$$L: \; P_0(x)\frac{d^2}{dx^2} + P_1(x)\frac{d}{dx} + P_2(x) \qquad \alpha \leq x \leq \beta$$

$$Ly: \; P_0(x)\frac{d^2y}{dx^2} + P_1(x)\frac{dy}{dx} + P_2(x)y$$

$$\int_\alpha^x vLu\,dx = \Big[(P_0v)u' - (P_0v)'u + (P_1v)u\Big]_\alpha^x$$

$$+ \int_\alpha^x \Big[\underbrace{(P_0v)'' - (P_1v)' + (P_2v)}_{L^*v}\Big]\,u\,dx \qquad (19)$$

$$L^*v = (P_0v)'' - (P_1v)' + P_2v$$

$$= (P_0'v + P_0v')' - (P_1'v + P_1v') + P_2v$$

$$= P_0''v + P_0'v' + P_0'v' + P_0v'' - P_1'v - P_1v' + P_2v$$

$$= v''(P_0) + v'(2P_0' - P_1) + v(P_0'' - P_1' + P_2) \qquad (20)$$

$$\int_a^x f(t)\,dt$$

$$\int_\alpha^x v\,Lu\,dx = \left[(p_0 v)u' - (p_0 v)'u + (p_1 v)u\right]_\alpha^x + \int_\alpha^x (L^* v)u\,dx$$

(sınırda x olduğundan integrand ve dif. t ile ifade edilmesi daha uygundur)

$$\int_\alpha^x (v\,Lu - u\,L^* v)\,dx = \left[(p_0 v)u' - (p_0 v)'u + (p_1 v)u\right]_\alpha^x \qquad (21)$$

$L^*$ operatörüne $L$ operatörüne karşılık gelen eş operatör denir.

Eğer $L^*$ operatörü ile $L$ operatörünün karşılıklı katsayıları birbirlerine özdeş ise $L$ operatörüne kendine eş operatör denir.

$L$'nin katsayıları $\quad p_0,\ p_1,\ p_2$

$L^*$ ın katsayıları $\quad p_0,\ -p_1 + 2p_0',\ p_0'' - p_1' + p_2$

$$L = L^* \iff \left.\begin{aligned} p_1 &= -p_1 + 2p_0' \\ p_2 &= p_0'' - p_1' + p_2 \end{aligned}\right\} \quad \boxed{p_0' = p_1}$$

(21) eşitliğini $x$'e göre türetirsek

$$\frac{d}{dx}\left[\int_{a(x)}^{b(x)} I(x,\alpha)\,d\alpha\right] = \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial I}{\partial x}\,d\alpha + b'(x)\cdot I(x,b(x)) - a'(x)\cdot I(x,a(x))$$

$$\frac{d}{dx}\left[\int_{\alpha}^{x}(vLu - uL^{*}v)\,dt\right] = \frac{d}{dx}\left[(p_0v)u' - (p_0v)'u + p_1vu\right]_{\alpha}^{x}$$

$$v(x)Lu(x) - u(x)L^{*}v(x) = \frac{d}{dx}\left[p_0vu' - (p_0'v + p_0v')u + p_1vu\right]_{\alpha}^{x}$$

$$= \frac{d}{dx}\left[p_0(u'v - uv') + (-p_0' + p_1)uv\right]_{\alpha}^{x} \qquad (22)$$

Bu bağıntıya $L$ ikinci mertebeden bir diferansiyel operatör olmak üzere Lagrange özdeşliği denir.

$$W(u,v) = \begin{vmatrix} u & v \\ u' & v' \end{vmatrix}$$

(21) eşitliğinde $x=\beta$ alınırsa;

$$\int_{\alpha}^{\beta}(vLu - uL^{*}v)\,dx = \left[p_0(u'v - uv') + (p_1 - p_0')uv\right]_{\alpha}^{\beta} \qquad (23)$$

eşitliğine Green özdeşliği denir.

$L$ kendine eş ise;

$$\int_\alpha^\beta (vLu - uLv)\,dx = \underbrace{\left[p_0\,(u'v - uv')\right]}_{J(u,v)}\Big|_\alpha^\beta = \left[\,J(u,v)\,\right]_\alpha^\beta \qquad (24)$$

$J(u,v)$ → u ve v 'nin konjüktü

$$vLu - uLv = \frac{d}{dx}\left[J(u,v)\right] \qquad (25)$$

elde edilir.

**Teorem 1:** $u(x)$ ve $v(x)$

$Ly = F(x) \qquad \alpha < x < \beta$

dif. denkleminin homojen kısmını sağlıyorlarsa $J(u,v)$ sabittir.

**İspat:**

$$vLu - uLv = v(p_0u'' + p_1u' + p_2u) - u(p_0v'' + p_1v' + p_2v)$$

$$= p_0(vu'' - uv'') + p_1(u'v - uv') + \cancel{p_2uv} - \cancel{p_2uv}$$

$$= p_0\underbrace{\left[(u'v - uv')\right]'}_{\frac{dw(u,v)}{dx}} + p_1\underbrace{(uv' - u'v)}_{w(u,v)}$$

$$vLu - uLv = p_0 \frac{dw}{dx} + p_1 w$$

$$\left.\begin{array}{l} Lu = 0 \\ \underbrace{Lv = 0} \end{array}\right\} \Rightarrow p_0 \frac{dw}{dx} + p_1 w = 0 \Rightarrow \int \frac{dw}{w} + \int \frac{p_1}{p_0}\,dx = \int 0$$

(u ve v ikinci tarafsız kısmın çözümleri olduğundan)

$$\ln w + \int \frac{p_1}{p_0}\,dx = \ln c$$

$$w = c \cdot e^{-\int \frac{p_1}{p_0}\,dx}$$

$L$ kendine-eş $\Rightarrow p_1 = p_0'$ dür. O halde

$$w = c\, e^{-\int \frac{p_0'}{p_0}\,dx} = c \cdot e^{-\ln p_0} = \frac{c}{p_0}$$

$$J(u,v) = p_0 \cdot \left( W(u,v) \right)$$

$$= \cancel{p_0} \cdot \frac{c}{\cancel{p_0}} = c \rightarrow \text{sbt}$$

p(x) ve q(x) sürekli fonksiyonlar olmak üzere

$$Ly = \frac{d}{dx}\left[p(x)\,\frac{dy}{dx}\right] + q(x)\,y = F(x) \qquad \alpha < x < \beta$$

dif. denklemi ve

$$\left.\begin{array}{l} B_1 y = -l_1 y'(\alpha) + h_1 y(\alpha) = m_1 \\ B_2 y = l_2 y'(\beta) + h_2 y(\beta) = m_2 \end{array}\right\} \quad (26)$$

sınır koşulları ile oluşturulan sınır değer problemi için Green fonksiyonunu tanımlamaya çalışalım.

(26) problemindeki diferansiyel denklemin çözümleri $F(x)$'in parçalı sürekli olması durumunda klasik çözüm adını alır.

Ancak Green fonksiyonu yardımıyla elde edilen çözümler klasik çözüm değildirler.

Eğer

$$\left.\begin{array}{l} Lg = \delta(x-T) \\ B_1 g = 0 \\ B_2 g = 0 \end{array}\right\} \quad (27)$$

probleminin çözümüne Green fonksiyonu denir. (27) probleminin çözümü klasik bir çözüm değildir.

(27) ile verilen problemin çözümleri Green fonksiyonu daha önce verdiğimiz Green fonksiyonu özelliklerine paralel olarak aşağıdaki özelliklere sahiptir.

$g(x;T) \rightarrow$ Green fonk.

1°) $g(x;T)$ $\alpha \leq x \leq \beta$ aralığında süreklidir.

2°) $\dfrac{dg(x;T)}{dx}$ ; $\dfrac{1}{p(T)}$ büyüklüğünün $x=T$ 'deki süreksizliği dışında süreklidir.

$$\lim_{x \to T^+} \frac{dg(x;T)}{dx} - \lim_{x \to T^-} \frac{dg(x;T)}{dx} = \frac{1}{p(T)} \qquad (28)$$

3°) Tüm $x \neq T$ için

$$L g(x;T) = 0$$

dır.

**Teorem 2:**

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right]+q(x)y=0 \qquad \alpha<x<\beta \\ &B_1y=0 \\ &B_2y=0 \end{aligned}\right\} \quad (29)$$

problemi sadece aşikar çözüme sahipse o zaman $u(x)$ ve $v(x)$ bu problemin lineer bağımsız çözümleri olmak üzere (27) ile verilen problemin sınır şartlarını sağlayan (26) probleminin Green fonksiyonu $A$ ve $C$ bilinmeyenleri bulunmak suretiyle

$$g(x;T)=Au(x)+Cv(x)+\frac{1}{J(u,v)}\left[u(x)v(T)H(T-x)+u(T)v(x)H(x-T)\right] \qquad (30)$$

bağıntısıyla tek olarak ifade edilir.