2y_1+x_1y_1-x_1y_1}{y_1y_2}\right| = \left|\frac{x_1(y_2-y_1)-y_1(x_2-x_1)}{y_1y_2}\right| \le \left|\frac{x_1(y_2-y_1)}{y_1y_2}\right| + \left|\frac{\cancel{y_1}(x_2-x_1)}{\cancel{y_1}y_2}\right|$$

$|x|<a$ $\quad$ $b<y<c$

$|x_2-x_1|<\delta$ $\quad$ $|y_2-y_1|<\delta$

$$\le \frac{a\delta}{b^2}+\frac{\delta}{b}=\frac{(a+b)\delta}{b^2}=\varepsilon \Rightarrow \delta=\frac{b^2\varepsilon}{a+b}>0$$

Teoremler:

1) Kapalı (ve sınırlı) bölgede sürekli olan bir fonksiyon bu bölgede düzgün süreklidir. (Açık bölgede fonksiyon düzgün sürekli olabilir de olmayabilir de)

2) Kapalı bölgede sürekli olan fonksiyon bu bölgede sınırlıdır.

3) Kapalı bölgede sürekli olan fonksiyon bu bölgede en büyük ve en küçük değerlerini alır.

KISMİ TÜREV

$z=f(x,y)$ fonksiyonu bir D bölgesinde tanımlı ve sürekli olsun. Bu bölgede herhangi bir $P(x,y)$ noktasını gözönüne alalım. $f(x,y)$ fonksiyonunda y değişkenini $y=y_0$ gibi bir sabit olarak düşünürsek o zaman $z=f(x,y_0)=h(x)$ olur. Eğer $h(x)$ fonksiyonunun türevi mevcut ise bu türeve $z=f(x,y)$ fonksiyonunun x değişkenine göre alınan kısmi türevi denir ve

$$\frac{\partial z}{\partial x},\ z'_x,\ \frac{\partial f}{\partial x} \qquad \frac{\partial}{\partial x}=D_x \Rightarrow D_x z,\ D_x f$$

notasyonlarından herhangi biri ile gösterilir. y değişkeni için de benzer işlemler yapılır.

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} \qquad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} = \lim_{k\to 0} \frac{f(x_0, y_0+k) - f(x_0, y_0)}{k}$$

Ör 4) $z = xy^2 - x^2 + y$ fonksiyonunun $P(2,3)$ noktasındaki y'ye göre kısmi türevini tanımdan yararlanarak bulunuz.

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(2,3)} = \lim_{k\to 0} \frac{f(2,3+k) - f(2,3)}{k}$$

$$= \lim_{k\to 0} \frac{[2\cdot(3+k)^2 - 4 + (3+k)] - [2\cdot 9 - 4 + 3]}{k}$$

$$= \lim_{k\to 0} \frac{[2\cdot(9+6k+k^2) - 4 + 3 + k] - 17}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{\cancel{18} + 12k + 2k^2 \cancel{-4} + \cancel{3} + k \cancel{-17}}{k}$$

$$= \lim_{k\to 0} \frac{\cancel{k}(13 + 2k)}{\cancel{k}} = 13$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2xy + 1 \Rightarrow \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(2,3)} = 2\cdot 2\cdot 3 + 1 = 13$$

Ör/ $z=\arctan\frac{x}{y} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ türevlerini bulunuz.

$$(a^x)' = a^x . \ln a$$

$$(a^u)' = u' . a^u . \ln a$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1/y}{1+\frac{x^2}{y^2}} = \frac{y}{x^2+y^2} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-\frac{x}{y^2}}{1+\frac{x^2}{y^2}} = \frac{-x}{x^2+y^2}$$

Ör/ $u = \sin(xy^z) + \cos(yz^x)$ fonksiyonunun $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$ kısmi türevlerini bulunuz.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^z . \cos(xy^z) + y . z^x . \ln z . (-\sin(yz^x))$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x . z . y^{z-1} \cos(xy^z) - z^x . \sin(yz^x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = x . y^z . \ln y . \cos(xy^z) - y . x . z^{x-1} \sin(yz^x)$$

$f(x,y,z)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_1'(x,y,z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f_2'(x,y,z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = f_3'(x,y,z)$$