$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ vektör değerli fonksiyonunun tanım kümesi t değişkenine bağlı olan herbir bileşini için ortak olan tanım bölgesidir.

Vektörel limit

* $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ vektör değerli bir fonksiyon, t_0 herhangi bir sayı olsun. Eğer $\vec{l} = l_1\vec{i} + l_2\vec{j} + l_3\vec{k}$ olmak üzere $\lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}(t) = \vec{l}$ oluyorsa $\vec{r}(t)$'nin $t\to t_0$ iken limiti $\vec{l}$'dir denir.

$$\lim_{t\to t_0} \vec{r}(t) = \lim_{t\to t_0}\left[x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}\right] = \underbrace{\left[\lim_{t\to t_0} x(t)\right]\vec{i}}_{l_1\vec{i}} + \underbrace{\left[\lim_{t\to t_0} y(t)\right]\vec{j}}_{l_2\vec{j}} + \underbrace{\left[\lim_{t\to t_0} z(t)\right]\vec{k}}_{l_3\vec{k}} = \vec{l}$$

* $\varepsilon > 0$ için $0 < |t - t_0| < \delta$ iken $|\vec{r}(t) - \vec{l}| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa $t \to t_0$ iken $\vec{r}(t)$'nin limiti $\vec{l}$'dir denir.

Ö/ $\vec{r}(t) = \cos t\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j} + t\vec{k} \Rightarrow \lim\limits_{t\to \pi/4} \vec{r}(t) = ?$

$$\lim_{t\to \pi/4} \vec{r}(t) = \lim_{t\to \pi/4}\left[\cos t\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j} + t\vec{k}\right] = \left[\lim_{t\to \pi/4}\cos t\right]\vec{i} + \left[\lim_{t\to \pi/4}\sin t\right]\vec{j} + \left[\lim_{t\to \pi/4} t\right]\vec{k}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j} + \frac{\pi}{4}\vec{k}$$

Teorem:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}(t) = \vec{a} \\ \lim\limits_{t\to t_0} \vec{R}(t) = \vec{b}\end{array}\right\}$$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere

1°) $\lim\limits_{t\to t_0} \left[\vec{r}(t) \mp \vec{R}(t)\right] = \vec{a} \mp \vec{b}$

2°) $\lim\limits_{t\to t_0} \left[\vec{r}(t) . \vec{R}(t)\right] = \vec{a} . \vec{b}$

3°) $\lim\limits_{t\to t_0} \left[\lambda \vec{r}(t)\right] = \lambda \left(\lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}(t)\right) = \lambda \vec{a}$

4°) $\lim\limits_{t\to t_0} \left[\vec{r}(t) \times \vec{R}(t)\right] = \left[\lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}(t)\right] \times \left[\lim\limits_{t\to t_0} R(t)\right]$

$= \vec{a} \times \vec{b}$

Vektörel Süreklilik

$\vec{r}(t)$, $[a,b]$ aralığında tanımlı vektör değerli bir fonksiyon olsun. Eğer $t_0 \in [a,b]$ için $\lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0)$ oluyorsa o zaman $t = t_0$ noktasında $\vec{r}(t)$ fonksiyonu süreklidir denir.

$$\lim_{t\to t_0} [x(t)] = x(t_0)$$

$$\lim_{t\to t_0} [y(t)] = y(t_0)$$

$$\lim_{t\to t_0} [z(t)] = z(t_0)$$

$$\lim_{t\to t_0} \vec{r}(t) = \lim_{t\to t_0} \left[x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}\right]$$

$$= x(t_0)\vec{i} + y(t_0)\vec{j} + z(t_0)\vec{k} = \vec{r}(t_0)$$

Ör/ $\vec{r}(t) = \cos t\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j} + \underbrace{\lfloor t \rfloor}\,\vec{k}$

her tamsayıda süreksiz bir fonksiyon olduğundan $\vec{r}(t)$ fonksiyonu da her tamsayıda süreksizdir.

Vektörel Türev

Vektör değerli bir fonksiyonun türevi bileşenlerinin türevleri ile oluşan bir vektör değerli fonksiyondur.

$$\frac{d}{dt}\vec{r}(t) = \lim_{h\to 0}\frac{\vec{r}(t+h)-\vec{r}(t)}{h} = \lim_{h\to 0}\left[\frac{\left(x(t+h)\vec{i}+y(t+h)\vec{j}+z(t+h)\vec{k}\right)-\left(x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}\right)}{h}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\left\{\left(\frac{[x(t+h)-x(t)]}{h}\right)\vec{i} + \left(\frac{[y(t+h)-y(t)}{h}\right)\vec{j} + \left(\frac{z(t+h)-z(t)}{h}\right)\vec{k}\right]$$

$$= \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = \vec{v} \rightarrow \text{hız vektörü}$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k} = \vec{a} \rightarrow \text{ivme vektörü}$$

$|\vec{v}| \rightarrow$ sürat

$|\vec{a}| \rightarrow$ ivme

Ör/ $\vec{r}(t)=t^3\vec{i}+\sin t\,\vec{j}+e^{2t}\vec{k}$ vektör değerli fonksiyonunun 1. ve 2. mertebe türevlerini bulunuz.

$$\vec{r}\,'(t)=3t^2\vec{i}+\cos t\,\vec{j}+2e^{2t}\vec{k}$$

$$\vec{r}\,''(t)=6t\,\vec{i}-\sin t\,\vec{j}+4e^{2t}\vec{k}$$

Ör/ Herhangi bir t anındaki pozisyonu $\vec{r}=3\cos(wt)\vec{i}+4\cos(wt)\vec{j}+5\sin(wt)\vec{k}$ olan parçacığın hız vektörünü, hızını ve ivmesini bulunuz. Yaptığı hareketi tanımlayınız.

$$\vec{r}\,'(t)=\vec{v}(t)=-3w\sin wt\,\vec{i}-4w\sin wt\,\vec{j}+5w\cos wt\,\vec{k}\rightarrow \text{hız vektörü}$$

$$v=|\vec{v}(t)|=\sqrt{(-3w\sin wt)^2+(-4w\sin wt)^2+(5w\cos wt)^2}=\sqrt{9w^2\sin^2wt+16w^2\sin^2wt+25w^2\cos^2wt}$$

$$=\sqrt{25w^2(\sin^2wt+\cos^2wt)}$$

$$=5w$$

$$\vec{r}\,''(t)=\vec{v}\,'(t)=-3w^2\cos wt\,\vec{i}-4w^2\cos wt\,\vec{j}-5w^2\sin wt\,\vec{k}=\vec{a}$$

$$a=|\vec{a}|=\sqrt{9w^4\cos^2wt+16w^4\cos^2wt+25w^4\sin^2wt}$$

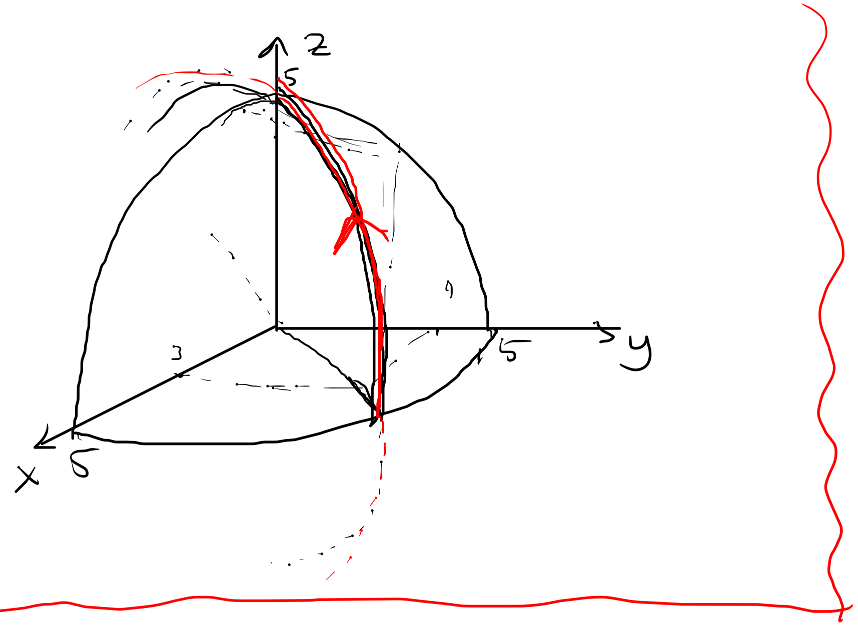
$$=\sqrt{25w^4\cos^2wt+25w^4\sin^2wt}$$

$$=5w^2$$

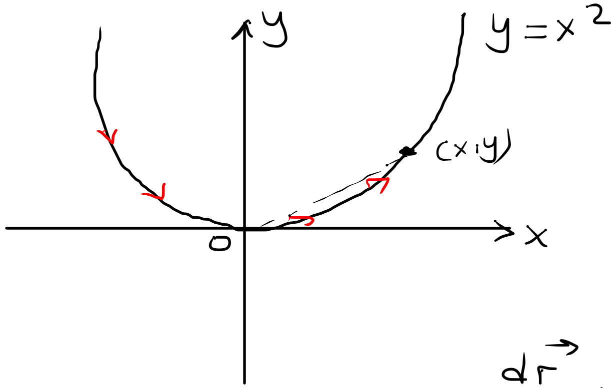
$$\left.\begin{aligned}x&=3\cos wt\\ y&=4\cos wt\end{aligned}\right\}\ \frac{x}{y}=\frac{3}{4}\Rightarrow y=\frac{4x}{3}$$

$$z=5\sin wt$$

$$x^2+y^2+z^2=25\rightarrow \text{küre}$$



Ör/ Bir obje $y=x^2$ düzlem eğrisi boyunca sağa doğru $v=5$ sabit hızıyla hareket ediyor. Objenin $(1,1)$ noktasındaki hız vektörünü ve ivmesini bulunuz.



$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

$$\vec{r} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} = x(t)\vec{i} + x^2(t)\vec{j}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + 2x\cdot\frac{dx}{dt}\vec{j}$$

$$|\vec{v}| = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 4x^2\cdot\left(\frac{dx}{dt}\right)^2} = 5$$

$$\Rightarrow \left(\frac{dx}{dt}\right)^2\left[1+4x^2\right] = 25$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{25}{1+4x^2}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{5}{\sqrt{1+4x^2}}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \left(-5\cdot\frac{8x\cdot\frac{dx}{dt}}{2\cdot\sqrt{1+4x^2}}\right) \Big/ 1+4x^2$$

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{(1,1)} = \frac{5}{\sqrt{1+4}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \Rightarrow \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} = \sqrt{5}\vec{i} + 2\sqrt{5}\vec{j}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{-20x}{(1+4x^2)^{3/2}}\cdot\frac{5}{\sqrt{1+4x^2}} = \frac{-100x}{(1+4x^2)^2}$$

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \left[2\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 2x\frac{d^2x}{dt^2}\right]\vec{j}$$

$$= \frac{-100x}{(1+4x^2)^2}\vec{i} + \left[2\cdot\left(\frac{5}{\sqrt{1+4x^2}}\right) + 2\cdot x\cdot\left(\frac{-100x}{(1+4x^2)^2}\right)\right]\vec{j}$$

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \left[2\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 2x\frac{d^2x}{dt^2}\right]\vec{j}$$

$$= \frac{-100x}{(1+4x^2)^2}\vec{i} + \left[2\cdot\left(\frac{5}{\sqrt{1+4x^2}}\right)^2 + 2\cdot x\cdot\left(-\frac{100x}{(1+4x^2)^2}\right)\right]\vec{j}$$

$$\vec{a}\Big|_{(1,1)} = \frac{-100}{25}\vec{i} + \left[\underbrace{\frac{50}{5}}_{10} - \underbrace{\frac{200}{25}}_{8}\right]\vec{j}$$

$$= -4\vec{i} + 2\vec{j}$$

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{16+4} = 2\sqrt{5}$$

TÜREV KURALLARI

Teorem: $\vec{u}(t)$ ve $\vec{v}(t)$ türevlenebilir vektör değerli fonksiyonlar, $\lambda(t)$'de türevlenebilir skaler bir fonksiyon olsun.

1°) $\frac{d}{dt}\left[\vec{u}(t) \mp \vec{v}(t)\right] = \frac{d\vec{u}}{dt} \mp \frac{d\vec{v}}{dt}$

2°) $\frac{d}{dt}\left[\vec{u}(t)\cdot\vec{v}(t)\right] = \frac{d\vec{u}}{dt}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}$

3°) $\frac{d}{dt}\left[\lambda(t)\cdot\vec{u}(t)\right] = \frac{d\lambda}{dt}\cdot\vec{u}(t) + \lambda(t)\cdot\frac{d\vec{u}}{dt}$

4°) $\frac{d}{dt}\left[\vec{u}(t)\times\vec{v}(t)\right] = \left(\frac{d\vec{u}}{dt}\times\vec{v}\right) + \left(\vec{u}\times\frac{d\vec{v}}{dt}\right)$

5°) $\frac{d}{dt}\left[\vec{u}(\lambda(t))\right] = \frac{d\lambda}{dt}\cdot\frac{d\vec{u}(\lambda(t))}{dt}$

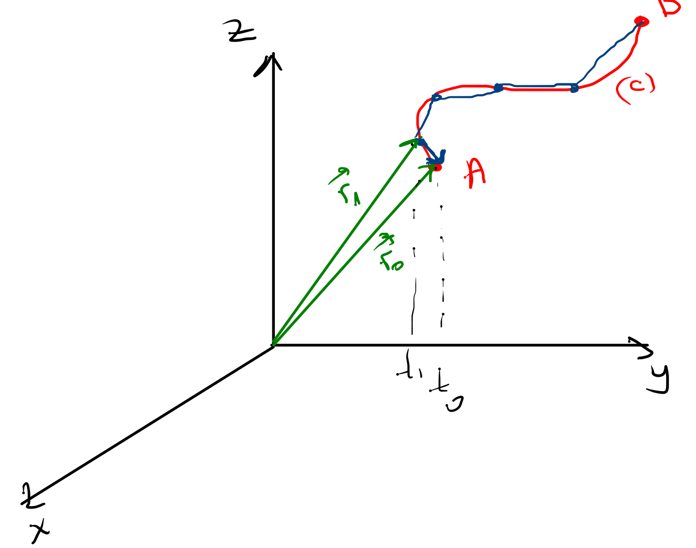
6°) $\frac{d}{dt}|\vec{u}(t)| = \vec{u}(t)\cdot\frac{\vec{u}(t)}{|\vec{u}(t)|} \qquad (\vec{u}(t) \neq 0)$

7°) Sabit uzunluklu bir vektör fonksiyonu için $\vec{r}(t) \perp \vec{r}\,'(t)$ dir. Yani $\vec{r}\cdot\vec{r}\,' = 0$

NOT: Eğer bir $\vec{r}(t)$ vektör fonksiyonu tanım kümesinin her noktasında türevlenebilir ise vektör fonksiyonuna türevlenebilirdir denir.

Eğer türev fonksiyonu sürekli ise ve asla sıfır olmuyorsa $\vec{r}$ tarafından gidilen eğri düzgün eğridir.

Yay uzunluğu



$$\Delta \vec{r}_i = \vec{r}_i - \vec{r}_{i-1} \qquad \Delta t_i = t_i - t_{i-1}$$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} |\vec{r}_i - \vec{r}_{i-1}| \frac{|\Delta t_i|}{|\Delta t_i|} = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\Delta \vec{r}_i}{\Delta t_i} \right| \cdot |\Delta t_i|$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\Delta \vec{r}_i}{\Delta t_i} \right| \cdot \Delta t_i = \int_A^B \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| . dt$$

$$= \int_A^B |\vec{v}|\, dt$$

$$\Rightarrow S = \int_A^B \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt \qquad \underbrace{ds = |\vec{v}|\, dt}_{\text{yay diferansiyeli}}$$

c eğrisi sınırlı ve sürekli

$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} \quad (A \le t \le B)$

fonksiyonu ile tanımlanmış bir eğri olsun. Yani c eğrisi sürekli ve türetilebilen $x(t), y(t), z(t)$ fonksiyonları ile parametrize edilmiş olsun. Bu eğrinin yay uzunluğu $S = \int_A^B \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt$ ile tanımlıdır.

Ör/ $\vec{r}(t) = a\cos t\,\vec{i} + a\sin t\,\vec{j} + bt\,\vec{k}$ dairesel helisinin $(a,0,0)$ ve $(a,0,2\pi b)$ noktaları arasındaki kısmının uzunluğunu bulunuz.

$x = a\cos t$

$y = a\sin t$

$z = bt$

$(a,0,0)$

$$\left.\begin{aligned} a = a\cos t &\rightarrow t = 0, \mp 2\pi, \mp 4\pi, \dots \\ 0 = a\sin t &\rightarrow t = 0, \mp\pi, \mp 2\pi, \dots \\ 0 = bt &\rightarrow t = 0 \end{aligned}\right\} t_1 = 0$$

$(a,0,2\pi b)$

$$\left.\begin{aligned} a = a\cos t &\rightarrow t = 0, \mp 2\pi, \mp 4\pi, \dots \\ 0 = a\sin t &\rightarrow t = 0, \mp\pi, \mp 2\pi, \dots \\ 2\pi b = bt &\rightarrow t = 2\pi \end{aligned}\right\} t_2 = 2\pi$$

$$s = \int_0^{2\pi} \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2+b^2}\, dt$$

$$= \sqrt{a^2+b^2}\, t \Big|_0^{2\pi} = 2\pi\sqrt{a^2+b^2}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = -a\sin t\,\vec{i} + a\cos t\,\vec{j} + b\vec{k}$$

$$\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2} = \sqrt{a^2+b^2}$$

Teğet Birim Vektör.

Hız vektörü $\frac{d\vec{r}}{dt}$ bir $r(t)$ noktasında r parametrik eğrisine teğettir ve orada eğrinin hangi yönde yönlendirildiğini gösterir. Hız vektörünün sıfırdan farklı olduğunu kabul ettiğimizden onu kendi uzunluğuna bölerek bir teğet birim vektör bulabiliriz.

$$\underbrace{\hat{T} = \frac{d\vec{r}/dt}{|d\vec{r}/dt|}} \qquad \vec{\hat{T}}(s) = \frac{d\vec{r}}{ds}$$

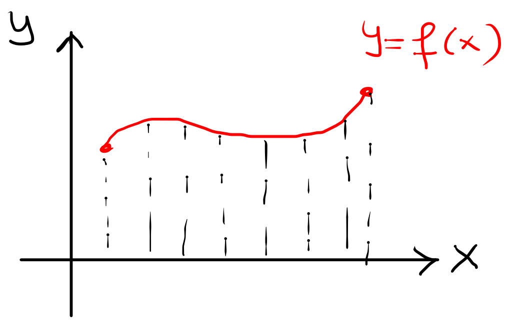
Ör/ $\vec{r}(t) = 3\cos t\,\vec{i} + 3\sin t\,\vec{j} + t^2\vec{k}$ fonksiyonunun teğet birim vektörünü bulunuz.

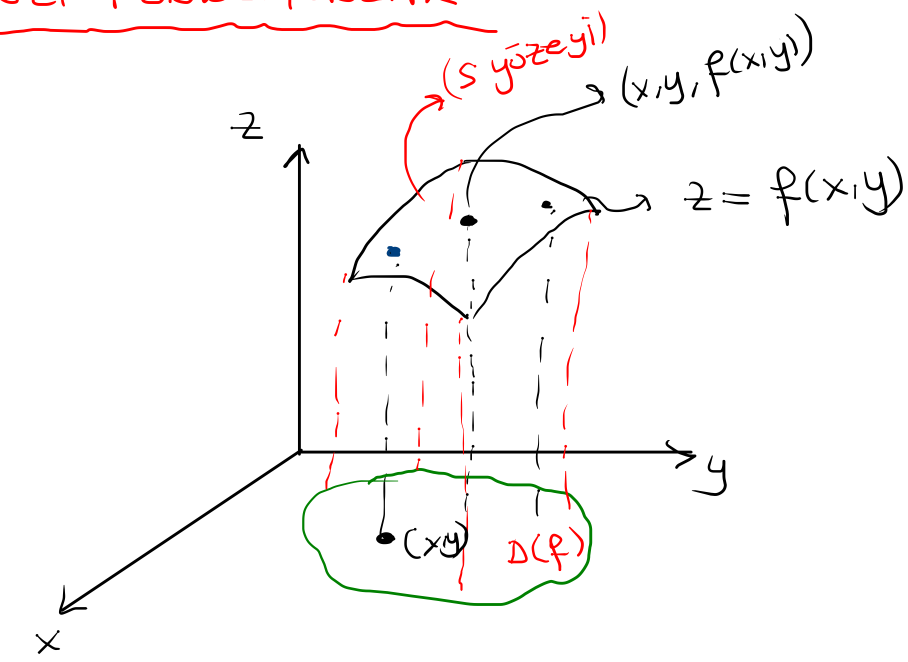
$$\frac{d\vec{r}}{dt} = -3\sin t\,\vec{i} + 3\cos t\,\vec{j} + 2t\,\vec{k}$$

$$\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \sqrt{9\sin^2 t + 9\cos^2 t + 4t^2} = \sqrt{9+4t^2}$$

$$\hat{\vec{T}} = \frac{-3\sin t}{\sqrt{9+4t^2}}\vec{i} + \frac{3\cos t}{\sqrt{9+4t^2}}\vec{j} + \frac{2t}{\sqrt{9+4t^2}}\vec{k}$$

ÇOK DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLAR





D'nin $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ((x,y)) gibi n (2) tane reel sayıdan oluşan bir küme olduğunu varsayalım. D üzerinde bir reel değerli fonksiyonun D deki her elemana tek bir $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ($z = f(x,y)$) reel sayısı ataması kuralına çok değişkenli (iki) fonksiyon denir.

D kümesi fonksiyonun tanım kümesidir. f'in aldığı u değerlerinin kümesi de fonksiyonun değer kümesidir.

$$\underbrace{z}_{\text{bağımlı değişken}} = f(\underbrace{x, y}_{\text{bağımsız değişkenler}})$$

$$\underbrace{u}_{\text{bağımlı değişken}} = f(\underbrace{x_1, x_2, \ldots, x_n}_{n \text{ tane bağımsız değişken}})$$

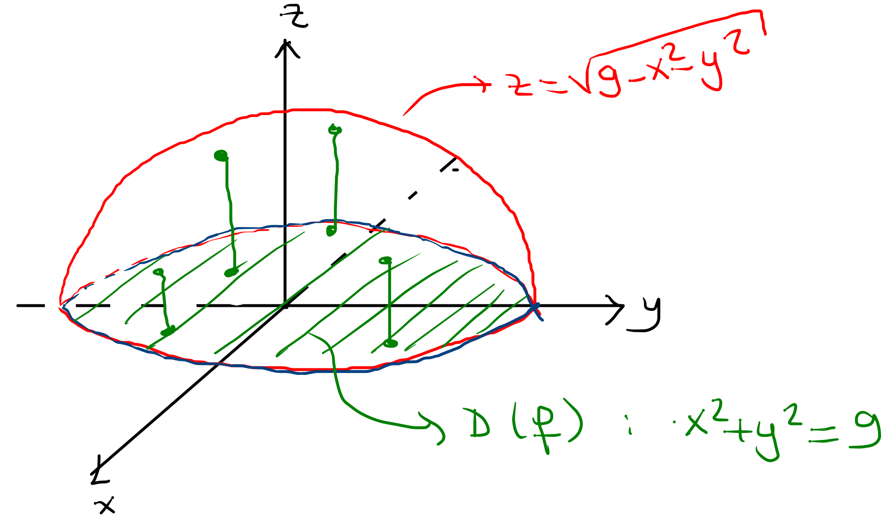
Örnekler :

1)

Fonksiyon	Tanım kümesi	Değer kümesi
$z = \sqrt{y - x^2}$	$y - x^2 \geq 0 \Rightarrow y \geq x^2$	$[0, \infty)$
$z = \frac{1}{xy}$	$xy \neq 0$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
$z = \sin xy$	$\mathbb{R}^2$	$[-1, 1]$

2) $z=f(x,y)=\sqrt{9-x^2-y^2}$

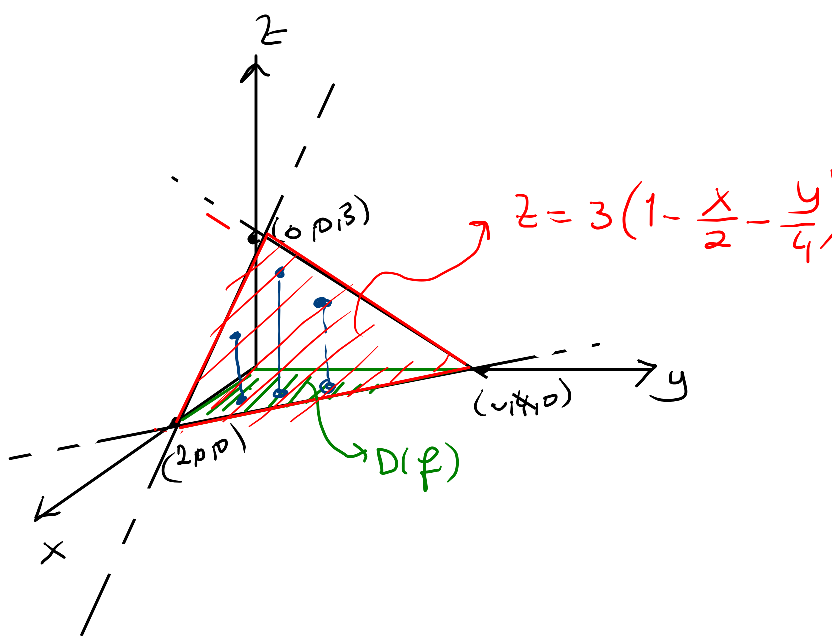
$z^2 = 9-x^2-y^2 \Rightarrow x^2+y^2+z^2=9$



3) $z=f(x,y)=3\left(1-\frac{x}{2}-\frac{y}{4}\right)$ $\quad (0\le x\le 2,\ 0\le y\le 4-2x)$

$\frac{z}{3}=1-\frac{x}{2}-\frac{y}{4} \Rightarrow \frac{x}{2}+\frac{y}{4}+\frac{z}{3}=1$

Düzlemin kesen formundaki denklemi



4) $z = \ln[x \cdot \ln(y-x)]$ fonksiyonunun tanım kümesini bulup çiziniz.

$$x \cdot \ln(y-x) > 0$$

1°) • $x > 0$

• $\ln(y-x) > 0$

$y - x > 1 = e^0$

$y > x+1$

• $y - x > 0$

$y > x$

2°) • $x < 0$

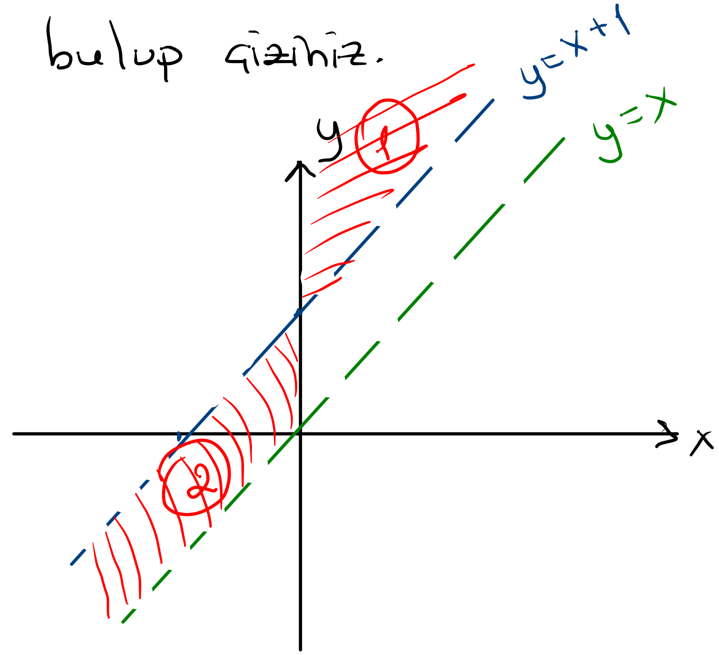
• $\ln(y-x) < 0$

$y - x < 1 = e^0$

$y < 1 + x$

• $y - x > 0$

$y > x$



5/öd. $z = \dfrac{\sqrt{4x - y^2}}{\ln(1 - x^2 - y^2)}$ fonksiyonunun tanım kümesini bulup çiziniz.

Seviye Eğrileri (Düzey eğrileri)

$f(x,y)$ fonksiyonunun grafik olarak temsil edilmesinin yöntemlerinden biri fonksiyon yüzeyinin iki boyutlu topoğrafik haritasını çıkarmaktır. Bunun için xy düzleminde c sabitinin çeşitli değerleri için $f(x,y)=c$ eğrilerini çizeriz. Bu eğrilere fonksiyonun seviye (düzey) eğrileri denir. Bunlar $z=f(x,y)$ grafiğinin yatay $z=c$ düzlemleriyle kesişimi olan eğrilerin xy düzlemi üzerine olan dikey izdüşümleridir.

Ör/ $z=x^2+y^2$ fonksiyonunun grafiğini seviye eğrileri ile çizelim.

$c=0 \Rightarrow x^2+y^2=0$

$c=1 \Rightarrow x^2+y^2=1$

$c=2 \Rightarrow x^2+y^2=2$

$c=3 \Rightarrow x^2+y^2=3$

$\vdots \qquad \vdots$