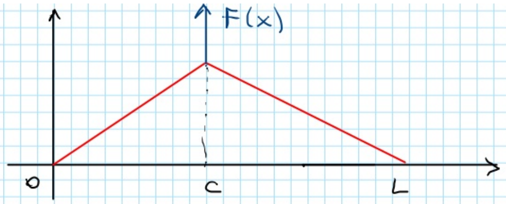
$$-\tau \frac{d^2y}{dx^2} = F(x) \qquad 0 \le x \le L$$
$$y(0) = 0$$
$$y(L) = 0 \qquad (6)$$




Sınır değer problemi; x uzunluğundaki bir telin sabit gerilimi $\tau$ ve telin bir bölümüne uygulanan kuvvet F(x) olmak üzere telin denge durumundan sapma miktarını ifade eder.

Örneğin;

$$F(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x < \frac{L}{2} \\ 1 & x = \frac{L}{2} \\ 0 & \frac{L}{2} < x < L \end{cases} \quad \text{olsun.} \qquad (7)$$

$$-\tau \frac{d^2y}{dx^2} = 0 \Rightarrow k.D: -\tau r^2 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = 0 \Rightarrow y = c_1 x + c_2$$

$$y(x) = \begin{cases} Ax + B & 0 < x < \frac{L}{2} \\ Cx + D & \frac{L}{2} < x < L \end{cases}$$

Sınır şartlarını sağlatalım;

$$y(0) = 0 \Rightarrow 0 = A.0 + B \Rightarrow B = 0$$
$$y(L) = 0 \Rightarrow 0 = CL + D \Rightarrow D = -CL$$

$$y(x) = \begin{cases} Ax & 0 \le x < \frac{L}{2} \\ C(x-L) & \frac{L}{2} < x \le L \end{cases}$$

$$\lim_{x \to \frac{L}{2}^-} y = \lim_{x \to \frac{L}{2}^+} y \Rightarrow \frac{AL}{2} = C\left(\frac{L}{2} - L\right) \Rightarrow \frac{AL}{2} = \frac{-CL}{2} \Rightarrow C = -A$$

$$y(x) = \begin{cases} Ax & 0 \le x \le \frac{L}{2} \\ A(L-x) & \frac{L}{2} \le x \le L \end{cases}$$

Bu çözümdeki A sabiti F(x) kuvvetinin büyüklüğüne göre hesaplanır. Herhangi bir noktada integral alma işlemi yapılamayacağından (6) diferansiyel denklemini çözerken F(x)'in $(0,\frac{L}{2})$, $(\frac{L}{2},L)$ aralıklarındaki değerlerini gözönüne alırız. F(x) kuvvetini tel boyunca yayarak problemi çözdüğümüzde, tek bir noktadaki kuvveti hesaplamak için yayılan kuvvet bir noktadaki kuvvete yanaşacak şekilde limit alırız. Bu durumda (6) problemi L uzunluğundaki bir telin $\frac{L}{2}$ orta noktasında tele uygulanan kuvvet miktarı için (7) ile tanımlanan F(x)'i ifade eder.

F(x) birçok şekilde tanımlanabilir, ancak tüm F(x)'ler için

$$\int_0^L F(x)\,dx = 1 \qquad (8)$$

sağlanmalıdır.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x < \frac{L-\varepsilon}{2} \\ \frac{1}{\varepsilon} & \frac{L-\varepsilon}{2} < x < \frac{L+\varepsilon}{2} \\ 0 & \frac{L+\varepsilon}{2} < x < L \end{cases}$$

$$\int_0^L F(x)\,dx = \int_{\frac{L-\varepsilon}{2}}^{\frac{L+\varepsilon}{2}} \frac{1}{\varepsilon}\,dx$$

$$= \frac{x}{\varepsilon}\Big|_{\frac{L-\varepsilon}{2}}^{\frac{L+\varepsilon}{2}} = \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{L+\varepsilon}{2} - \frac{L-\varepsilon}{2}\right) = 1$$

$$-\tau \frac{d^2y}{dx^2} = F(x) \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{\tau}\begin{cases} 0 & 0<x<\frac{L-\varepsilon}{2} \\ \frac{1}{\varepsilon} & \frac{L-\varepsilon}{2}<x<\frac{L+\varepsilon}{2} \\ 0 & \frac{L+\varepsilon}{2}<x<L \end{cases}$$

$$y(x) = -\frac{1}{\tau}\begin{cases} Ax+B & 0<x<\frac{L-\varepsilon}{2} \\ \frac{x^2}{2\varepsilon}+Cx+D & \frac{L-\varepsilon}{2}<x<\frac{L+\varepsilon}{2} \\ Ex+F & \frac{L+\varepsilon}{2}<x<L \end{cases}$$

Sınır şartlarını sağlayalım;

$$y(0)=0 \Rightarrow 0 = -\frac{1}{\tau}(A.0+B) \Rightarrow B=0$$

$$y(L)=0 \Rightarrow 0 = -\frac{1}{\tau}(EL+F) \Rightarrow F=-EL$$

$$y(x) = -\frac{1}{\tau}\begin{cases} Ax & 0<x<\frac{L-\varepsilon}{2} \\ \frac{x^2}{2\varepsilon}+Cx+D & \frac{L-\varepsilon}{2}<x<\frac{L+\varepsilon}{2} \\ E(x-L) & \frac{L+\varepsilon}{2}<x<L \end{cases} \qquad (9)$$

$y$ ve $y'$'nün $x=\frac{L-\varepsilon}{2}$ ve $x=\frac{L+\varepsilon}{2}$ noktalarında sürekli oldukları gözönüne alınırsa;

- $A.\left(\frac{L-\varepsilon}{2}\right) = \frac{1}{2\varepsilon}\cdot\left(\frac{L-\varepsilon}{2}\right)^2 + C.\left(\frac{L-\varepsilon}{2}\right) + D \Rightarrow (A-C)\left(\frac{L-\varepsilon}{2}\right) = \frac{(L-\varepsilon)^2}{8\varepsilon} + D$
- $\frac{1}{2\varepsilon}\left(\frac{L+\varepsilon}{2}\right)^2 + C.\left(\frac{L+\varepsilon}{2}\right) + \frac{(L-\varepsilon)^2}{8\varepsilon} = E\left(\frac{L+\varepsilon}{2} - L\right) \Rightarrow \frac{1}{8\varepsilon}\left[(L+\varepsilon)^2 + (L-\varepsilon)^2\right] + C\left(\frac{L+\varepsilon}{2}\right) = E\left(\frac{\varepsilon-L}{2}\right)$

$$y'(x) = -\frac{1}{8}\begin{cases} A & 0 \leq x < \frac{L-\varepsilon}{2} \\ \frac{x}{\varepsilon} + C & \frac{L-\varepsilon}{2} < x < \frac{L+\varepsilon}{2} \\ E & \frac{L+\varepsilon}{2} < x \leq L \end{cases}$$

•

$$A = \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{L-\varepsilon}{2}\right) + C \Rightarrow A - C = \frac{L-\varepsilon}{2\varepsilon}$$

$$(A-C)\cdot\left(\frac{L-\varepsilon}{2}\right) = \frac{(L-\varepsilon)^2}{8\varepsilon} + D$$

$$\Rightarrow D = \frac{(L-\varepsilon)^2}{4\varepsilon} - \frac{(L-\varepsilon)^2}{8\varepsilon} \Rightarrow \boxed{D = \frac{(L-\varepsilon)^2}{8\varepsilon}}$$

••

$$\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{L+\varepsilon}{2}\right) + C = E$$

$$\frac{1}{8\varepsilon}\left[(L+\varepsilon)^2 + (L-\varepsilon)^2\right] + C\left(\frac{L+\varepsilon}{2}\right) = E\left(\frac{\varepsilon-L}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{8\varepsilon}\left[(L+\varepsilon)^2 + (L-\varepsilon)^2\right] + C\cdot\left(\frac{L+\varepsilon}{2}\right) = \left(\frac{\varepsilon-L}{2}\right)\left[\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{L+\varepsilon}{2}\right) + C\right]$$

$$C\left[\frac{L+\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon-L}{2}\right] = -\frac{1}{4\varepsilon}(L^2-\varepsilon^2) - \frac{1}{8\varepsilon}\left[L^2 + \cancel{2L\varepsilon} + \varepsilon^2 + L^2 - \cancel{2L\varepsilon} + \varepsilon^2\right]$$

$$C L = -\frac{1}{4\varepsilon}(L^2-\varepsilon^2) - \frac{1}{4\varepsilon}(L^2+\varepsilon^2)$$

$$cL = -\frac{1}{4\varepsilon}(L^2-\varepsilon^2) - \frac{1}{4\varepsilon}(L^2+\varepsilon^2)$$

$$\Rightarrow cL = \frac{-1}{4\varepsilon}\left[2L^2\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{c = \frac{-L}{2\varepsilon}} \Rightarrow A - C = \frac{L-\varepsilon}{2\varepsilon} \Rightarrow A + \frac{L}{2\varepsilon} = \frac{L-\varepsilon}{2\varepsilon}$$

$$\boxed{A = -\frac{1}{2}}$$

$$E = C + \frac{L+\varepsilon}{2\varepsilon} \Rightarrow E = \frac{-L}{2\varepsilon} + \frac{L+\varepsilon}{2\varepsilon} \Rightarrow \boxed{E = \frac{1}{2}}$$

$x = \frac{L}{2}$

$$\frac{L^2}{8\varepsilon} - \frac{L^2}{4\varepsilon} + \frac{(L-\varepsilon)^2}{8\varepsilon}$$

$$\cancel{\frac{L^2}{8\varepsilon}} - \cancel{\frac{L^2}{4\varepsilon_{(\cdot 2)}}} + \cancel{\frac{L^2}{8\varepsilon}} - \frac{2L\cancel{\varepsilon}}{8\cancel{\varepsilon}} + \frac{\varepsilon^{\cancel{2}}}{8\cancel{\varepsilon}}$$

$$\Rightarrow y(x) = -\frac{1}{6}\begin{cases} -\frac{x}{2} & 0 \le x \le \frac{L-\varepsilon}{2} \\ \frac{x^2}{2\varepsilon} - \frac{Lx}{2\varepsilon} + \frac{(L-\varepsilon)^2}{8\varepsilon} & \frac{L-\varepsilon}{2} \le x \le \frac{L+\varepsilon}{2} \\ \frac{1}{2}(x-L) & \frac{L+\varepsilon}{2} \le x \le L \end{cases}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} y(x) = -\frac{1}{6}\begin{cases} -\frac{x}{2} & 0 \le x \le \frac{L}{2} \\ -\frac{L}{4} & x = \frac{L}{2} \\ \frac{x-L}{2} & \frac{L}{2} \le x \le L \end{cases}$$

$$y(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2\tau} & 0\le x\le \dfrac{L}{2}\\[2mm] \dfrac{L-x}{2\tau} & \dfrac{L}{2}\le x\le L\end{cases} \qquad (10)$$

---

$$y(x)=\frac{1}{L\tau}\int_0^x T(L-x)F(T)\,dT+\frac{1}{L\tau}\int_x^L x(L-T)F(T)\,dT$$

$$g(x;T)=\begin{cases}\dfrac{T(L-x)}{L\tau} & 0\le x\le T\\[2mm] \dfrac{x(L-T)}{L\tau} & T\le x\le L\end{cases}$$

olarak alırsak;

$$y(x)=\int_0^L \underbrace{g(x;T)}\cdot F(T)\,dT \qquad (11)$$

fonksiyonuna (6) probleminin Green fonksiyonu denir.

Green fonksiyonu $g(x;T)$, $F(x)$'e bağlı değildir, sınır şartlarına ve diferansiyel operatöre bağlıdır. $g(x;T)$ bilindiğinde problemin çözümü (11) bağıntısıyla $F(x)$ değerine bağlı olarak bulunur. Sınır şartlarının homojen olup olmamasına bağlı olarak Green fonksiyonu cinsinden çözüm değişecektir.