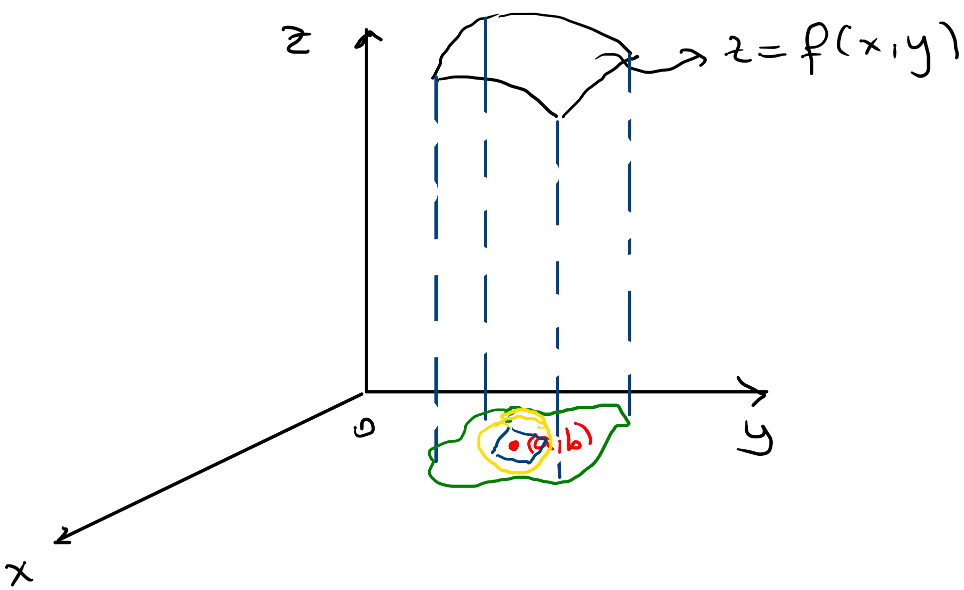
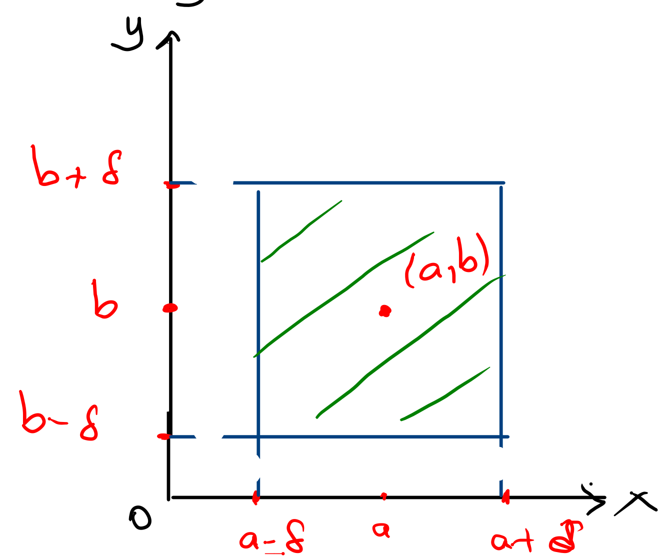
Limit

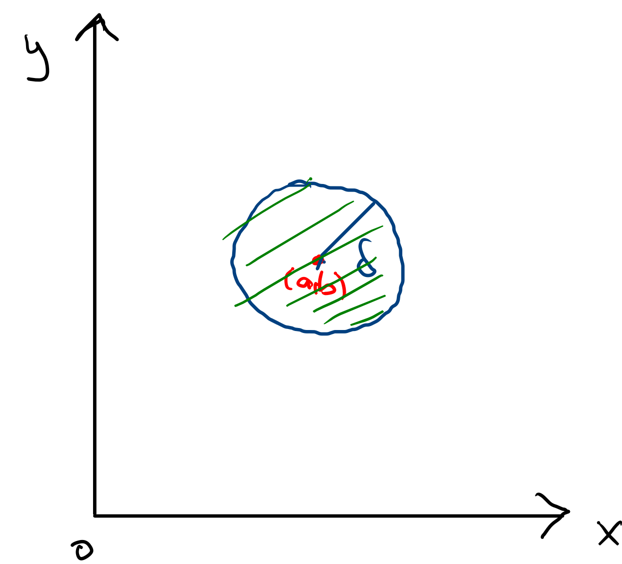
$f(x,y)$ bir D bölgesinin $P(a,b)$ noktasının bir komşuluğunda (P'de tanımlı olmayabilir) tanımlı bir fonksiyon olsun. Her $\varepsilon>0$ sayısına dikdörtgensel komşuluk için $|x-a|<\delta$ $|y-b|<\delta$ iken $|f(x,y)-L|<\varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta>0$ sayısı bulunabiliyorsa veya yuvar komşuluk için $(x-a)^2+(y-b)^2<\delta^2$ iken $|f(x,y)-L|<\varepsilon$ olacak şekilde $\delta>0$ sayısı bulunabiliyorsa tanım kümesine ait (x,y) ikilisi $P(a,b)$ noktasına yaklaşırken $f(x,y)$ fonksiyonu da L limitine yaklaşır denir ve

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L \quad \text{veya} \quad \lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y) = L$$

şekillerinden biri ile gösterilir.







Ör/1. $z=x^2+y^2$ fonksiyonunun $x\to 0$ $y\to 0$ yaklaşırken limitinin sıfır olduğunu gösteriniz.

- $\varepsilon>0$ verildiğinde $(x-0)^2+(y-0)^2<\delta^2$ iken $|x^2+y^2-0|<\varepsilon$ o.ş. $\delta>0$ bulmalıyız.

$$x^2+y^2<\delta^2$$

$$|x^2+y^2|<\delta^2=\varepsilon$$

$$\delta=\mp\sqrt{\varepsilon}$$

$\delta=\sqrt{\varepsilon}>0$ seçildiğinde $z=x^2+y^2$ fonksiyonunun limitinin sıfır olduğu gösterilmiş olur.

$\varepsilon>0$ için

- $\left.\begin{array}{l}|x|<\delta\\ |y|<\delta\end{array}\right\}$ iken $|x^2+y^2|<\varepsilon$ o.ş. $\delta>0$ bulunmalı.

$$|x^2+y^2|\leq|x^2|+|y^2|=|x|^2+|y|^2<2\delta^2=\varepsilon\Rightarrow\delta^2=\frac{\varepsilon}{2}\Rightarrow\delta=\mp\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}$$

$$\delta=\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}>0$$

Ör/2 $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} (x^2+2y)=5$ olduğunu tanımdan yararlanarak gösteriniz.

$\varepsilon>0$ verildiğinde $|x-1|<\delta$ ve $|y-2|<\delta$ iken $|x^2+2y-5|<\varepsilon$ olacak şekilde $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ sayısı bulmalıyız.

$$-\delta < x-1 < \delta \qquad\qquad -\delta < y-2 < \delta$$

$$1-\delta < x < 1+\delta \qquad\qquad 2-\delta < y < 2+\delta$$

$$(1-\delta)^2 < x^2 < (1+\delta)^2 \qquad\qquad 4-2\delta < 2y < 4+2\delta$$

$$1-2\delta+\delta^2 < x^2 < 1+2\delta+\delta^2$$

$$0<\delta<1$$

$$-\delta<\delta^2<\delta$$

$$1-2\delta+\delta^2+4-2\delta-5 < x^2+2y-5 < 1+2\delta+\delta^2+4+2\delta-5$$

$$\delta^2-4\delta < x^2+2y-5 < \delta^2+4\delta$$

$$-\delta-4\delta < x^2+2y-5 < \delta+4\delta$$

$$-5\delta < x^2+2y-5 < 5\delta \Rightarrow |x^2+2y-5| < 5\delta = \varepsilon \Rightarrow \boxed{\delta=\frac{\varepsilon}{5}>0}$$

Ör/3

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}} \frac{2x^2-3xy+y^2}{2x^2+xy-y^2} = -\frac{1}{3}$$ olduğunu gösteriniz.

$\varepsilon>0$ verildiğinde $|x-1|<\delta$, $|y-2|<\delta$ iken $\left|\frac{2x^2-3xy+y^2}{2x^2+xy-y^2}+\frac{1}{3}\right|<\varepsilon$ o.ş. bir $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ bulmalıyız.

$$\left|\frac{2x^2-3xy+y^2}{2x^2+xy-y^2}+\frac{1}{3}\right| = \left|\frac{6x^2-9xy+3y^2+2x^2+xy-y^2}{3(2x^2+xy-y^2)}\right|$$

$$= \left|\frac{8x^2-8xy+2y^2}{3(2x^2+xy-y^2)}\right| = \frac{2}{3}\left|\frac{4x^2-4xy+y^2}{2x^2+xy-y^2}\right|$$

$$= \frac{2}{3}\left|\frac{(2x-y)^{\cancel{2}}}{\cancel{(2x-y)}(x+y)}\right| = \frac{2}{3}\left|\frac{2x-y}{x+y}\right| < \frac{2}{\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{3}\delta}{3-2\delta} = \frac{2\delta}{3-2\delta}$$

$-\delta<x-1<\delta$

$1-\delta<x<1+\delta$

$2-2\delta<2x<2+2\delta$

$2-\delta<y<2+\delta$

$-(2+\delta)<-y<\delta-2$

$2-2\delta-2-\delta<2x-y<2+2\delta+\delta-2$

$-3\delta<2x-y<3\delta$

$3-2\delta<x+y<3+2\delta$

$\Rightarrow \varepsilon=\frac{2\delta}{3-2\delta}$

$3\varepsilon-2\delta\varepsilon=2\delta$

$2\delta+2\delta\varepsilon=3\varepsilon$

$2\delta(1+\varepsilon)=3\varepsilon$

$\boxed{\delta=\frac{3\varepsilon}{2(1+\varepsilon)}}>0$

Teorem :

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=L \ , \quad \lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y)=M \quad \text{ve} \quad L, M, k \in \mathbb{R} \ \text{olsun.}$$

((a,b) noktasının her komşuluğu $D(f)\cap D(g)$'den noktalar içermek üzere)

1°) $$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \left[f(x,y)\mp g(x,y)\right] = \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) \mp \lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = L\mp M$$

2°) $$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \left[k.f(x,y)\right] = k.\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = k.L$$

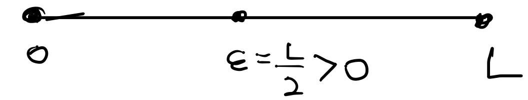
3°) $$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \left[f(x,y).g(x,y)\right] = \left[\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)\right]\left[\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y)\right] = L.M$$

4°) $$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \left[\frac{f(x,y)}{g(x,y)}\right] = \frac{\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)}{\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y)} = \frac{L}{M}$$ ($M\neq 0$ olması koşuluyla)

5°) $$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \left[f(x,y)\right]^n = \left[\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)\right]^n = L^n$$ ($n\in\mathbb{Z}$)

6°) $$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \sqrt[n]{f(x,y)} = \sqrt[n]{\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)} = \sqrt[n]{L}$$ ($n\in\mathbb{Z}^+$, n çift ise $L>0$ olmalı)

7°) $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L > 0$ olsun. $|f(x,y) - L| < \varepsilon$

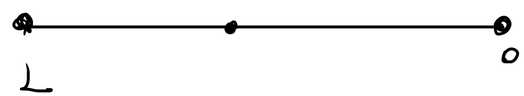


$0 < \varepsilon < L$ ise $\varepsilon = \frac{L}{2} > 0$ seçebiliriz. $\delta > 0$ bulunabilir.

P(a,b)'nin $\begin{cases} |x-a| < \delta \Rightarrow & a-\delta < x < a+\delta \\ |y-b| < \delta \Rightarrow & b-\delta < y < b+\delta \end{cases}$ komşuluğunda bir nokta seçersek fonksiyonun o noktadaki değeri

$L - \varepsilon < f(x,y) < L + \varepsilon$ aralığında olur.

8°) $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L < 0$ olsun.



$\varepsilon = -\frac{L}{2}$

$|f(x,y) - L| < -\frac{L}{2}$

$f(x,y) < L - \frac{L}{2} = \frac{L}{2} < 0$

9°) $|f(x,y) - L| < \varepsilon$

$\Rightarrow \big| |f(x,y)| - |L| \big| \leq |f(x,y) - L| < \varepsilon$

$-\varepsilon < |f(x,y)| - |L| < \varepsilon$

$|L| - \varepsilon < |f(x,y)| < |L| + \varepsilon \Rightarrow$ fonksiyon sınırlıdır.

10°) $f(x,y) < g(x,y) \nRightarrow L < M$'dir.

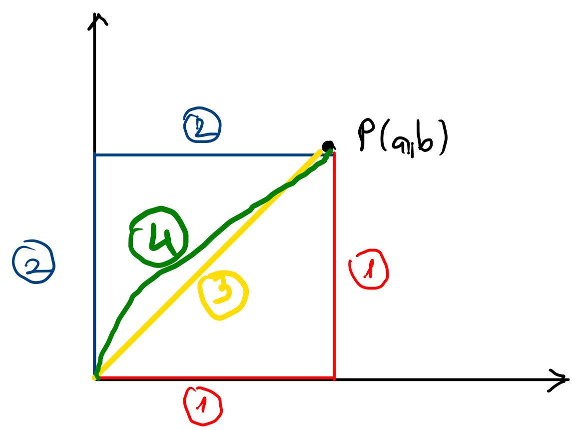
11°) $D(f) \cap D(g) \cap D(h)$ için

$f(x,y) \leq g(x,y) \leq h(x,y)$ ve $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} h(x,y) = L$ ise

$\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = L$'dir.

Limitin Hesaplanması

İki değişkenli bir $z = f(x,y)$ fonksiyonunda x ve y değişkenlerinin sırasıyla a ve b değerlerine yaklaşması tanım bölgesi içinde sonsuz şekilde olabilir. Yaklaşım (a,b) noktasından geçen herhangi eğriler veya doğrularla yapılabilir.



Farklı iki yolla alınan limitler birbirine eşit değilse fonksiyonun limiti mevcut değildir. Limitin mevcut olabilmesi için tüm yollardan alınan limitlerin birbirine eşit olması gerekir. Yani limit yola bağlı olmamalıdır.

Çift yol testi (iki kat limit)

$P(a,b)$ noktasına, önce y'yi sabit tutup x-ekseni boyunca, sonra da x'i sabit tutup y-ekseni boyunca yaklaşabiliriz. Veya bu işlemi ters sırada yapabiliriz.

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \lim_{y\to b}\left[\lim_{x\to a} f(x,y)\right]$$

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \lim_{x\to a}\left[\lim_{y\to b} f(x,y)\right]$$

} çift yol testi (iki kat limit)

Bu iki limit birbirine eşit değilse limit yoktur. Ancak bu iki limitin eşit olması limitin var olduğunu göstermez.

Ör/ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x-y}{x+y}$ limitinin var olup olmadığını araştırınız.

$$\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0} \frac{x-y}{x+y}\right] = \lim_{x\to 0}\left[\frac{x}{x}\right] = 1$$

$$\neq$$

$$\lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0} \frac{x-y}{x+y}\right] = \lim_{y\to 0}\left[\frac{-y}{y}\right] = -1$$

(0,0)'da $\dfrac{x-y}{x+y}$'nin limiti mevcut değildir.

Ör/ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} \arctan\dfrac{y}{x}$ limitinin var olup olmadığını araştırınız.

$$\lim_{x\to 0^+}\left[\lim_{y\to 1} \arctan\frac{y}{x}\right] = \lim_{x\to 0^+}\left(\arctan\frac{1}{x}\right) = \arctan\infty = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to 0^-}\left[\lim_{y\to 1} \arctan \frac{y}{x}\right] = \lim_{x\to 0^-}\left(\arctan\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

Örn/

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x\neq y}} \frac{x^2-xy}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\cancel{(x-y)}.\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\cancel{(x-y)}} = 0$$

Örn/

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 1\\ (x\neq y)}} \frac{x^2-2xy+y^2}{(x-y)} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}} \frac{(x-y)^{\cancel{2}}}{\cancel{x-y}} = \lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}} (x-y) = 0$$

Örn/ $f(x,y)=\dfrac{2x^2y}{x^4+y^2}$ fonksiyonunun orjinde limitinin varlığını araştırınız.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2y}{x^4+y^2} = \lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0} \frac{2x^2y}{x^4+y^2}\right] = \lim_{x\to 0}\left[\frac{0}{x^4}\right] = 0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2y}{x^4+y^2} = \lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0} \frac{2x^2y}{x^4+y^2}\right] = \lim_{y\to 0}\left[\frac{0}{y^2}\right] = 0$$

$y=kx$ doğrusu $(0,0)$'dan geçer

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2y}{x^4+y^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}} \left[\frac{2x^2.kx}{x^4+k^2x^2}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2kx^3}{\cancel{x^2}(x^2+k^2)} = 0$$

$y = kx^2$ eğrisi $(0,0)$'dan geçer

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2y}{x^4+y^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx^2}} \frac{2x^2.kx^2}{x^4+k^2x^4} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx^2}} \frac{2k\cancel{x^4}}{\cancel{x^4}(1+k^2)} = \frac{2k}{1+k^2}$$

k'nın her farklı değeri için sonuç farklı olacağından orjinde limit yoktur.

Ör/ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{y\sin(\pi x)}{x+y-2}$ fonksiyonunun limitinin mevcut olup olmadığını araştırınız.

$$\lim_{x\to 1}\left[\lim_{y\to 1} \frac{y\sin(\pi x)}{x+y-2}\right] = \lim_{x\to 1}\left[\frac{\sin(\pi x)}{x-1}\right] \underset{L'H}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 1} \frac{\pi\cos(\pi x)}{1} = -\pi$$

$\neq$ limit yoktur.

$$\lim_{y\to 1}\left[\lim_{x\to 1} \frac{y\sin(\pi x)}{x+y-2}\right] \lim_{y\to 1}\left[\frac{y.\overset{\to 0}{\sin\pi}}{y-1}\right] = 0$$

Öd/ $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$ fonksiyonunun orjinde limitinin mevcut olduğunu gösteriniz.