Şimdi aşağıdaki sınır değer problemini gözönüne alalım :

$$-y'' + q(x)y = \lambda y \qquad (3.11)$$

$$\left.\begin{aligned} y(0) &= 0 \\ y'(\pi) + Hy(\pi) &= 0 \end{aligned}\right\} (3.12)$$

Burada H bir reel sabittir. $H \in \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$

h ve H sayılarının sonlu olduğu hale benzer şekilde (3.11)–(3.12) probleminin yerine (3.11) denklemi ve

$$\left.\begin{aligned} y(0) = 0, \quad & y'(0) = 1 \\ y'(\pi) + Hy(\pi) &= 0 \end{aligned}\right\} (3.13)$$

sınır koşullarıyla oluşan problemini gözönüne alalım ve bu problemin özdeğer ve özfonksiyonlarının asimptotik davranışlarının incelenmesinin yeterli olacağını gösterelim.

(3.11)–(3.13) probleminin özdeğerleri

(3.14) $\psi_x'(\pi,\lambda) + H\psi(\pi,\lambda) = 0$ denkleminin kökleridir.

$\}$ $\psi(x,\lambda)$, (3.11) denkleminin $y(0)=0, y'(0)=1$ koşullarını sağlayan çözümüdür)

$$\psi(x,\lambda) = \frac{\sin sx}{s} + \frac{1}{s}\int_0^x \sin s(x-\tau)\, q(\tau)\, \psi(\tau,\lambda)\, d\tau$$

olduğunu daha önce göstermiştik. (15.03.2023)

λ'nın (3.11)-(3.13) probleminin özdeğeri olması için (3.14)'ün kökleri olması gerektiğini söyledik.

Bunun için

$$\psi'(x,\lambda) = \cos sx + \int_0^x q(z)\cos s(x-z)\,\psi(z,\lambda)\,dz \tag{3.15}$$

$$\psi(x,\lambda) = \frac{\sin sx}{s} + O\left(\frac{1}{s^2}\right) \qquad (s \geq s_0 > 0) \tag{3.16}$$

formüllerinden yararlanırız. (3.16), (3.15)'de yerine yazılırsa;

$$\psi'(x,\lambda) = \cos sx + \int_0^x q(z)\cos s(x-z)\left[\frac{\sin sz}{s} + O\left(\frac{1}{s^2}\right)\right]dz$$

$$= \cos sx + \frac{1}{s}\underbrace{\int_0^x q(z)\cos s(x-z)\sin sz\,dz}\, + O\left(\frac{1}{s^2}\right) \tag{3.17}$$

$$\int_0^x q(z)\cos s(x-z)\sin sz\,dz = \int_0^x q(z)\cdot\left[\cos sx\cos sz + \sin sx\sin sz\right].\sin sz\,dz$$

$$= \int_0^x q(z)\cdot\cos sx\cos sz\sin sz\,dz + \int_0^x q(z)\sin sx\sin^2 sz\,dz$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^x q(z).\cos sx.\sin 2sz\,dz + \int_0^x q(z)\sin sx.\left(\frac{1-\cos 2sz}{2}\right)dz$$

$$= \frac{\cos sx}{2}\int_0^x q(z)\sin 2sz\,dz + \frac{\sin sx}{2}\int_0^x q(z)(1-\cos 2sz)\,dz \tag{3.18}$$

(3.18)'i (3.17)'de yerine yazalım;

$$\psi'(x,\lambda) = \cos sx + \frac{1}{s}\left[\frac{\cos sx}{2}\int_0^x q(z)\sin 2sz\,dz + \frac{\sin sx}{2}\int_0^x q(z)(1-\cos 2sz)\,dz\right] + O\left(\frac{1}{s^2}\right)$$

$$= \cos sx + \frac{\cos sx}{2s}\int_0^x q(z)\cdot\left(-\frac{1}{2s}\right)\cdot(\cos 2sz)'\,dz + \frac{\sin sx}{2s}\int_0^x q(z)\,dz - \frac{\sin sx}{2s}\int_0^x q(z)\cdot\frac{1}{2s}\cdot(\sin 2sz)'\,dz + O\left(\frac{1}{s^2}\right)$$

$$= \cos sx - \underbrace{\frac{\cos sx}{4s^2}\int_0^x q(z)(\cos 2sz)'\,dz}_{O(1/s^2)} + \frac{\sin sx}{2s}\int_0^x q(z)\,dz - \underbrace{\frac{\sin sx}{4s^2}\int_0^x q(z)(\sin 2sz)'\,dz}_{O(1/s^2)} + O\left(\frac{1}{s^2}\right)$$

$$= \cos sx + \frac{\sin sx}{2s}\int_0^x q(z)\,dz + O\left(\frac{1}{s^2}\right) \qquad (3.19)$$

(3.16) ve (3.19) ifadeleri (3.14)'de yerine yazılırsa

$$\cos s\pi + \frac{\sin s\pi}{2s}\int_0^\pi q(z)\,dz + O\left(\frac{1}{s^2}\right) + H\left[\frac{\sin s\pi}{s} + O\left(\frac{1}{s^2}\right)\right] = 0$$

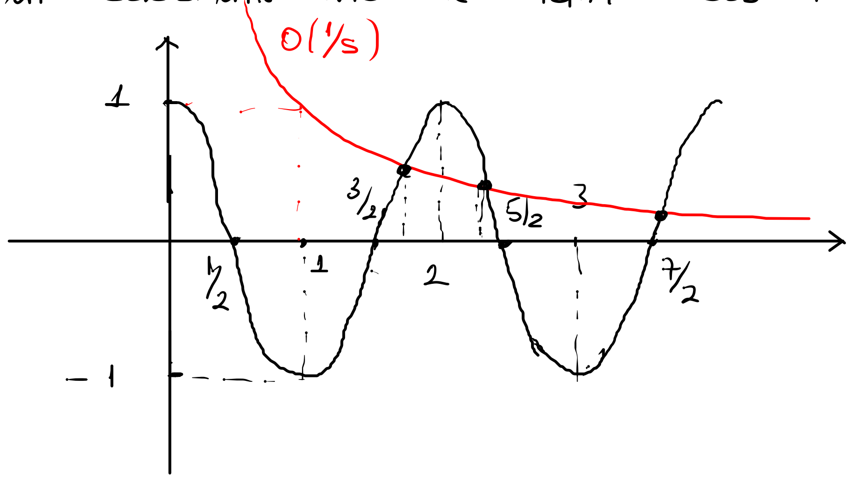
$$\cos s\pi + \frac{\sin s\pi}{s}\left[\underbrace{\frac{1}{2}\int_0^\pi q(z)\,dz}_{h_1} + H\right] + O\left(\frac{1}{s^2}\right) = 0 \Rightarrow \cos s\pi + \frac{\sin s\pi}{s}(h_1 + H) + O\left(\frac{1}{s^2}\right) = 0 \quad (3.20)$$

$$\Rightarrow \cos s\pi = O\left(\frac{1}{s}\right) \quad (s \geq s_0 > 1)$$

$$\cos s\pi = O\left(\frac{1}{s}\right) \qquad (s \geq s_0 > 1) \qquad (3.21)$$

$$s\cos s\pi + O(1) = 0 \qquad (3.22)$$

(3.21)'in köklerini incelemek için $\cos s\pi$ ve $O\left(\frac{1}{s}\right)$ grafiklerini çizelim.



Grafikten görülüyor ki öyle bir $m \in \mathbb{N}$ sayısı vardır ki (3.21) denkleminin m den büyük kökleri

$$\left(n + \frac{1}{2} - \varepsilon \,,\; n + \frac{1}{2} + \varepsilon\right)$$ aralıklarına aittir.

$$(n = m+1, m+2, \ldots) \qquad \varepsilon \in \left(0, \frac{1}{4}\right]$$

Aynen h ve H sayılarının sonlu olduğu hale benzer şekilde burada da (3.21) denkleminin verilen aralığa ait olan çözümünün tek olduğu gösterilebilir.

$\left[s\cos s\pi + O(1)\right]_s' = \cos s\pi - s\pi \sin s\pi + O(1)$ bu ifadenin $\left(n+\frac{1}{2}-\varepsilon, n+\frac{1}{2}+\varepsilon\right)$ aralıklarındaki değeri ya pozitiftir ya da negatiftir. Dolayısıyla $s\cos s\pi + O(1)$ fonksiyonu bu aralıklarda ya artan ya da azalandır. Bu nedenle (3.21) veya (3.22) denklemlerinin bu aralıklarda tek kökü vardır.

$$\cos s\pi + \frac{\sin s\pi}{s}(h_1+H) + O\left(\frac{1}{s^2}\right) = 0 \quad (3.20)$$

denkleminde $s = s_n = n + \frac{1}{2} + \delta_n$ alalım. $\left(|\delta_n| < \varepsilon \le \frac{1}{4} \right)$

$$\Rightarrow \cos\left(n+\frac{1}{2}+\delta_n\right)\pi + \frac{1}{n+\frac{1}{2}+\delta_n} \cdot \sin\left(n+\frac{1}{2}+\delta_n\right)\pi \,[h_1+H] + O\Big(\underbrace{\frac{1}{(n+\frac{1}{2}+\delta_n)^2}}_{1/n^2}\Big) = 0$$

$\left(|\cos \delta_n \pi| > \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$ (sıfıra yakınsamaz)

$$(-1)^n \sin \delta_n \pi + (-1)^n [h_1+H] \cdot \left[\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] \cdot \cos \delta_n \pi + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = 0$$

$$\tan \delta_n \pi \overset{?}{-} [h_1+H] \cdot \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = 0$$

$$(3.23) \quad \tan \delta_n \pi = \frac{[h_1+H]}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\tan x = x + O(x^3)$$

$$\Rightarrow \tan \delta_n \pi = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\frac{\delta_n \pi \cdot \tan \delta_n \pi}{\delta_n \pi} = O\left(\frac{1}{n}\right) \Rightarrow \delta_n \pi = \frac{\delta_n \pi}{\tan \delta_n \pi} \cdot O\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\Rightarrow \delta_n = \frac{\delta_n \pi}{\pi \tan \delta_n \pi} O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (3.24)$$

$$\cos\left(n+\frac{1}{2}+\delta_n\right)\pi$$

$$= \cos n\pi \cdot \cos\left(\frac{1}{2}+\delta_n\right)\pi - \cancel{\sin n\pi}^{\,0} \sin\left(\frac{1}{2}+\delta_n\right)\pi$$

$$= (-1)^n \cdot \cos\left(\frac{1}{2}+\delta_n\right)\pi$$

$$= (-1)^n \sin \delta_n \pi$$

$$\sin\left(n+\frac{1}{2}+\delta_n\right)\pi$$

$$= \cancel{\sin n\pi}^{\,0} \cos\left(\frac{1}{2}+\delta_n\right)\pi + \cos n\pi \sin\left(\frac{1}{2}+\delta_n\right)\pi$$

$$= (-1)^n \cdot \cos \delta_n \pi$$

$\lim_{n\to\infty} \delta_n \pi = 0$ olduğundan $\lim_{n\to\infty} \frac{\delta_n \pi}{\tan \delta_n \pi} = 1$ dir. Dolayısıyla $\exists N$ tüm $n \geq N$ için $\left| \frac{\delta_n \pi}{\tan \delta_n \pi} \right| < 2$ (3.25)

(3.24) ve (3.25)'den

$$|\delta_n| \leq O\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{c}{n} \Rightarrow \delta_n = O\left(\frac{1}{n}\right) \text{ elde edilir.}$$

$$h_1 + H = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} q(z)\,dz + H$$

$$\frac{h_1 + H}{\pi} = c \quad \text{olsun}$$

$$\tan \delta_n \pi = \delta_n \pi + O\left[(\delta_n \pi)^3\right] = \frac{h_1 + H}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\Rightarrow \delta_n \pi + O(n^{-3}) = \frac{h_1 + H}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\delta_n = \frac{h_1 + H}{n\pi} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\delta_n = \frac{c}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$s_n = n + \frac{1}{2} + \delta_n = n + \frac{1}{2} + \frac{c}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\lambda_n = s_n^2 = \left[n + \frac{1}{2} + \frac{c}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]^2 = n^2 + 2c + \frac{1}{4} + n + O\left(\frac{1}{n}\right) \Rightarrow \boxed{\lambda_n = n^2 + n + 2c + \frac{1}{4} + O\left(\frac{1}{n}\right)}$$

özdeğerler için asimptotik formül

Şimdi özfonksiyonlar için formül bulalım:

$$\psi(x,\lambda)=\frac{\sin sx}{s}+O\left(\frac{1}{s^2}\right) \qquad (s\geqslant s_0>0)$$

$$\psi_n(x,\lambda)=\psi(x,\lambda_n)=\frac{\sin s_n x}{s_n}+O\left(\frac{1}{s_n^2}\right)$$

$$\frac{\sin s_n x}{s_n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)=\frac{\sin(n+\frac{1}{2}+\delta_n)x}{n+\frac{1}{2}+\delta_n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)=\frac{\sin\left(\widetilde{n+\frac{1}{2}+O(\frac{1}{n})}\right)x}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\frac{1}{n+\frac{1}{2}+O(\frac{1}{n})}=\frac{1}{n}+\left[\frac{1}{n+\frac{1}{2}+O(\frac{1}{n})}-\frac{1}{n}\right]=\frac{1}{n}+\underbrace{\frac{-\frac{1}{2}-O(\frac{1}{n})}{n(n+\frac{1}{2}+O(\frac{1}{n}))}}_{a_n}$$

$$|a_n|=\frac{\left|\frac{1}{2}+O(\frac{1}{n})\right|}{\left|n(n+\frac{1}{2}+O(\frac{1}{n}))\right|}$$

$$\left|O\left(\frac{1}{n}\right)\right|<\frac{c}{n}\ \Rightarrow\ \frac{1}{2}+\left|O\left(\frac{1}{n}\right)\right|\leq\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{c}{n}}_{<1}<c$$

$$\Big|\underbrace{n\cdot\left(n+\frac{1}{2}+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)}_{|n^2+\frac{n}{2}+O(1)|}\Big|\geqslant\left|n^2+\frac{n}{2}\right|-|O(1)|\geqslant\frac{n^2}{2} \qquad (|a+b|\geqslant|a|-|b|)$$

↳ n'in büyük değerleri için

$$|a_n| \leq \frac{c_1}{\frac{n^2}{2}} \leq \frac{c_2}{n^2} \Rightarrow a_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\sin x = x + O(x^2)$$
$$\cos x = 1 + O(x^2)$$

Böylece

$$\psi_n(x) = \psi(x, \lambda_n) = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) x}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\sin\left(n + \frac{1}{2} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) x = \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) x \cdot \cos\left[O\left(\frac{1}{n}\right) x\right] + \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) x \cdot \sin\left[O\left(\frac{1}{n}\right) x\right]$$

$$= \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) x \cdot \left[1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] + \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) x \cdot \left[O\left(\frac{1}{n}\right) x + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]$$

$$= \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) x + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\psi_n(x) = \psi(x, \lambda_n) = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) x}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Bu şekilde özfonksiyonlar için de asimptotik formül elde edilmiş olur. Bu özfonksiyonlar aynı zamanda (3.11) – (3.12) probleminin de özfonksiyonlarıdır. (3.11) – (3.13) lineer değildir ancak (3.11)–(3.12) lineerdir. O zaman (3.11) – (3.12) probleminin normalleştirilmiş özfonksiyonları için formül:

$$\|\psi_n\|^2 = \int_0^{\pi} \psi_n^2(x)\,dx = \int_0^{\pi} \left[\frac{\sin^2(n+\frac{1}{2})x}{n^2}\right] dx + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$= \frac{1}{n^2} \cdot \int_0^{\pi} \frac{1-\cos(2n+1)x}{2}\, dx + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$= \frac{1}{2n^2} \cdot x \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{2n^2(2n+1)} \sin(2n+1)x \Big|_0^{\pi} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$= \left(\frac{\pi}{2n^2} - 0\right) - \left(\frac{1}{2n^2(2n+1)}\left(\sin(2n+1)\pi - \sin 0\right)\right) + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$\|\psi_n\| = \frac{1}{n}\sqrt{\frac{\pi}{2}} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\frac{1}{\|\psi_n\|} = \frac{1}{\frac{1}{n}\sqrt{\frac{\pi}{2}} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{n}\sqrt{\frac{\pi}{2}}} + \left[\frac{1}{\frac{1}{n}\sqrt{\frac{\pi}{2}} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)} - \frac{1}{\frac{1}{n}\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \right]$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{n}\sqrt{\frac{\pi}{2}}} + \frac{-O\left(\frac{1}{n^2}\right) \rightarrow < \frac{c}{n^2}}{\frac{1}{n}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{n}\sqrt{\frac{\pi}{2}} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] \rightarrow > \frac{c_1}{n^2}} < c_2$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{n}\sqrt{\frac{\pi}{2}}} + O(1)$$

$$V_n(x) = \frac{\psi_n(x)}{\|\psi_n(x)\|} = \left[\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] \cdot \left[\frac{n}{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} + O(1)\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{V_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x + O\left(\frac{1}{n}\right)} \rightarrow$$

Normalleştirilmiş özfonksiyonlar için asimptotik formül.

$$\left.\begin{aligned} -y'' + q(x)\,y &= \lambda y \\ y'(0) - h\,y(0) &= 0 \\ y(\pi) &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Bir önceki probleme dönüştürerek özdeğer ve özfonksiyonlarının asimptotik davranışlarını bulalım.

$x = \pi - t$