3. Özdeğer ve Özfonksiyonların Asimptotik Davranışları

- $\ell(y) = -y'' + q(x)\,y(x) = \lambda y(x) \qquad (3.1)$

$$\left.\begin{aligned} y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha &= 0 \\ y(\pi)\cos\beta + y'(\pi)\sin\beta &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (3.2)$$

$$y(0)\cdot\underbrace{\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}_{\cot\alpha} + y'(0) = 0$$

$$y(\pi)\,\underbrace{\frac{\cos\beta}{\sin\beta}}_{\cot\beta} + y'(\pi) = 0$$

sınır değer problemini göz önüne alalım. Burada $-\infty < h, H < \infty$ için $\cot\alpha = -h$, $\cot\beta = H$ alınırsa sınır koşulları

- $$\left.\begin{aligned} y'(0) - h\,y(0) &= 0 \\ y'(\pi) + H\,y(\pi) &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (3.3)$$

şeklini alır.

- $\varphi(x,\lambda)$ ile (3.1) denkleminin $\underline{\varphi(0,\lambda) = 1\ ,\ \varphi'(0,\lambda) = h}$ başlangıç koşullarını sağlayan çözümünü

- $\psi(x,\lambda)$ ile de (3.1) denkleminin $\underline{\psi(0,\lambda) = 0\ ,\ \psi'(0,\lambda) = 1}$ koşullarını sağlayan çözümünü gösterelim.

Teorem 3.1

$$-y''+q(x)y=\lambda y \Rightarrow q(x)y=y''+\lambda y$$

$\lambda=s^2$ olsun. O taktirde

$$\varphi(x,\lambda)=\cos sx+\frac{h}{s}\sin sx+\frac{1}{s}\int_0^x \sin s(x-\tau)\,q(\tau)\,\varphi(\tau,\lambda)\,d\tau \qquad \varphi'(x,\lambda)=-s\sin sx+h\cos sx+\frac{1}{\cancel{s}}\cdot\cancel{s}\int_0^x \cos s(x-\tau)q(\tau)\varphi(\tau,\lambda)d\tau$$

$$\psi(x,\lambda)=\frac{\sin sx}{s}+\frac{1}{s}\int_0^x \sin s(x-\tau)\,q(\tau)\,\psi(\tau,\lambda)\,d\tau \qquad \psi'(x,\lambda)=\cos sx+\frac{1}{s}\cdot s\cdot\int_0^x \cos s(x-\tau)q(\tau)\psi(\tau,\lambda)d\tau$$

dur.

İSPAT: $\varphi(x,\lambda)$ çözüm ise (3.1) denklemini sağlamalıdır.

$$\Rightarrow \quad -\varphi''(x,\lambda)+q(x)\varphi(x,\lambda)=\lambda\varphi(x,\lambda)\Rightarrow q(x)\varphi(x,\lambda)=\varphi''(x,\lambda)+\lambda\varphi(x,\lambda)$$

$\int_0^x \sin s(x-\tau)q(\tau)\varphi(\tau,\lambda)\,d\tau$ integralini göz önüne alalım.

$$\int_0^x \sin s(x-\tau)\left[\varphi''(\tau,\lambda)+\lambda\varphi(\tau,\lambda)\right]d\tau=\underbrace{\int_0^x \sin s(x-\tau)\,\varphi''(\tau,\lambda)\,d\tau}+\lambda\int_0^x \sin s(x-\tau)\,\varphi(\tau,\lambda)\,d\tau \qquad (3.4)$$

$\int_0^x \underbrace{\sin s(x-\tau)}_{u}\underbrace{\varphi''(\tau,\lambda)d\tau}_{dv}$ integralinde kısmi integrasyon uygulayalım:

$$-y'' + q(x)y = \lambda y$$

k.D $\quad -r^2 + (q(x) - \lambda) = 0$

$$r^2 = q(x) - \lambda$$

$$r_{1,2} = \mp\sqrt{q(x)-\lambda}$$

$$y = c_1 \cdot e^{-\sqrt{q(x)-\lambda}\cdot x} + c_2 e^{\sqrt{q(x)-\lambda}\, x}$$

$$\left.\begin{aligned} c_1 &= c_1(x) \\ c_2 &= c_2(x) \end{aligned}\right\} \quad c_1' e^{-\sqrt{q(x)-\lambda}\, x} + c_2' e^{\sqrt{q(x)-\lambda}\, x} = 0 \text{ (keyfi)}$$

$$a y''' + b y'' + c y' + d y = f(x)$$

$y_1, y_2, y_3 \rightarrow$ lineer bağ. çöz.

$$\boxed{y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3}$$

$$c_1 = c_1(x), \quad c_2 = c_2(x), \quad c_3 = c_3(x)$$

$c_1' y_1 + c_2' y_2 + c_3' y_3 = 0$ (keyfi)

$c_1' y_1' + c_2' y_2' + c_3' y_3' = 0$ (keyfi)

$$c_1' y_1'' + c_2' y_2'' + c_3' y_3'' = \frac{f(x)}{a}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \sin s(x-z)=u \Rightarrow -s\cos s(x-z)\,dz=du \\ \varphi''(z,\lambda)\,dz=dv \Rightarrow \varphi'(z,\lambda)=v \end{array}\right\} \Rightarrow \int_0^x \sin s(x-z)\varphi''(z,\lambda)\,dz=\varphi'(z,\lambda)\sin s(x-z)\Big|_0^x + s\int_0^x \cos s(x-z)\,\varphi'(z,\lambda)\,dz$$

$$\Rightarrow \int_0^x \sin s(x-z)\varphi''(z,\lambda)\,dz=\varphi'(x,\lambda)\underbrace{\cancel{\sin s(x-x)}}_{0}-\varphi'(0,\lambda)\sin s(x-0)+s\int_0^x \underbrace{\cos s(x-z)}_{u}\,\underbrace{\varphi'(z,\lambda)\,dz}_{dv}$$

$$=-\varphi'(0,\lambda)\sin sx+s\left[\varphi(z,\lambda).\cos s(x-z)\Big|_0^x - s\int_0^x \sin s(x-z)\,\varphi(z,\lambda)\,dz\right]$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos s(x-z)=u \\ s\sin s(x-z)\,dz=du \\ \varphi'(z,\lambda)\,dz=dv \\ \varphi(z,\lambda)=v \end{array}\right\}$$

$$=-h\sin sx+s\left[\varphi(x,\lambda)\cos s(x-x)-\varphi(0,\lambda)\cos s(x-0)-s\int_0^x \sin s(x-z)\varphi(z,\lambda)\,dz\right]$$

$$=-h\sin sx+s\varphi(x,\lambda)-s.\cos sx-s^2\int_0^x \sin s(x-z)\,\varphi(z,\lambda)\,dz$$

Bu sonucu (3.4)'de yerine yazalım.

$$\int_0^x \sin s(x-z)\underbrace{\left[\varphi''(z,\lambda)+\lambda\varphi(z,\lambda)\right]}_{q(z)\varphi(z,\lambda)}dz=\underbrace{\int_0^x \sin s(x-z)\,\varphi''(z,\lambda)\,dz}+\lambda\int_0^x \sin s(x-z)\,\varphi(z,\lambda)\,dz$$

$$\Rightarrow \int_0^x \sin s(x-z)\,q(z)\,\varphi(z,\lambda)\,dz=-h\sin sx+s\varphi(x,\lambda)-s\cos sx-\underbrace{s^2}_{\lambda}\cancel{\int_0^x \sin s(x-z)\,\varphi(z,\lambda)\,dz}+\cancel{\lambda\int_0^x \sin s(x-z)\varphi(z,\lambda)\,dz}$$

$$s\varphi(x,\lambda)=\int_0^x \sin s(x-z)\,q(z)\,\varphi(z,\lambda)\,dz+h\sin sx+s\cos sx$$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi(x,\lambda)=\frac{h}{s}\sin sx+\cos sx+\frac{1}{s}\int_0^x \sin s(x-z)\,q(z)\,\varphi(z,\lambda)\,dz}\,.$$

$\psi(x,\lambda)$ eğer (3.1) denkleminin çözümü ise; $-\psi''(x,\lambda)+q(x)\psi(x,\lambda)=\lambda\psi(x,\lambda)$ 'dır.

$$q(x)\psi(x,\lambda)=\psi''(x,\lambda)+\lambda\psi(x,\lambda)$$

$\int_0^x \sin s(x-z)\,q(z)\,\psi(z,\lambda)\,dz$ integralini gözönüne alalım.

$$\int_0^x \sin s(x-z)\,q(z)\,\psi(z,\lambda)\,dz=\int_0^x \sin s(x-z)\left[\psi''(z,\lambda)+\lambda\psi(z,\lambda)\right]dz$$

$$=\underbrace{\int_0^x \sin s(x-z)\,\psi''(z,\lambda)\,dz}_{I}+\lambda\int_0^x \sin s(x-z)\,\psi(z,\lambda)\,dz \qquad (3.5)$$

$$I=\int_0^x \underbrace{\sin s(x-z)}_{u}\,\underbrace{\psi''(z,\lambda)\,dz}_{dv}$$

$\sin s(x-z)=u \Rightarrow -s\cos s(x-z)\,dz=du$

$\psi''(z,\lambda)\,dz=dv \Rightarrow \psi'(z,\lambda)=v$

$$I = \int_0^x \underbrace{\sin s(x-z)}_{u} \underbrace{\psi''(z,\lambda)\,dz}_{dv} = \psi'(z,\lambda).\sin s(x-z)\Big|_0^x + s\int_0^x \cos s(x-z)\,\psi'(z,\lambda)\,dz$$

$$= \psi'(x,\lambda)\sin s\cancel{(x-x)}^{\,0} - \psi'(0,\lambda)\sin s(x-0) + s\left[\psi(z,\lambda).\cos s(x-z)\Big|_0^x - s\int_0^x \sin s(x-z)\psi(z,\lambda)\,dz\right]$$

$\cos s(x-z) = u$

$s\sin s(x-z)\,dz = du$

$\psi'(z,\lambda)\,dz = dv$

$\psi(z,\lambda) = v$

$$= -h\sin sx + s\left[\psi(x,\lambda)\cos s(x-x) - \cancel{\psi(0,\lambda)}^{\,0}.\cos s(x-0) - s\int_0^x \sin s(x-z)\psi(z,\lambda)\,dz\right]$$

$$= -h\sin sx + s\,\psi(x,\lambda) - s^2\int_0^x \sin s(x-z)\,\psi(z,\lambda)\,dz$$

Bu sonucu (3.5)'de yerine yazarsak;

$$\int_0^x \sin s(x-z)\,q(z)\,\psi(z,\lambda)\,dz = -\sin sx + s\,\psi(x,\lambda) - \cancel{\underbrace{s^2}_{\lambda}\int_0^x \sin s(x-z)\,\psi(z,\lambda)\,dz} + \cancel{\lambda\int_0^x \sin s(x-z)\psi(z,\lambda)\,dz}$$

$$s\,\psi(x,\lambda) = \sin sx + \int_0^x \sin s(x-z)\,q(z)\,\psi(z,\lambda)\,dz$$

$$\boxed{\psi(x,\lambda) = \frac{\sin sx}{s} + \frac{1}{s}\int_0^x \sin s(x-z)\,q(z)\,\psi(z,\lambda)\,dz\ .}$$

Teorem 3.2

$s = \sigma + it \quad (\sigma, t \in \mathbb{R})$ olsun. $|s| \geq s_0$ ve $x \in [0, \pi]$ için

$$\varphi(x,\lambda) = O\left(e^{|t|x}\right), \quad \varphi(x,\lambda) = \cos sx + O\left(|s|^{-1} e^{|t|x}\right)$$

$$\psi(x,\lambda) = O\left(|s|^{-1} e^{|t|x}\right), \quad \psi(x,\lambda) = \frac{\sin sx}{s} + O\left(|s|^{-2} e^{|t|x}\right)$$

olacak şekilde bir $s_0 > 0$ vardır. Bu formüller $|s| \geq s_0$ ve $x \in [0,\pi]$ için

- $|\varphi(x,\lambda)| \leq c \cdot e^{|t|x}$, • $|\varphi(x,\lambda) - \cos sx| \leq c \cdot |s|^{-1} \cdot e^{|t|x}$

$$|\psi(x,\lambda)| \leq c \cdot |s|^{-1} e^{|t|x}, \quad \left|\psi(x,\lambda) - \frac{\sin sx}{s}\right| \leq c \cdot |s|^{-2} e^{|t|x}$$

olacak şekilde bir $c > 0$ sabitinin varlığıyla eşdeğerdir. Burada $|s| \geq s_0$ için c, x ve λ'dan bağımsız bir sabittir.

İSPAT: $\varphi(x,\lambda) = f(x) \cdot e^{|t|x}$ olsun. Teorem 3.1'den

$$\varphi(x,\lambda) = \cos sx + \frac{h}{s}\sin sx + \frac{1}{s}\int_0^x \sin s(x-\tau)\, q(\tau)\, \varphi(\tau,\lambda)\, d\tau$$

$$\Rightarrow f(x) \cdot e^{|t|x} = \cos sx + \frac{h}{s}\sin sx + \frac{1}{s}\int_0^x \sin s(x-\tau)\, q(\tau)\, \varphi(\tau,\lambda)\, d\tau$$

$$f(x) = e^{-|t|x}\left[\cos sx + \frac{h}{s}\sin sx + \frac{1}{s}\int_0^x \sin s(x-\tau)\, q(\tau)\, \varphi(\tau,\lambda)\, d\tau\right]$$

$\max\limits_{[0,\pi]} |f(x)| = \mu$ olsun. $\qquad \varphi(x,\lambda) = f(x)\cdot e^{|t|x}$

$$\left| e^{-|t|x}\cdot \cos sx \right| \le 1 \qquad \left| e^{-|t|x}\cdot \sin sx \right| \le 1 \qquad \left(\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} \;,\; \sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} \right)$$

$|\sin sx| \le e^{|t|x}$

Bunlardan yararlanarak;

$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$

$$f(x) = e^{-|t|x}\cdot \cos sx + \frac{h}{s} e^{-|t|x} \sin sx + \frac{1}{s}\int_0^x e^{-|t|x}\cdot \sin s(x-\tau)\, q(\tau)\, e^{|t|\tau}\cdot f(\tau)\,d\tau$$

$$\Rightarrow f(x) = e^{-|t|x} \cos sx + \frac{h}{s} e^{-|t|x} \sin sx + \frac{1}{s}\int_0^x e^{-|t|(x-\tau)}\cdot \sin s(x-\tau)\, q(\tau)\, f(\tau)\,d\tau$$

$$|f(x)| \le \left|e^{-|t|x}\cos x\right| + \left|\frac{h}{s} e^{-|t|x} \sin sx\right| + \frac{1}{|s|}\left|\int_0^x e^{-|t|(x-\tau)} \sin s(x-\tau)\, q(\tau)\, f(\tau)\,d\tau\right|$$

$$|f(x)| \le 1 + \frac{|h|}{|s|} + \frac{1}{|s|}\int_0^\pi |q(\tau)|\cdot|f(\tau)|\,d\tau$$

$$\mu \le 1 + \frac{|h|}{|s|} + \frac{\mu}{|s|}\int_0^\pi |q(\tau)|\,d\tau$$

$$\mu\left[1 - \frac{1}{|s|}\int_0^\pi |q(\tau)|\,d\tau\right] \le 1 + \frac{|h|}{|s|}$$

$$\Rightarrow \mu \le 2\left(1 + \frac{|h|}{|s|}\right) \le 2(1+|h|)$$

$$|s| \ge s_0 = 2\int_0^\pi |q(\tau)|\,d\tau$$

$$\Rightarrow \frac{|s|}{2} \ge \int_0^\pi |q(\tau)|\,d\tau .$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \ge \frac{1}{|s|}\int_0^\pi |q(\tau)|\,d\tau$$

$$\Rightarrow \mu - \frac{\mu}{|s|}\int_0^\pi |q(\tau)|\,d\tau \le \mu - \frac{\mu}{2} = \frac{\mu}{2}$$

$$\varphi(x,\lambda) = f(x).e^{|t|x} \Rightarrow |\varphi(x,\lambda)| \leq |f(x)|.\left|e^{|t|x}\right| \leq \underbrace{2|1+|h||}_{C}.e^{|t|x} = c.e^{|t|x}$$ elde edilir.

Bu kez de $|\varphi(x,\lambda) - \cos sx| \leq c.|s|^{-1}.e^{|t|x}$ i ispatlayalım.

$$|\varphi(x,\lambda) - \cos sx| = \left|\frac{h}{s}\sin sx + \frac{1}{s}\int_0^x \sin s(x-\tau)\,q(\tau).\varphi(\tau,\lambda)\,d\tau\right|$$

$$\leq \frac{|h|}{|s|}.|\sin sx| + \frac{1}{|s|}\int_0^x |\sin s(x-\tau)|\,|q(\tau)|\,|\varphi(\tau,\lambda)|\,d\tau$$

$$\leq |h|.|s|^{-1}.e^{|t|x} + |s|^{-1}\int_0^x e^{|t|(x-\tau)}.|q(\tau)|.\mu.e^{|t|\tau}\,d\tau$$

$$= |s|^{-1}e^{|t|x}\Big[\underbrace{|h| + \int_0^x \mu\,|q(\tau)|\,d\tau}_{c_1}\Big]$$

$$\Rightarrow |\varphi(x,\lambda) - \cos sx| \leq c_1.|s|^{-1}e^{|t|x}$$

Diğer eşitsizliklerde benzer şekilde ispatlanır.

$$\ell(y) = -y'' + q(x)y = \lambda y \quad (3.1)$$

$$\left.\begin{array}{l}(a)\ y'(0) - h y(0) = 0 \\ (b)\ y'(\pi) + H y(\pi) = 0\end{array}\right\} (3.3)$$

problemini incelemek için

$$y_1(0) = \frac{y_1'(0)}{h}$$

$$\left.\begin{array}{l}y(0) = 1\ ,\ y'(0) = h \\ y'(\pi) + H y(\pi) = 0\end{array}\right\} (3.6)$$

olmak üzere (3.1)-(3.6) problemini gözönüne alalım.

(3.1)-(3.3) problemi ile (3.1)-(3.6) problemi arasında aşağıdaki ilişkiler vardır.
(özdeğerler ve özfonksiyonlar arasındaki ilişkiler)

I. λ_0, (3.1)-(3.6) probleminin bir özdeğeri, y_0'da bu özdeğere karşılık gelen özfonksiyon olsun.
O halde (Not: y_0 bir özfonksiyon ise denklemi ve sınır şartlarını sağlar yani $y(0)=1$, $y'(0)=h$'dir)

$$y_0'(0) - h y_0(0) = h - h \cdot 1 = 0 \text{ 'dır.}$$

Görüldüğü üzere (3.3) a şartı sağlanmıştır. λ_0 (3.1)-(3.3) probleminin de bir özdeğeri ve y_0'da bu özdeğere karşı gelen özfonksiyondur.

II. λ_1, (3.1)-(3.3) probleminin bir özdeğeri; y_1'de bu özdeğere karşılık gelen özfonksiyon olsun. Ayrıca $z_1 = \frac{y_1(x)}{y_1(0)}$ fonksiyonunu gözönüne alalım. Burada $y_1(0) \neq 0$'dır.

Çünkü, eğer $y_1(0)=0$ olsaydı $y_1'(0) - h\underbrace{y_1(0)}_{=0} = 0 \Rightarrow y_1'(0)=0$ olurdu. Bu taktirde y_1

$$\left.\begin{array}{l} -y''+q(x)y = \lambda y \\ y(0)=0,\ y'(0)=0 \end{array}\right\}$$

Cauchy probleminin çözümü olurdu ki bu bir çelişkidir. Çünkü Cauchy probleminin tek çözümü aşikar çözümdür. Dolayısıyla bu durumda y_1 özfonksiyon olamaz.

z_1, λ_1'e karşı gelen özfonksiyondur. Ayrıca;

$$z_1(0) = \frac{y_1(0)}{y_1(0)} = 1, \qquad z_1' = \frac{y_1'(x)}{y_1(0)} \Rightarrow z_1'(0) = \frac{y_1'(0)}{y_1(0)} = \frac{hy_1(0)}{y_1(0)} = h$$

olur ki; λ_1 (3.1)-(3.6) probleminin bir özdeğeri ve z_1'de bu özdeğere karşılık gelen özfonksiyondur.

III. λ_2, (3.1)-(3.3) probleminin bir özdeğeri, y_2, y_3 de bu özdeğere karşılık gelen herhangi iki özfonksiyon olsun. λ_2 özdeğeri aynı zamanda (II'den) (3.1)-(3.6) probleminin de bir özdeğeridir ve

$$z_2(x) = \frac{y_2(x)}{y_2(0)}, \quad z_3(x) = \frac{y_3(x)}{y_3(0)}$$

fonksiyonları da bu özdeğere karşı gelen özfonksiyonlardır.

Dolayısıyla;

$$-z_i'' + q(x) z_i = \lambda z_i \qquad (i=2;3)$$
$$z_i(0) = 1 \quad z_i'(0) = h$$

Cauchy probleminin çözümü tek olduğundan $z_2 = z_3$ elde edilir.

$$\frac{y_2(x)}{y_2(0)} = \frac{y_3(x)}{y_3(0)} \Rightarrow y_3(x) = \frac{y_3(0)}{y_2(0)} \cdot y_2(x)$$ dır. Buna göre y_2 ve y_3 özfonksiyonları lineer bağımlıdır. Yani (3.1)-(3.3) probleminin her özdeğerine karşı gelen lineer bağımsız özfonksiyonların sayısı birdir. O halde (3.1)-(3.3) probleminin her özdeğerinin katlılığı tektir.

IV. (I), (II) ve (III)'den görülür ki (3.1)-(3.3) sınır değer problemi yerine (3.1)-(3.6) probleminin özdeğer ve özfonksiyonlarının asimptotik davranışları incelenebilir.

$\varphi(x,\lambda)$, (3.1) denkleminin

$$\varphi(0,\lambda) = 1, \quad \varphi'(0,\lambda) = h$$

koşullarını sağlayan çözümü olduğundan λ sayısının özdeğer olabilmesi için $\varphi(x,\lambda)$'nın

$$\varphi'(\pi,\lambda) + H\varphi(\pi,\lambda) = 0$$

koşulunu da sağlaması gerekir. Eğer $\lambda = s^2$ alırsak ve

$$w(\lambda) = \varphi'(\pi, \lambda) + H\varphi(\pi, \lambda) = 0$$

dersek

$$w(\lambda) = w(s^2) = w_1(s)$$

olur. Böylece $w_1(s) = 0$ denkleminin köklerinin kareleri (3.1)-(3.6) probleminin özdeğerleri olacaktır. Özdeğerler reel sayı olduğundan kökler ya reel ya da $s = it$ $(t \in \mathbb{R},\ t \neq 0)$ şeklindedir.