Kritik Noktaların Sınıflandırılması

Komplike fonksiyonlar için iç kritik noktaları sınıflandırmak zordur. Böyle fonksiyonlar için sınıflandırma h ve k nın küçük değerlerinde $\Delta f = f(a+h, b+k) - f(a,b)$ farkı gözönüne alınarak yapılabilir. (a,b) noktası fonksiyonun kritik noktasıdır. Eğer bu fark pozitif ise fonksiyon yerel minimum değere, negatif ise yerel maksimum değere sahiptir denir. Fark (o,o) noktasının keyfi civarındaki bazı (h,k) noktaları için negatif, diğerleri için pozitif ise o zaman fonksiyonun (a,b) noktasında bir eyer noktasına sahip olduğunu söyleriz.

Ör/ $f(x,y) = 2x^3 - 6xy + 3y^2$ fonksiyonunun kritik noktalarını bulunuz ve sınıflandırınız.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x^2 - 6y = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -6x + 6y = 0$$

$$+ \quad \overline{\qquad\qquad\qquad}$$

$$6x^2 - 6x = 0$$

$$6x(x-1) = 0$$

$$x = 0, \quad x = 1$$

$$\Downarrow \qquad \Downarrow$$

$$y = 0 \quad y = 1$$

A(0,0) ve B(1,1) noktaları kritik noktalardır.

$$A: \Delta f = f(0+h, 0+k) - f(0,0) = 2h^3 - 6hk + 3k^2 - 0$$

$$(h,0) \Rightarrow \Delta f = 2h^3$$

$$\left.\begin{array}{l} h>0 \Rightarrow \Delta f>0 \\ h<0 \Rightarrow \Delta f<0 \end{array}\right\}$$ h'ın farklı değerleri için Δf'in işareti değiştiğinden (0,0) bir eyer noktasıdır.

B: $\Delta f = f(1+h, 1+k) - f(1,1)$

$$= 2(1+h)^3 - 6(1+h)(1+k) + 3(1+k)^2 - (-1)$$

$$= 2\left[1+3h+3h^2+h^3\right] - 6(1+k+h+hk) + 3(1+2k+k^2) + 1$$

$$= \cancel{2} + \cancel{6h} + 6h^2 + 2h^3 - \cancel{6} - \cancel{6k} - \cancel{6h} - 6hk + \cancel{3} + \cancel{6k} + 3k^2 + \cancel{1}$$

$$= 2h^3 + 6h^2 - 6hk + 3k^2$$

$$= \underbrace{2h^3 + 3h^2} + 3h^2 - 6hk + 3k^2$$

$$= \underbrace{h^2}_{>0}\left[2h+3\right] + 3\underbrace{(h-k)^2}_{>0}$$

$|h| < \frac{3}{2}$ için $\Delta f > 0$ olacaktır. Dolayısıyla $(1,1)$ minimum noktadır ve $f(1,1) = -1$ minimum değerdir.

İki Değişkenli Fonksiyonlar için İkinci Türev Testi

Fonksiyonun tanım kümesinin bir iç noktası olan (a,b) noktasının bir kritik nokta olduğunu kabul edelim. Ayrıca fonksiyonun 2. mertebeden kısmi türevlerinin (a,b) noktasının komşuluğunda sürekli olduğunu ve de

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(a,b)} = A \quad , \quad \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right|_{(a,b)} = B \quad , \quad \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{(a,b)} = C$$

değerlerine sahip olduğunu kabul edelim.

Eğer;

1°) $B^2 - AC > 0$ ise f için (a,b) noktası bir eyer noktasıdır.

2°) $B^2 - AC < 0$ ise f için (a,b) noktası bir ekstremum noktadır

a) $A > 0$ olduğunda $f(a,b)$ minimum değerdir

b) $A < 0$ olduğunda $f(a,b)$ maksimum değerdir.

3°) $B^2 - AC = 0$ ise ikinci türev testi cevap vermez. Fonksiyon (a,b)'de maksimum veya minimum değere ya da eyer noktasına sahip olabilir.

ÖRNEKLER

1) $f(x,y) = 2x^3 - 6xy + 3y^2$ fonksiyonunun kritik noktalarını bulunuz ve sınıflandırınız.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 6x^2 - 6y = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= -6x + 6y = 0 \end{aligned}\right\}$$

$A(0,0)$, $B(1,1)$ kritik noktalardır.

	$A(0,0)$	$B(1,1)$
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x \longrightarrow$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 = A$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12 = A$
$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -6 \longrightarrow$	$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -6 = B$	$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -6 = B$
$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6 \longrightarrow$	$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6 = C$	$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6 = C$

$A(0,0)$ için:

$B^2 - AC = (-6)^2 - 0.6$

$= 36 > 0$ olduğundan

$(0,0)$ bir eyer noktasıdır.

$B(1,1)$ için:

$B^2 - AC = (-6)^2 - 12.6$

$= -36 < 0$

$A = 12 > 0 \Rightarrow f(1,1) = -1$ minimum değerdir.

2) $f(x,y) = x \cdot y \cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ fonksiyonunun kritik noktalarını bulup sınıflandırınız.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} + xy \cdot (-x) \cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} = (1-x^2) y \cdot e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}} = 0 \Rightarrow y=0 \qquad 1-x^2=0$$

$$\Downarrow y=0 \qquad x=\mp 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x \cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} + xy \cdot (-y) \cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} = (1-y^2) x \, e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}} = 0$$

$(y=0 \Rightarrow x=0) \rightarrow A(0,0)$

$x=1 \Rightarrow 1-y^2=0 \Rightarrow y=\mp 1$

$x=-1 \Rightarrow 1-y^2=0 \Rightarrow y=\mp 1$

$A(0,0)$, $B(1,1)$, $C(1,-1)$, $D(-1,-1)$, $E(-1,1)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2xy e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}} + (1-x^2) y \cdot (-x) \cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} = -xy(1-x^2+2) e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} = -xy(3-x^2) e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = (1-x^2) e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} - (1-x^2) y \cdot y \, e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} = (1-x^2) \cdot (1-y^2) \cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2yx \cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} + (1-y^2) \cdot x \cdot (-y) e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} = -xy(3-y^2) e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -xy(3-x^2)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \longrightarrow$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = (1-x^2)(1-y^2)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \longrightarrow$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -xy(3-y^2)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \longrightarrow$$

A(0,0)

$A = 0$

$B = 1$

$C = 0$

$B^2 - AC = 1 > 0$

(0,0) bir eyer noktasıdır.

B(1,1), D(−1,−1)

$A = \frac{-2}{e}$

$B = 0$

$C = \frac{-2}{e}$

$B^2 - AC = 0 - \left(\frac{-2}{e}\right)^2$

$= \frac{-4}{e^2} < 0$

$A = \frac{-2}{e} < 0$

$f(1,1) = f(-1,-1) = \frac{1}{e}$

maksimum değer

C(1,−1) E(−1,1)

$A = \frac{2}{e}$

$B = 0$

$C = \frac{2}{e}$

$B^2 - AC = 0 - \left(\frac{2}{e}\right)^2$

$= \frac{-4}{e^2} < 0$

$A = \frac{2}{e} > 0$

$f(1,-1) = f(-1,1) = -\frac{1}{e}$

minimum değer.

Ör/ $f(x,y) = 1 - x^4 - y^4 - 4x^2y^2$ fonksiyonunun kritik noktalarını bulup sınıflandırınız.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -4x^3 - 8xy^2 = 0 \Rightarrow -4x(\underbrace{x^2+2y^2}_{\neq 0}) = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -4y^3 - 8x^2y = 0 \Rightarrow -4y(\underbrace{y^2+2x^2}_{\neq 0}) = 0 \Rightarrow y = 0$$

(0,0) kritik nokta.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -12x^2 - 8y^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -16xy$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -12y^2 - 8x^2$$

(0,0)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 = A$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0 = B$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 = C$$

$$B^2 - AC = 0$$

Test cevap vermedi.

$$\Delta f = f(0+h, 0+k) - f(0,0)$$

$$= \cancel{1} - h^4 - k^4 - 4h^2k^2 - \cancel{1}$$

$$= -[\underbrace{h^4 + k^4 + 4h^2k^2}_{>0}]$$

$\Rightarrow \Delta f < 0 \rightarrow (0,0)$ maksimum noktadır.

$f(0,0) = 1$ maksimum değerdir.

Kısıtlanmış Değişkenlerle Kısmi Türevler

$F(x,y,z,w)=0$, $G(x,y,z,w)=0$ sistemi verilsin. Bu sistemde hangi değişkenlerin bağımlı, hangi değişkenlerin bağımsız olduğuna karar vermek belirtilmediği sürece bilinmez. Ancak kaç denklemimiz varsa o kadar bağımlı değişkenimizin olduğunu bilmek önemlidir. Sistemde hangi değişkene göre türev isteniyorsa bağımlı ve bağımsız değişkenler notasyonla belirtilir.

$$\left.\begin{array}{l} F(x,y,z,w)=0 \\ G(x,y,z,w)=0 \end{array}\right\} \text{ iki bağımlı değişken vardır.}$$

- $\left.\begin{array}{l} x=x(z,w) \\ y=y(z,w) \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\dfrac{\partial x}{\partial z}\right)_{\underbrace{w}_{\text{bağımsız.}}}$

- $\left.\begin{array}{l} x=x(y,z) \\ w=w(y,z) \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\dfrac{\partial w}{\partial z}\right)_y$

- $\left.\begin{array}{l} y=y(x,w) \\ z=z(x,w) \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\dfrac{\partial y}{\partial x}\right)_w$ - - - -

Türevde izlenecek yol :

$w=f(x,y,z)$ fonksiyonundaki değişkenler başka bir denklem tarafından kısıtlandığında türevlerin nasıl bulunacağı 3 adımda belirlenir:

1) Hangi değişkenlerin bağımlı, hangilerinin bağımsız olduğuna notasyonla karar verilir.

2) w ifadesindeki diğer bağımsız değişkenler elenir.

3) Her zamanki gibi türev alınır.

NOT : Eğer hangi değişkenlerin bağımlı olduğuna karar verdikten sonra 2. adım tamamlanamazsa denklemlerin kapalı türevleri alınır ve sonra istenilen türev elde edilmeye çalışılır.

Ör/ $\left.\begin{array}{l} w = x^2+y^2+z^2 \\ z^3 - xy + yz + y^3 = 1 \end{array}\right\}$ denklemleri için $\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_y$ türevinin $(x,y,z) = (2,-1,1)$ noktasındaki değe-

rini bulunuz.

$$\Downarrow$$

$$w = w(x,y)$$

$$z = z(x,y)$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial w}{\partial x} = 2x + 2z \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x} \\ 3z^2 \dfrac{\partial z}{\partial x} - y + y \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{y}{3z^2+y} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\partial w}{\partial x} = 2x + 2z \cdot \frac{y}{3z^2+y} \Rightarrow \left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{(2,-1,1)} = 4 + 2 \cdot \frac{-1}{3-1} = 3$$

Ör/ $\left.\begin{array}{l} w = x^2 + y - z + \sin t \\ t = x + y \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{y,z} = ?$

$$w = w(x,y,z)$$

$$t = t(x,y)$$

$$w = x^2 + y - z + \sin(x+y)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 2x + \cos(x+y)$$

Ör/ $u = x^2 + xy - y^2$

$v = 2xy + y^2$

$\left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\}$ a. $\Rightarrow \left(\dfrac{\partial x}{\partial u}\right)_v \Bigg|_{(x,y)=(2,-1)} = ?$, b. $\left(\dfrac{\partial x}{\partial u}\right)_y = ?$

a. $x = x(u,v)$

$y = y(u,v)$

Sistemden kapalı türev alalım;

$$1 = 2x\frac{\partial x}{\partial u} + y\frac{\partial x}{\partial u} + x\frac{\partial y}{\partial u} - 2y\frac{\partial y}{\partial u} \qquad 0 = 2y\frac{\partial x}{\partial u} + 2x\frac{\partial y}{\partial u} + 2y\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\Rightarrow 1 = (2x+y)\frac{\partial x}{\partial u} + (x-2y)\frac{\partial y}{\partial u} \qquad \Rightarrow 0 = 2y\frac{\partial x}{\partial u} + (2x+2y)\frac{\partial y}{\partial u}$$

$(2,-1) \Rightarrow \quad 3\dfrac{\partial x}{\partial u} + 4\dfrac{\partial y}{\partial u} = 1$

$-2 / \; -2\dfrac{\partial x}{\partial u} + 2\dfrac{\partial y}{\partial u} = 0$

$$7\frac{\partial x}{\partial u} = 1 \Rightarrow \frac{\partial x}{\partial u} = \frac{1}{7}$$

b. $\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_y = ?$

$$u = x^2 + xy - y^2$$

$$v = 2xy + y^2$$

$x = x(u, y)$

$v = v(u, y)$

Sistemden kapalı türev alalım;

$$1 = 2x\frac{\partial x}{\partial u} + y\frac{\partial x}{\partial u} \Rightarrow 1 = (2x+y)\frac{\partial x}{\partial u} \qquad (2,-1) \rightarrow 1 = 3\frac{\partial x}{\partial u} \Rightarrow \frac{\partial x}{\partial u} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{\partial v}{\partial u} = 2y\frac{\partial x}{\partial u}$$