Sigma Notasyonu

$1+2+\dots+n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$, $\underbrace{\sum_{i=1}^{n} i^2}_{=1^2+2^2+\dots+n^2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $\underbrace{\sum_{i=1}^{n} i^3}_{=1^3+2^3+\dots+n^3} = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

Tümevarım

$P(n) \rightarrow$ Doğal sayı olayı

$n=1$ için doğruluğu gösterilir.
$n=k$ için doğru olduğu kabul edilir
ve $n=k+1$ için doğru olduğu ispatlanırsa
$P(n)$ olayı tüm $n \in \mathbb{N}$ için doğrudur denir.

$P(n) = 1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2} = F(n)$

$P(1) = 1 \quad = \quad F(1) = \frac{1.(1+1)}{2} = \frac{1.2}{2} = 1$ ✓

$P(k) = 1+2+3+\dots+k = \frac{k(k+1)}{2} = F(k)$ kabul ettik.

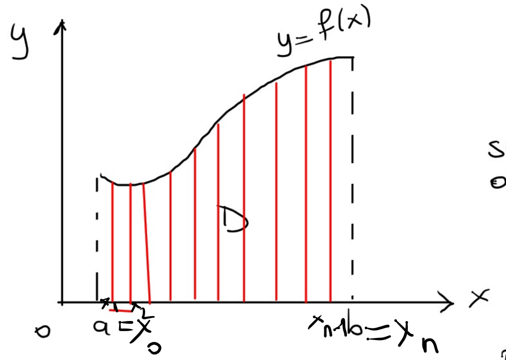
$P(k+1) = \underbrace{1+2+3+\dots+k}_{\frac{k(k+1)}{2}} + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$

$= \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}$

$= \frac{(k+1)(k+2)}{2} = \frac{(k+1).[(k+1)+1]}{2}$

$= F(k+1)$

Riemann Toplamları



P kümesi reel eksende a ile b arasındaki sıralı, sonlu sayıdaki noktaların bir kümesi olsun.

$P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$

Burada $a=x_0<x_1<x_2<\dots<x_n=b$ 'dir. P kümesine $[a,b]$ aralığının bir bölümü (parçalanışı bölüntüsü) denir. $[x_{i-1}, x_i]$ $1 \le i \le n$ alt aralıklarına da P bölümünün alt aralıkları denir. Her bir alt aralığın uzunluğu

NOT: Tümevarım: $P(n)$ bir doğal sayı olayı. $(n \in \mathbb{N})$

1°) $P(1)$'in doğru olduğu gösterilir.
2°) $P(n)$'in doğru olduğu kabul edilir ve
3°) $P(n+1)$'in doğru olduğu ispat edilirse $P(n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ için doğrudur.

Ör/ $1+2+\dots+n = \frac{n.(n+1)}{2}$

$n=1 \Rightarrow 1 = \frac{1.(1+1)}{2} = \frac{2}{2}$ ✓

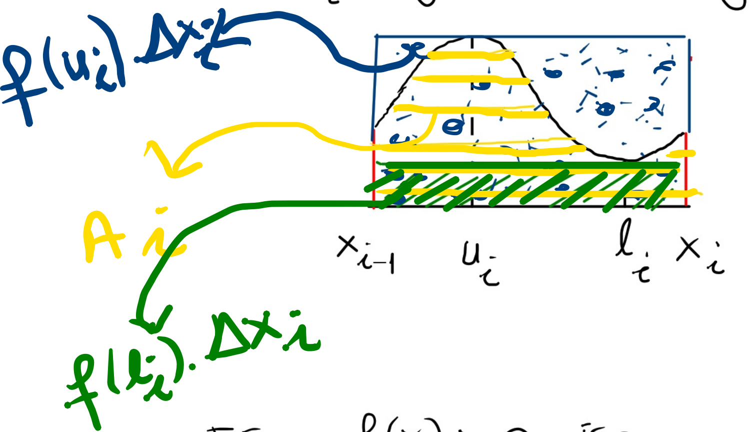
$n=n \Rightarrow 1+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ kabul ettik

$n=n+1 \Rightarrow \underbrace{1+\dots+n}_{\frac{n.(n+1)}{2}} + n+1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$?

$\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}$
$= \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ ✓

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ dir. $\left(\Delta x_i = \dfrac{b-a}{n}\right)$

Δx_i sayılarının en büyüğüne P bölümünün normu denir. $\max\limits_{1\le i\le n}(\Delta x_i) = \|P\|$ şeklinde gösterilir.



f fonksiyonu P bölümünün herbir $[x_{i-1}, x_i]$ alt aralığında sürekli olduğundan bu aralıktaki noktalarda maksimum ve minimum değerlerini alır.

Buna göre $x_{i-1} \le x \le x_i$ iken

$$f(l_i) \le f(x) \le f(u_i)$$

olacak şekilde $[x_{i-1}, x_i]$ aralığında l_i ve u_i sayıları vardır.

Eğer $f(x) \geq 0$ ise o zaman $f(l_i).\Delta x_i$ yeşil ile taralı alanı, $f(u_i).\Delta x_i$ ise mavi ile taralı alanı verir.

A_i ile $y=f(x)$ eğrisinin altında, x-ekseninin üzerinde ve $x=x_{i-1}$, $x=x_i$ doğruları ile sınırlı bölgenin alanını gösterirsek

$$f(l_i).\Delta x_i \le A_i \le f(u_i).\Delta x_i$$

olur.

Eğer $f(x) \le 0$ ise $f(l_i).\Delta x_i$ ve $f(u_i).\Delta x_i$'nin biri veya her ikisi negatif olabilir, bu durumda bunlar x-ekseni altında kalan dikdörtgenlerin negatifini verirler. Fakat durum ne olursa olsun

$$f(l_i)\cdot\Delta x_i \leq f(u_i)\cdot\Delta x_i$$

dir.

Tanım (Alt Riemann – Üst Riemann)

f fonksiyonu ve P bölümü için

$$L(f,P)=\sum_{i=1}^{n} f(l_i)\cdot\Delta x_i \longrightarrow \text{alt Riemann toplamı}$$

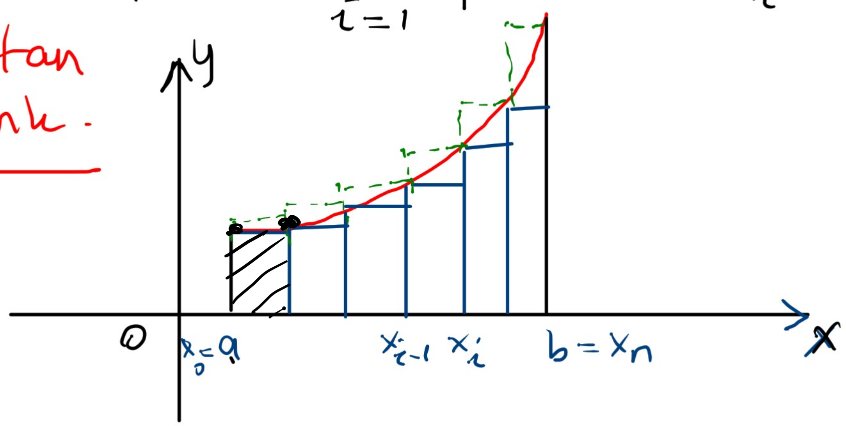
$$U(f,P)=\sum_{i=1}^{n} f(u_i)\cdot\Delta x_i \longrightarrow \text{üst Riemann toplamı}$$

denir.

$$L(f,P)=\sum_{i=1}^{n} f(l_i)\cdot\Delta x_i = f(l_1)\cdot\Delta x_1+f(l_2)\cdot\Delta x_2+\dots+f(l_n)\cdot\Delta x_n$$

$$U(f,P)=\sum_{i=1}^{n} f(u_i)\cdot\Delta x_i = f(u_1)\cdot\Delta x_1+f(u_2)\cdot\Delta x_2+\dots+f(u_n)\cdot\Delta x_n$$

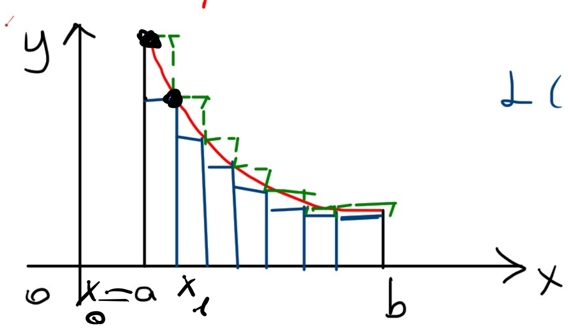
Artan fonk.



$$L(f,P)=\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\cdot\Delta x_i \qquad (1\leq i\leq n)$$

$$U(f,P)=\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x_i$$

Azalan fonk.



$$L(f,P)=\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot\Delta x_i \qquad (1\leq i\leq n)$$

$$U(f,P)=\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\cdot\Delta x_i$$

Belirli İntegral

Eğer her seferinde birbirlerine daha yakın ve daha çok sayıdaki noktalara sahip P bölümleri için $L(f,P)$ ve $U(f,P)$ Riemann toplamlarını hesaplarsak, limit durumunda bu toplamlar ortak bir değere yakınsayacaklardır ki bu $[a,b]$ aralığında $f(x)\geq 0$ ise $y=f(x)$, $x=a$, $x=b$ ve $y=0$ ile sınırlı olan bölgenin alanını verir.

* Herhangi iki reel sayı arasında daima başka bir reel sayı bulunacağından her P bölümü için

$$L(f,P)\leq I\leq U(f,P)$$

olacak şekilde en azından bir I reel sayısı vardır. Böyle tek bir sayı varsa, buna f'in $[a,b]$ aralığındaki belirli integrali denir ve

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

şeklinde gösterilir.

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \|P\|\to 0}} L(f,P) \le I_1 \le \lim_{\substack{n\to\infty \\ \|P\|\to 0}} U(f,P)$$

I_1: f'in $[a,b]$'deki belirli integrali

$$\int_a^b \underbrace{f(x)}_{\text{integrand}}\, dx = I_1$$

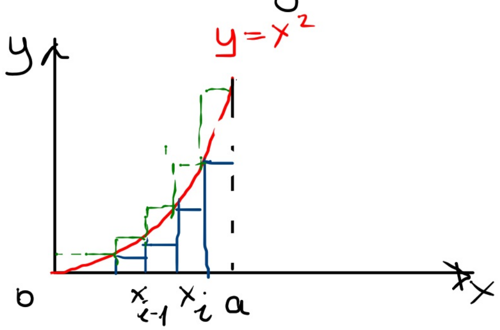
üst sınır: b

alt sınır: a

dx: integral değişkeninin diferansiyeli

I_1: bir sayıdır, x'e bağlı değildir. f'e ve a ile b'ye bağlıdır. ⟶ Riemann toplamları yakınsak ise f fonksiyonuna $[a,b]$ aralığında integrallenebilir denir.

Ör/ $a>0$ olmak üzere $f(x)=x^2$ nin $[0,a]$ aralığında integrallenebilir olduğunu gösteriniz ve $\int_0^a x^2\,dx$ integralini hesaplayınız.



$$\Delta x_i = \frac{a-0}{n} = \frac{a}{n}$$

$$x_{i-1} = (i-1)\cdot\frac{a}{n}$$

$$x_i = i\,\frac{a}{n}$$

$$L(f,P) = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\cdot \Delta x_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f\left((i-1)\cdot\frac{a}{n}\right)\cdot\frac{a}{n}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left[(i-1)\cdot\frac{a}{n}\right]^2\cdot\frac{a}{n} = \sum_{i=1}^{n}\frac{a^3}{n^3}\cdot(i-1)^2$$

$$L(f,P) = \frac{a^3}{n^3} \sum_{i=1}^{n} (i-1)^2$$

$$= \frac{a^3}{n^3} \frac{(n-1).n(2n-1)}{6}$$

$$U(f,P) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) . \Delta x_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f\left(i.\frac{a}{n}\right).\frac{a}{n}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(i.\frac{a}{n}\right)^2 . \frac{a}{n}$$

$$= \frac{a^3}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2$$

$$= \frac{a^3}{n^3} . \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\lim_{n\to\infty} L(f,P) = \lim_{n\to\infty} \frac{a^3}{n^3} . \frac{(n-1).(n).(2n-1)}{6}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{a^3}{6} . \left[\frac{\overbrace{(2n-1)(n)}^{2n^2-n}(n-1)}{n^3} \right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{a^3}{6} \left[\frac{2n^3-3n^2+n}{n^3} \right]$$

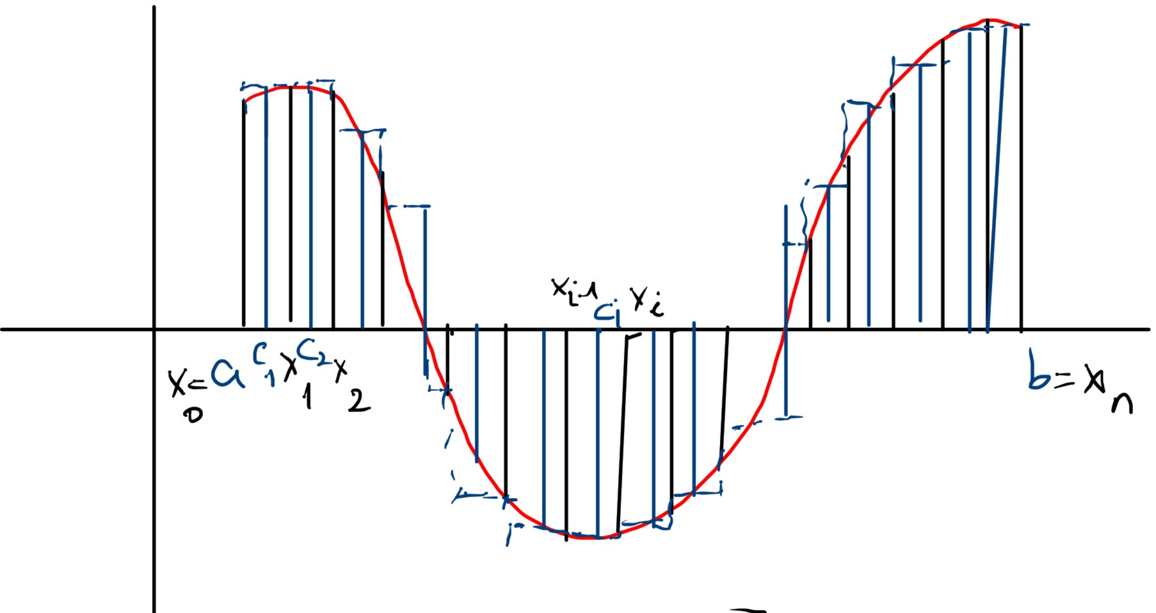
$$= \frac{a^3}{6} \lim_{n\to\infty} \left[\frac{\cancel{n^3}\left(2 - \frac{3\cancel{n^2}}{n^{\cancel{3}}} + \frac{\cancel{n}}{n^{\cancel{3}2}}\right)}{\cancel{n^3}} \right]$$

$$= \frac{a^3}{3}$$

$$\lim_{n\to\infty} U(f,P) = \lim_{n\to\infty} \frac{a^3}{n^3} \left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right] = \frac{a^3}{3}$$

$$\frac{a^3}{3} \leq I_i = \int_0^a x^2 dx \leq \frac{a^3}{3} \implies \int_0^a x^2 dx = \frac{a^3}{3}$$

Genel Riemann Toplamı



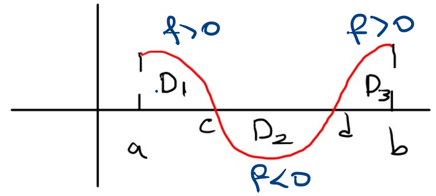
$c_i \in [x_{i-1}, x_i]$

$$R(f,P) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \cdot \Delta x_i$$

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \|P\|\to 0}} R(f,P) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \cdot \Delta x_i$$

$$= \int_a^b f(x)\,dx$$

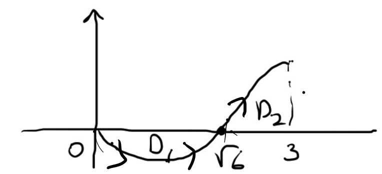
NOT: Eğer $[a,b]$'de $f(x) \leq 0$ ise o zaman $\int^b f(x)\,dx$ integralinin değeri negatif olacaktır. Bu durumda integralin sonucunun bir D bölgesinin alanı olabilmesi için elde edilen sonucun mutlak değerinin alınması gerekir.



$$A = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \left| \int_c^d f(x)\,dx \right| + \int_d^b f(x)\,dx$$

$$D = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \qquad A(D) = A(D_1) + |A(D_2)| + A(D_3)$$

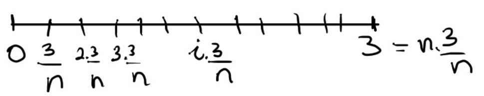
$$\left| \int_0^{\sqrt{6}} f(x)\,dx \right| + \int_{\sqrt{6}}^3 f(x)\,dx =$$



Ör/ $\int_0^3 (x^3-6x)\,dx$'i Riemann toplamı ile hesaplayınız.

$[a,b]=[0,3] \Rightarrow \Delta x_i = \dfrac{3-0}{n} = \dfrac{3}{n}$

$\Delta x_i = \dfrac{b-a}{n}$



$$\underbrace{R(f,P)}_{\text{Genel Riemann toplamı}} = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{i\cdot 3}{n}\right)^3 - 6\cdot\frac{i\cdot 3}{n} \right]\cdot\frac{3}{n}$$

$$= \frac{81}{n^4}\sum_{i=1}^{n} i^3 - \frac{54}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i$$

$$= \frac{81}{n^4}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 - \frac{54}{n^2}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]$$

$$\lim_{n\to\infty} R(f,P) = \lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{81}{4}\left[\frac{n^2(n+1)^2}{n^4}\right] - 27\cdot\left[\frac{n(n+1)}{n^2}\right] \right\} = \frac{81}{4} - 27 = -\frac{27}{4}$$

Elde edilen sonuç bir alanın değeri olamaz. Bu sonuç sadece integralin değeridir.

x^3-6x eğrisi, x-ekseni ve $x=0$, $x=3$ doğruları ile sınırlı bölgenin alanı sorulsaydı

$$A = \left|\int_0^{\sqrt6} f(x)\,dx\right| + \int_{\sqrt6}^{3} f(x)\,dx = 9+\frac{9}{4} = \frac{45}{4}$$

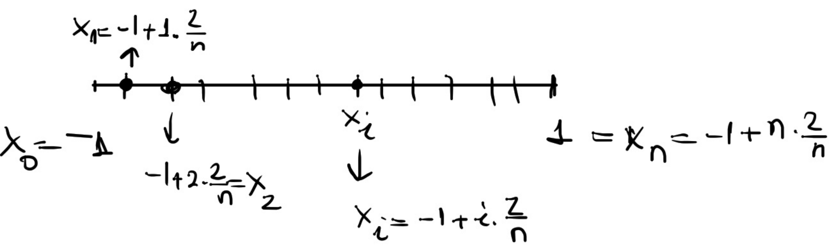
şeklinde hesaplanır.

$$\frac{x^4}{4}-3x^2\Big|_0^{\sqrt6} = \frac{36}{4}-18 = -9$$

$$\frac{x^4}{4}-3x^2\Big|_{\sqrt6}^{3} = \left(\frac{81}{4}-27\right)-\left(\frac{36}{4}-18\right) = \frac{-27}{4}-(-9) = \frac{9}{4}$$

Ör/ $\int_{-1}^{1}(x+1)\,dx$ integralini Riemann toplamı ile hesaplayınız.

$$\Delta x_i = \frac{1-(-1)}{n} = \frac{2}{n} \qquad x_i = -1+i\cdot\frac{2}{n}$$



$$R(f,P) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f\left(-1+i.\frac{2}{n}\right).\frac{2}{n}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left[\left(-1+i.\frac{2}{n}\right)+1\right].\frac{2}{n}$$

$$= \frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i$$

$$= \frac{4}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}$$

$$\int_{-1}^{1}(x+1)\,dx = \lim_{n\to\infty} R(f,P)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{4}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2} = \frac{4}{2} = 2\ br^2$$

Belirli İntegralin Özellikleri

f ve g, $[a,b]$ aralığında integreedilebilir fonksiyonlar olsun.

1°) $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0$

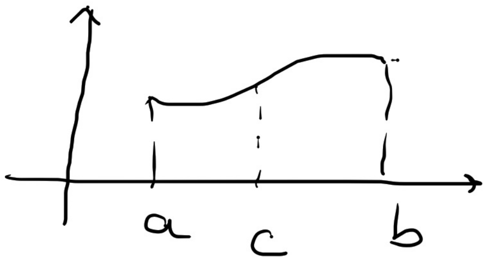
2°) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

3°) k, ℓ sbt sayılar olmak üzere

$$\int_a^b \left[k\cdot f(x) \mp \ell\cdot g(x) \right] dx = k\cdot\int_a^b f(x)\,dx \mp \ell\int_a^b g(x)\,dx$$

4°) $c \in [a,b]$ olmak üzere

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$



5°) $a \le x \le b$ için $f(x) \le g(x)$ ise

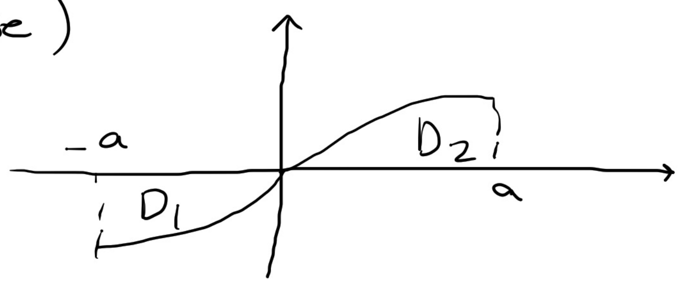
$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$$

6°) $a \le x \le b$ için

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$$

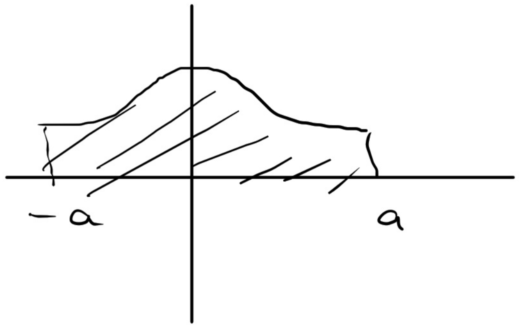
7°) Eğer f tek fonksiyon ise $\quad (f(-x) = -f(x)$ ise$)$

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$$



8°) Eğer f çift fonksiyon ise $\quad (f(-x) = f(x)$ ise$)$

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$$



9°) Maks - min eşitsizliği

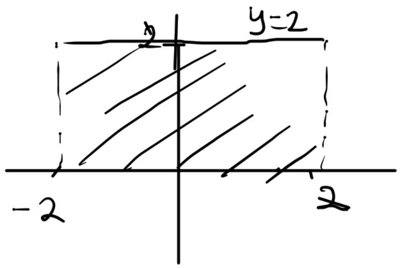
Eğer $\max f$ ve $\min f$ f'in $[a,b]$ aralığındaki maksimum ve minimum değerleri ise

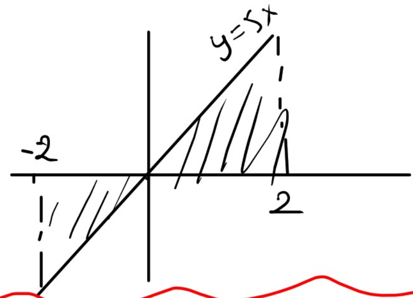
$$\min f\,(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le \max f \cdot (b-a)$$

dır.

Örnekler

1) $\int_{-2}^{2} (2+5x)\,dx = \int_{-2}^{2} 2\,dx + \int_{-2}^{2} 5x\,dx = 4.2 + 0 = 8$



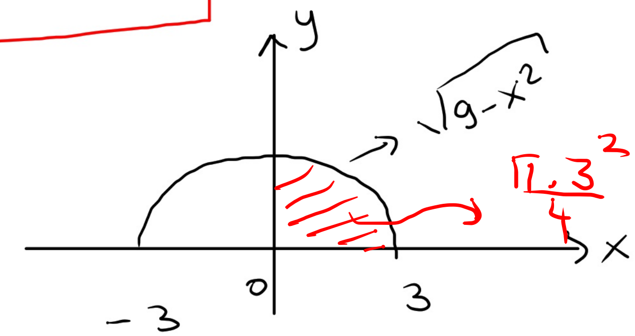


2) $\int_{0}^{3} (2+x)\,dx = \frac{(2+5).3}{2} = \frac{21}{2}$

3) $\int_{-3}^{3} \sqrt{9-x^2}\,dx = 2.\int_{0}^{3}\sqrt{9-x^2}\,dx$

$= 2.\frac{\pi.3^2}{4}$

$= \frac{9\pi}{2}$



4) $\pi \leq \int_{0}^{\pi} \sqrt{1+3\cos^2 x}\,dx \leq 2\pi$ eşitsizliğini gerçekleyiniz.

$f = \sqrt{1+3\cos^2 x}$

$\min f = 1$

$\max f = 2$

$\forall x \in [0,\pi] \qquad -1 \leq \cos x \leq 1$

$\forall x \in [0,\pi] \qquad 1 \leq \sqrt{1+3\cos^2 x} \leq 2$

$\underbrace{1}_{\min f}.\underbrace{(\pi-0)}_{(b-a)} \leq \int_{0 \to a}^{\pi \to b} \sqrt{1+3\cos^2 x}\,dx \leq \underbrace{2}_{\max f}.\underbrace{(\pi-0)}_{b-a}$

İntegraller için Ortalama Değer Teoremi

Eğer, f $[a,b]$ aralığında sürekli ise o zaman

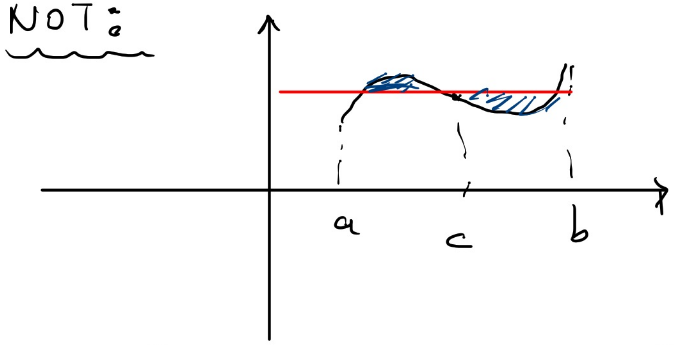
$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\cdot f(c)$$

olacak şekilde bir $c \in [a,b]$ noktası vardır.

Burada $f(c)$'ye $f(x)$ fonksiyonunun ortalama değeri denir.

$$\tilde{f} = f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

NOT:

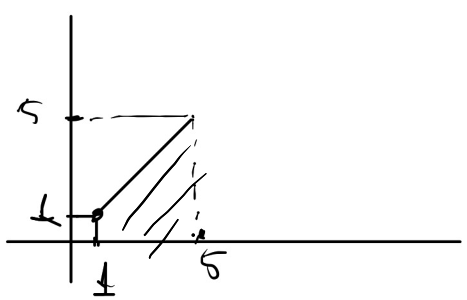


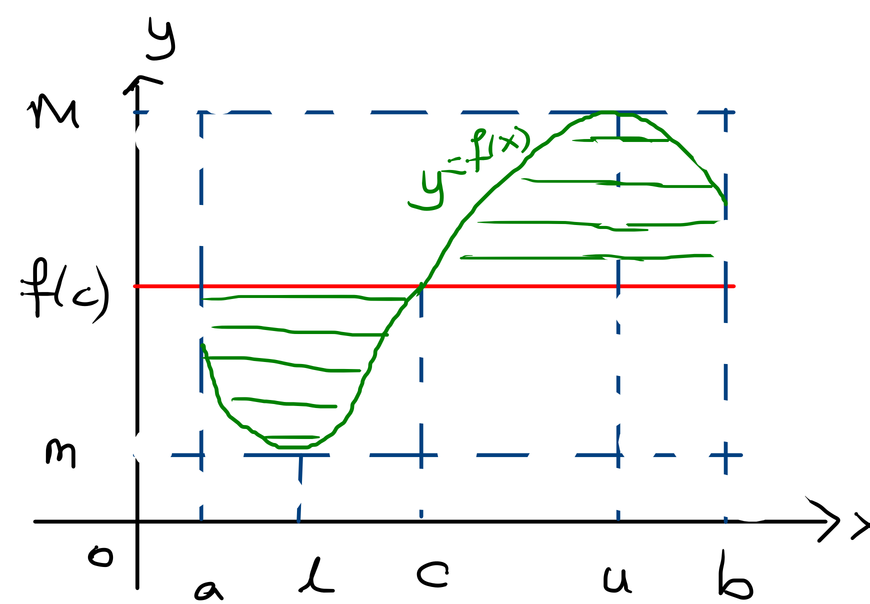
Bu sonuca göre $y=f(x)$ eğrisinin altında ve $y=f(c)$ doğrusunun ~~eğrisinin~~ üstünde kalan alan ile $y=f(x)$ eğrisinin üstünde ve $y=f(c)$ doğrusunun altında kalan alanlar birbirine eşittir.

Ör/ $f(x)=2x$ fonksiyonunun $[1,5]$ aralığında ortalama değerini bulunuz.

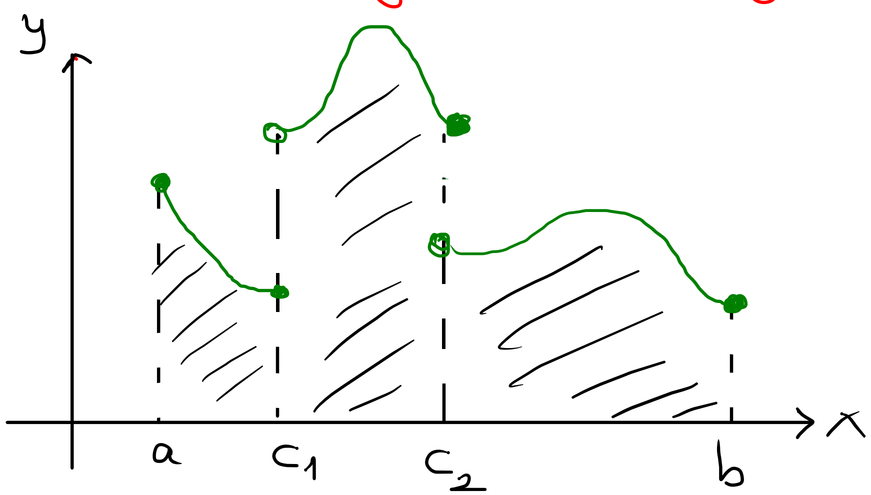
$$f(c) = \frac{1}{5-1}\int_1^5 2x\,dx = \frac{1}{4}\cdot 2\int_1^5 x\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{(1+5)\cdot 4}{2}$$

$$= 6$$





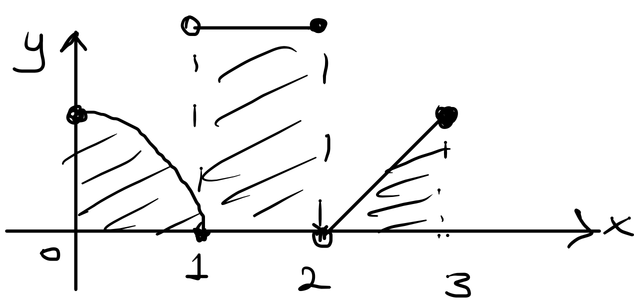
Parçalı Sürekli Fonksiyonların İntegralleri



$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & a \le x \le c_1 \\ f_2(x) & c_1 < x \le c_2 \\ f_3(x) & c_2 < x \le b \end{cases}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{c_1} f_1(x)\,dx + \int_{c_1}^{c_2} f_2(x)\,dx + \int_{c_2}^{b} f_3(x)\,dx$$

Ör/ $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & 0 \le x \le 1 \\ 2 & 1 < x \le 2 \\ x-2 & 2 < x \le 3 \end{cases}$ $\quad \int_0^3 f(x)\,dx = ?$



$$\int_0^3 f(x)dx = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx + \int_1^2 2\,dx + \int_2^3 (x-2)\,dx$$

$$= \frac{\pi}{4} + 2.1 + \frac{1.1}{2} = \frac{\pi}{4} + 2 + \frac{1}{2} = \frac{10+\pi}{4}$$