# Polinom ve Rasyonel Fonksiyonların limitleri

## Polinom

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

$$\lim_{x\to c} P_n(x) = \lim_{x\to c}\left(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0\right) = P_n(c)$$

## Rasyonel Fonk

$P(x)$ ve $Q(x)$ herhangi polinomlar ve $Q(c) \neq 0$ olmak üzere

$$\lim_{x\to c}\frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to c}\frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0} = \frac{P(c)}{Q(c)}$$

Eğer $P(c) = 0$, $Q(c) = 0$ ise cebirsel işlemler yapılır.

# Sonsuzda Limitler

Pozitif sonsuzda limit.

$f(x)$ fonksiyonu bir $(a,\infty)$ aralığında tanımlı ve $x$'i yeterince büyük alarak $f$'in $L$ gibi bir değere istediğimiz kadar yakın olmasını sağlayabiliyorsak $x$, sonsuza yaklaşırken $f(x)$ de $L$ limitine yaklaşır deriz.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

## Negatif sonsuzda limit

f fonksiyonu $(-\infty, b)$ aralığında tanımlı ve x'i negatif ve mutlak değer olarak yeterince büyük alarak f(x)'in L gibi bir değere istediğimiz kadar yakın olmasını sağlayabiliyorsak x negatif sonsuza yaklaşırken f(x) de L limitine yaklaşır deriz.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

şeklinde gösterilir.

Ör/ $\displaystyle \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$

Ör/ $\displaystyle \lim_{x \to \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}} = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = 1$

$\displaystyle \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = -1$

$\displaystyle \lim_{x \to \mp\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x \to \mp\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}} = \lim_{x \to \mp\infty} \frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \to \mp\infty} \frac{\mathrm{sgn}(x)}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$

**NOT:** Sadece sabit polinomlar ( $P(x) = a_0$ ) $\mp\infty$'da limite sahiptirler.

- $\lim\limits_{x\to\mp\infty} P(x) = \lim\limits_{x\to\mp\infty} a_0 = a_0$

- $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

- $\lim\limits_{x\to\mp\infty} P(x) = \lim\limits_{x\to\mp\infty} (a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0) = \lim\limits_{x\to\mp\infty} a_n x^n =$

$$\lim_{x\to\infty} a_n x^n = \begin{cases} \infty & , a_n > 0 \\ -\infty & , a_n < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty} a_n x^n = \begin{cases} \infty & , a_n > 0, \text{ n çift} \\ -\infty & , a_n > 0, \text{ n tek} \\ -\infty & , a_n < 0, \text{ n çift} \\ \infty & , a_n <, \text{ n tek} \end{cases}$$

Örnekler

1°) $\lim\limits_{x\to\mp\infty} (3x^3 - x^2 + 2)$

$\lim\limits_{x\to\infty} (3x^3 - x^2 + 2) = \infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} (3x^3 - x^2 + 2) = -\infty$

2°) $\lim\limits_{x\to\mp\infty} (x^4 - 5x^3 - x)$

$\lim\limits_{x\to\infty} (x^4 - 5x^3 - x) = \infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} (x^4 - 5x^3 - x) = \infty$

- $$\lim_{x\to\mp\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\lim_{x\to\mp\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\dots+b_1x+b_0}=\lim_{x\to\mp\infty}\frac{x^n\left(a_n+a_{n-1}\frac{1}{x}+\dots+a_1\frac{1}{x^{n-1}}+a_0\frac{1}{x^n}\right)}{x^m\left(b_m+b_{m-1}\frac{1}{x}+\dots+b_1\frac{1}{x^{m-1}}+b_0\frac{1}{x^m}\right)}$$

$$=\lim_{x\to\mp\infty}\frac{a_nx^n}{b_mx^m}=\begin{cases}\mp\infty\ (\text{limit yok}), & n>m \text{ ise}\\ \frac{a_n}{b_m}, & n=m \text{ ise}\\ 0, & n<m \text{ ise}\end{cases}$$

Ör/ $$\lim_{x\to\mp\infty}\frac{2x^2-x+3}{3x^2+5}=\frac{2}{3}$$

Ör/ $$\lim_{x\to\mp\infty}\frac{5x+2}{2x^3-1}=0$$

Ör/ $$\lim_{x\to\infty}\left[\sqrt{x^2+x}-x\right]\overset{\infty-\infty}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{\left[\sqrt{x^2+x}-x\right]\left[\sqrt{x^2+x}+x\right]}{\sqrt{x^2+x}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^2}+x-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+x}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x}}+x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\left[\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right]}=\frac{1}{2}$$

NOT: (irrasyonel fonk'ların $\mp\infty$'da limiti)

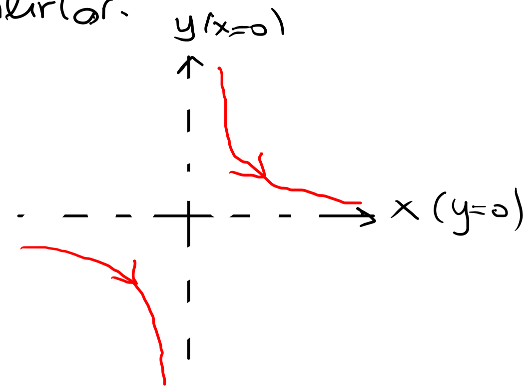
$$\lim_{x\to\mp\infty}\sqrt{x^2+px+q}=\lim_{x\to\mp\infty}\left|x+\frac{p}{2}\right|=\begin{cases} x>0 \text{ için } \lim_{x\to\infty}\left|x+\frac{p}{2}\right|=\lim_{x\to\infty}\left(x+\frac{p}{2}\right) \\ x<0 \text{ için } \lim_{x\to\infty}\left|x+\frac{p}{2}\right)=\lim_{x\to-\infty}-\left(x+\frac{p}{2}\right)\end{cases}$$

## Sonsuz Limitler :

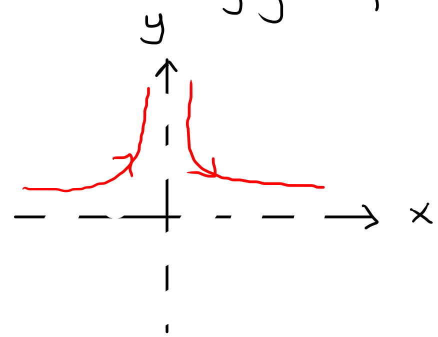
Değerleri keyfi olarak büyüyen fonksiyonlara sonsuz limite sahiptirler denir. "sonsuz" bir sayı olmadığından bu limitler gerçekte limit değildirler. Ancak, bu limitler keyfi olarak büyüyen fonksiyonların davranışını belirlemek için kullanılırlar.

Ör/ $\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}=\infty$

$\lim_{x\to0^-}\frac{1}{x}=-\infty$

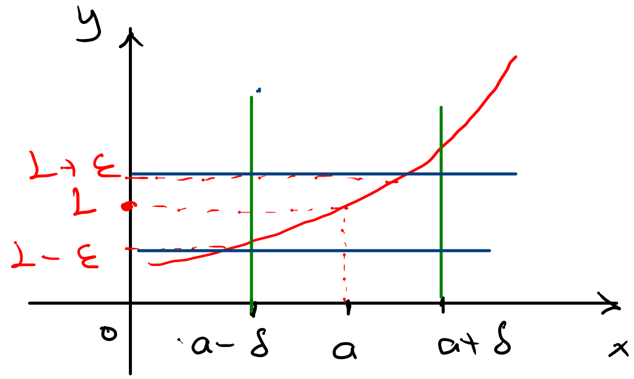



Ör/ $\lim_{x\to0^{\mp}}\frac{1}{x^2}=\infty$




## Limitin Formal Tanımı ($\varepsilon$-$\delta$ tanımı)

$\forall\ \varepsilon>0$ sayısı için $0<|x-a|<\delta$ iken $|f(x)-L|<\varepsilon$ olacak şekilde bir (muhtemelen $\varepsilon$'na bağlı) $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ sayısı bulunabiliyorsa $x$, $a$'ya yaklaşırken $f(x)$ de $L$ limitine yaklaşır denir.




$|x-a|<\delta \Rightarrow -\delta < x-a < \delta$

$a-\delta < x < a+\delta$

$ax^2+bx+c=0$

$$x_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Ör

$\lim_{x\to 2} x^2 = 4$ olduğunu gösteriniz.

$a=2$, $L=4$

1. yol

$\varepsilon>0$ verildiğinde $|x-2|<\delta$ iken $|x^2-4|<\varepsilon$ o.ş. bir $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ sayısı bulmak istiyoruz.

$$|x^2-4| = |(x-2)(x+2)| = |x-2|\,|x+2| < \delta.(4+\delta) = 4\delta+\delta^2 = \varepsilon$$

$|x-2|<\delta \Rightarrow -\delta < x-2 < \delta$

$4-\delta < x+2 < 4+\delta$

$\delta^2+4\delta-\varepsilon=0$

$$\delta_{1,2} = \frac{-4 \mp \sqrt{16+4\varepsilon}}{2} = -2 \mp 2\sqrt{4+\varepsilon}$$

$$\boxed{\delta = -2+2\sqrt{4+\varepsilon}} > 0$$

2\. yol

$\delta > 0$ , $\delta \leq 1$ kabul edelim

$|x-2| < 1 \Rightarrow -1 < x-2 < 1 \Rightarrow 1 < x < 3 \Rightarrow 3 < x+2 < 5$

$|x^2-4| = |x-2|\,|x+2| < \delta.5 = \varepsilon \Rightarrow \boxed{\delta = \frac{\varepsilon}{5}}$

$$|x-a| = \begin{cases} x-a & , a > 0 \\ a-x & , a < 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\delta = \min\left(1, \frac{\varepsilon}{5}\right)}$$

# Kenar limitlerin Formal tanımları

## Sağ limit

$\varepsilon > 0$ verildiğinde $0 < x-a < \delta$ iken $|f(x)-L| < \varepsilon$ o.ş. bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı bulunabiliyorsa $x$, $a$'ya sağdan yaklaşırken $f(x)$'in sağ limiti $L$'dir.

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

## Sol limit

$\varepsilon > 0$ verildiğinde $0 < a-x < \delta$ iken $|f(x)-L| < \varepsilon$ o.ş. bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı bulunabiliyorsa $x$, $a$'ya soldan yaklaşırken $f(x)$'in sol limiti $L$'dir.

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

## Sonsuzda limitin formal tanımı

- $\forall\, \varepsilon > 0$ sayısı için $x > R$ iken $x \in D(f)$ ve $|f(x) - L| < \varepsilon$ o.ş. bir $R = R(\varepsilon)$ sayısı varsa $x$ sonsuza yaklaşırken $f(x)$ $L$ limitine yaklaşır deriz.

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

- $\forall\, \varepsilon > 0$ sayısı için $x < R$ iken $x \in D(f)$ ve $|f(x) - L| < \varepsilon$ o.ş. bir $R = R(\varepsilon)$ sayısı varsa $x$ negatif sonsuza yaklaşırken $f(x)$ $L$ limitine yaklaşır deriz.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

## Sonsuz Limitin formal tanımı:

- Her pozitif $B$ sayısı için $0 < |x - a| < \delta$ iken $x \in D(f)$ ve $f(x) > B$ o.ş. bir $\delta = \delta(B) > 0$ sayısı varsa $x$ a'ya yaklaşırken $f(x)$ sonsuza yaklaşır denir.

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

- Her negatif $B$ sayısı için $0 < |x - a| < \delta$ iken $x \in D(f)$ ve $f(x) < B$ o.ş. bir $\delta = \delta(B) > 0$ sayısı varsa $x$, a'ya yaklaşırken $f(x)$ negatif sonsuza yaklaşır denir. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$

Ör/ $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$ olduğunu gösteriniz.

$2^2 + 3^2 < 4^2$

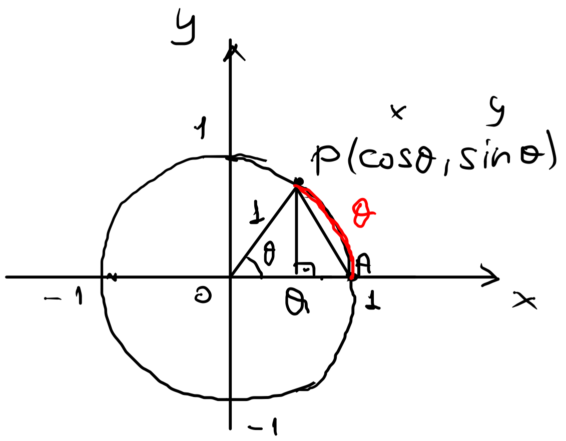
$\varepsilon > 0$ verilmiş olsun. $x > R$ iken $\left|\frac{1}{x} - 0\right| < \varepsilon$ o.ş. bir $R = R(\varepsilon)$ sayısı bulmalıyız.

$$\left|\frac{1}{x} - 0\right| = \left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{x} < \varepsilon \Rightarrow x > \frac{1}{\varepsilon}$$ , $R = \frac{1}{\varepsilon}$ olarak seçilirse ispat tamamlanmış olur.

## Trigonometrik Limitler

$\lim_{\theta\to 0} \sin\theta = 0$

$\lim_{\theta\to 0} \cos\theta = 1$ olduğunu gösterelim.




$|PQ| = \sin\theta$

$|QA| = 1 - \cos\theta$

$|PA|^2 = |PQ|^2 + |QA|^2$

$= \sin^2\theta + (1-\cos\theta)^2 < \theta^2$

$|\overline{PA}| < |\overset{\frown}{PA}|$

$$\left.\begin{array}{l} 0 < |\sin\theta| < |\theta| \\ 0 < |1-\cos\theta| < |\theta| \end{array}\right\}$$

$\lim_{\theta\to 0} 0 = 0$, $\lim_{\theta\to 0} \theta = 0 \Rightarrow \lim_{\theta\to 0} \sin\theta = 0$

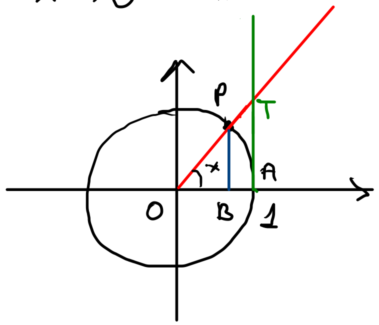
$\lim_{\theta\to 0} 0 = 0$, $\lim_{\theta\to 0} \theta = 0 \Rightarrow \lim_{\theta\to 0} (1-\cos\theta) = 0$

$\lim_{\theta\to 0} 1 - \lim_{\theta\to 0} \cos\theta = 0$

$- \lim_{\theta\to 0} \cos\theta = -1$

$\lim_{\theta\to 0} \cos\theta = 1$

• $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$ • $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\tan x} = 1$




$A(\overset{\triangle}{POB}) < A(\overset{\triangle}{POA}) < A(\overset{\triangle}{TOA})$

$\frac{\sin x . \cos x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\tan x}{2} \Rightarrow \sin x \cos x < x < \tan x$

$\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$ , $\cos x < \frac{\sin x}{x} < \frac{1}{\cos x}$

$\lim_{x\to 0} \cos x = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = 1$ olduğundan sandoviç teo. göre

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$ 'dir.

$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\overset{\to 1}{\sin x}}{x . \cos x} = 1$

## Örnekler :

1) $$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} \overset{0/0}{=} \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x.\sin x}{x.(1+\cos x)}$$

$$= \left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}\right) \cdot \left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{1+\cos x}\right)$$

$$= 1 . \frac{0}{1} = 0$$

$$1-\cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2}$$

$$(\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{\sin \frac{x}{2}}^{1} . \sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = 1.0 = 0$$

2) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x^2 + x.\sin 3x}{x.\sin x} = \lim_{x\to 0} \left[ \frac{\sin x^2}{x.\sin x} + \frac{x \sin 3x}{x.\sin x} \right] = \lim_{x\to 0} \left[ \frac{x \sin x^2}{x^2 . \sin x} + \frac{3.x \sin 3x}{3x . \sin x} \right] = 1 + 3 = 4$$

3) $$\lim_{x\to\pi}\frac{1-\sqrt{2+\cos x}}{1-\sqrt{1+\sin x}}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to\pi}\frac{(1-\sqrt{2+\cos x})(1+\sqrt{2+\cos x})(1+\sqrt{1+\sin x})}{(1-\sqrt{1+\sin x})(1+\sqrt{1+\sin x})(1+\sqrt{2+\cos x})}$$

$$=\lim_{x\to\pi}\frac{(1-2-\cos x)(1+\sqrt{1+\sin x})}{(1-1-\sin x)(1+\sqrt{2+\cos x})}=\lim_{x\to\pi}\frac{-(1+\cos x)(1+\sqrt{1+\sin x})}{-\sin x\,(1+\sqrt{2+\cos x})}$$

$$=\lim_{x\to\pi}\left[\frac{(\overbrace{1-\cos^2 x}^{\sin^2 x})}{\cancel{\sin x}(1-\cos x)}\cdot\frac{1+\sqrt{1+\sin x}}{1+\sqrt{2+\cos x}}\right]$$

$$=\frac{0}{2}\cdot\frac{2}{2}$$

$$=0$$

## Belirsiz Şekiller

$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0.\infty, \infty-\infty$, üstel Belirsizlikler $1^{\infty}, 0^0, \infty^0$

$\frac{0}{0}$: $$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)^n\cdot f_1(x)}{(x-a)^m\cdot g_1(x)}=\begin{cases}0, & n>m \text{ ise}\\ \frac{f_1(a)}{g_1(a)}, & n=m \text{ ise}\\ \text{limit yok}, & n<m \text{ ise}\end{cases}$$

($f(x)$ ve $g(x)$ birer polinom ise o zaman fonksiyonların çarpanlarından biri mutlaka $(x-a)$'dır.)

$\frac{\infty}{\infty}$ : $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^p a_p}{x^q b_q} = \begin{cases} \text{limit yok}, & p > q \text{ ise} \\ \frac{a_p}{b_q}, & p = q \text{ ise} \\ 0, & p < q \text{ ise} \end{cases}$

$(a \to \infty)$

$f(x)$ ve $g(x) \to$ polinom

$0 \cdot \infty$ : $\lim\limits_{x \to a} \left[ f(x) \cdot g(x) \right] \overset{0 \cdot \infty}{=} \lim\limits_{x \to a} \left[ \frac{1}{1/f(x)} \cdot g(x) \right] = \lim\limits_{x \to a} \left[ f(x) \cdot \frac{1}{1/g(x)} \right]$

$= \lim\limits_{x \to a} \left[ \frac{g(x)}{1/f(x)} \right] = \lim\limits_{x \to a} \left[ \frac{f(x)}{1/g(x)} \right]$

$= \frac{0}{0}$ veya $\frac{\infty}{\infty}$

$\infty - \infty$ : a) $\lim\limits_{x \to a} \left[ f(x) - g(x) \right] \to$ Eşlenik ile ifade çarpılıp, bölünür ve belirsizlik ya $\frac{0}{0}$ ya da $\frac{\infty}{\infty}$ olur.

b) $\lim\limits_{x \to a} \left[ \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{g(x)} \right] \to$ Payda eşitlenir ve belirsizlik $\frac{0}{0}$ veya $\frac{\infty}{\infty}$ olur.

$1^{\infty}, 0^{0}, \infty^{0}$ :

$$\lim_{x\to a}\left\{[f(x)]^{g(x)}\right\} = e^{\ln\left[\lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}\right]}$$
$$= e^{\lim_{x\to a}\left[\ln[f(x)]^{g(x)}\right]}$$
$$= e^{\lim_{x\to a}\left[g(x).\ln[f(x)]\right]}$$
$$= e^{\lim_{x\to a}\left\{\frac{\ln[f(x)]}{1/g(x)}\right\}}$$
$$= \cdots = e^{A}$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$
$$= 1 - 2\sin^2 x$$
$$= 2\cos^2 x - 1$$

ÖRNEKLER

1) $$\lim_{x\to\pi}(1+\cos x).\tan\frac{x}{2} \overset{0.\infty}{=} \lim_{x\to\pi}\frac{(1+\cos x).\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to\pi}\frac{2\cos^{\cancel{2}}\frac{x}{2}.\sin\frac{x}{2}}{\cancel{\cos\frac{x}{2}}} = 0$$

$1-x=t \Rightarrow x=1-t$

$x\to 1 \quad t\to 0$

2) $$\lim_{x\to 1}(1-x).\tan\frac{\pi x}{2} \overset{0.\infty}{=} \lim_{x\to 1}(1-x).\frac{\sin\frac{\pi x}{2}}{\cos\frac{\pi x}{2}} = \lim_{t\to 0} t.\frac{\sin\frac{\pi}{2}(1-t)}{\cos\frac{\pi}{2}(1-t)} = \lim_{t\to 0}\underbrace{\frac{\frac{\pi}{2}t}{\sin\frac{\pi}{2}t}}_{1}.\frac{\sin\frac{\pi}{2}(1-t)}{1}\cdot\frac{1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}$$

3) $\lim_{x\to 1^+} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{5}{x^3-1}\right) \overset{\infty-\infty}{=} \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2+x+1-5}{x^3-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2+x-4}{x^3-1} = \frac{-2}{0} \to -\infty$

$(x^2+x+1)$

$x^3-1 = (x-1)(x^2+x+1)$

4) $\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x = \lim_{x\to\infty} \Bigg[\underbrace{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x^2}}_{e}\Bigg]^{\overset{0}{\widetilde{1/x}}} = e^0 = 1$

NOT: $\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{\underset{\sim}{x}}\right)^{\underset{\sim}{x}} = e$

## SÜREKLİLİK

Fonksiyonların çoğunun tanım kümesi aralık veya ayrık aralıkların birleşimi şeklindedir.

P noktası fonksiyonun tanım kümesinin içinde kalan açık bir aralıkta bulunuyorsa P noktasına tanım kümesinin iç noktası denir. Eğer P noktası fonksiyonun tanım kümesinin bir noktası fakat iç noktası değilse o zaman tanım kümesinin bir uç noktasıdır.

$f(x) = \sqrt{4-x^2}$ $\quad D(f) = [-2,2]$ $\quad 0 \in (-2,2) \Rightarrow 0$ iç noktadır.

$2 \in [-2,2] \Rightarrow 2$ iç nokta olmadığından bir uç noktadır.

İç noktada süreklilik.

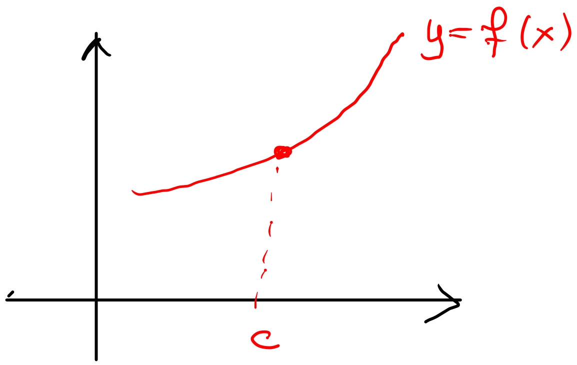
$c \in D(f)$ olmak üzere ve c bir iç nokta $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$ oluyorsa $f(x)$ fonksiyonu $x=c$'de süreklidir denir.

Uç noktada süreklilik.

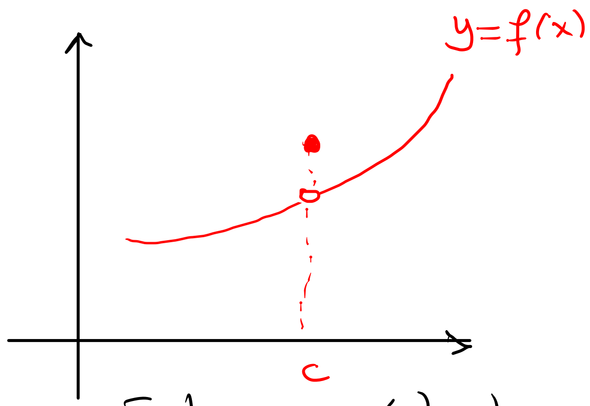
- Sağ-sol süreklilik

$\lim_{x \to c^+} f(x) = f(c)$ oluyorsa o zaman $f(x)$ fonksiyonu $x=c$'de sağdan süreklidir.

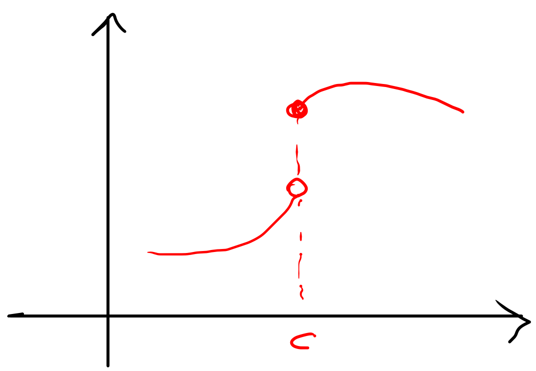
$\lim_{x \to c^-} f(x) = f(c)$ oluyorsa o zaman $f(x)$ fonksiyonu $x=c$'de soldan süreklidir.




$f(x)$, $x=c$'de sürekli



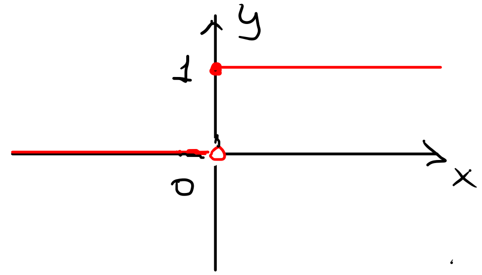

Fonk. $x=c$'de tanımlı limite sahip ancak $\lim_{x \to c} f(x) \neq f(c)$ olduğundan süreksiz.




Fonk. $x=c$'de tanımlı fakat limite sahip değildir. Dolayısıyla süreksizdir.

**Teorem:** Bir fonksiyonun bir c iç noktasında sürekli olması için gerek ve yeter koşul bu noktada hem sağdan hemde soldan sürekli olmasıdır.

Ör/ $H(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$




$H(0) = 1$

$\lim\limits_{x \to 0^+} H(x) = 1$
$\neq$
$\lim\limits_{x \to 0^-} H(x) = 0$

$x=0$'da süreksizdir.

$\lim\limits_{x \to 0^+} H(x) = 1 = H(0)$

$\lim\limits_{x \to 0^-} H(x) = 0 \neq H(0) = 1$

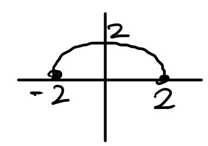
Ancak $x=0$'da fonksiyon sağdan süreklidir.
$x=0$'da fonksiyon soldan süreklidir.

## Uç noktada süreklilik

Eğer f fonksiyonu tanım kümesinin sol uç noktasında sağdan sürekli ise fonksiyon sol uç noktada süreklidir.

Eğer f fonksiyonu tanım kümesinin sağ uç noktasında soldan sürekli ise fonksiyon sağ uç noktada süreklidir.

$f(x) = \sqrt{4-x^2}$ $\quad D(f) = [-2, 2]$




$x=-2$'de süreklilik: $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = f(-2) = 0$

$x=2$'de süreklilik: $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = f(2) = 0$

## Aralık üzerinde süreklilik

Eğer $f$ fonksiyonu $I$ aralığının her noktasında sürekli ise fonksiyon $I$ aralığı üzerinde süreklidir denir.