$L(D)y = 0$

$$L(D)y = a_0 \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = 0$$

$L(r) = 0 \rightarrow$ karakteristik denk.

$$L(r) = a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \dots + a_{n-1} r + a_n$$

$L(r) = 0$ karakteristik denklemin kökleri

$y = e^{rx}$

$L(D)\cancel{y} = f(x)$

$y = y_h + y_{\ddot{o}} \longrightarrow$ ikinci taraflı denk.'in çözümü

y_h: ikinci tarafsız denk. çözümü

$y_{\ddot{o}}$: ikinci taraflı denk.'in bir özel çözümü

$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n$

1°) $r_1, r_2, \dots, r_n$ $L(r)$ karakteristik denkleminin n tane farklı kökü ise;

$y_1 = e^{r_1 x}$, $y_2 = e^{r_2 x}$, $\dots$, $y_n = e^{r_n x}$ lineer bağımsız çözümler olacaktır. Dolayısıyla ikinci tarafsız denklemin istenen genel çözümü

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + \dots + c_n e^{r_n x}$$

şeklinde elde edilir.

Ör/ $y'' - y' = 0$ dif. denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$L(D)y = (D^2 - D)y = 0$ $\quad L(r) = r^2 - r = 0 \Rightarrow r(r-1) = 0 \Rightarrow r_1 = 0 \quad r_2 = 1$

$$y = c_1 e^{0 \cdot x} + c_2 e^{1 \cdot x} = c_1 + c_2 e^x$$

Ör/ $y''-5y'+6y=0$ dif. denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$$\underbrace{(D^2-5D+6)}_{L(D)}y=0$$

$$L(r)=r^2-5r+6=0$$

$$(r-2)(r-3)=0$$

$$r_1=2 \quad r_2=3 \Rightarrow y=c_1e^{2x}+c_2e^{3x}$$

2°) r_1, k katlı reel kök ise; o zaman sadece r_1'e karşılık gelen çözüm

$$y_1=(c_1+c_2x+c_3x^2+\dots+c_kx^{k-1})e^{r_1x}$$ şeklindedir.

r_1, k katlı kök ve diğer kökler birbirinden farklı reel kökler ise o zaman ikinci tarafsız denklemin istenen genel çözümü

$$y=(c_1+c_2x+c_3x^2+\dots+c_kx^{k-1})e^{r_1x}+c_{k+1}e^{r_2x}+c_{k+2}e^{r_3x}+\dots+c_ne^{r_nx}$$

şeklinde olur.

$$L(r)=\underbrace{(r-r_1)(r-r_1)\dots(r-r_1)}_{k \text{ tane}}(r-r_2)(r-r_3)\dots(r-r_n)=(r-r_1)^k\cdot(r-r_2)(r-r_3)\dots(r-r_n)$$

$$k \text{ tane}\left\{\begin{array}{l} r=r_1 \rightarrow e^{r_1x} \\ r=r_1 \rightarrow e^{r_1x}\cdot x \\ \vdots \\ r=r_1 \rightarrow e^{r_1x}\cdot x^{k-1} \end{array}\right.$$

$$ay'' + by' + cy = 0$$

$$y'' + \frac{b}{a}y' + \frac{c}{a}y = 0$$

$$y'' + py' + qy = 0$$

$$L(r) = r^2 + pr + q = 0$$

$$\Rightarrow (r-A)^2 = 0 \quad \begin{matrix} r_1 = A \\ r_2 = A \end{matrix} \Bigg\} \quad y = c_1 e^{Ax} + c_2 e^{Ax} = (\underbrace{c_1 + c_2}) e^{Ax} = C \cdot e^{Ax}$$

$$c = c(x) \Rightarrow \left.\begin{aligned} y &= C(x) \cdot e^{Ax} \\ y' &= c' e^{Ax} + cAe^{Ax} \\ y'' &= c'' e^{Ax} + c'Ae^{Ax} + c'Ae^{Ax} + cA^2 e^{Ax} \\ y'' &= c'' e^{Ax} + 2c'Ae^{Ax} + cA^2 e^{Ax} \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow c'' e^{Ax} + 2c'Ae^{Ax} + cA^2 e^{Ax} + p \cdot \left[c' e^{Ax} + cAe^{Ax}\right] + qce^{Ax} = 0$$

$$c'' + \underbrace{(2A + p)}_{\substack{\text{Türev} \\ =0}} c' + \underbrace{(A^2 + pA + q)}_{=0} \cdot c = 0 \Rightarrow c'' = 0 \Rightarrow c = mx + n \Rightarrow y = (mx+n) \cdot e^{Ax}$$

$$= me^{Ax} \cdot x + n \cdot e^{Ax}$$

Ör/ $L(D)y=(D-1)(D-3)^4 y=0$ dif. denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$L(r)=(r-1)(r-3)^4=0 \Rightarrow r_1=1\ ,\ r_{2,3,4,5}=3$

$y=c_1e^x+(c_2+c_3x+c_4x^2+c_5x^3).e^{3x}$

Ör/ $y^{(4)}-y''=0$ dif. denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$(D^4-D^2)y=0$ $\qquad L(r)=r^2(r^2-1)=0$

$D^2(D^2-1)y=0$ $\qquad r_{1,2}=0 \quad r_3=1\ ,\ r_4=-1$

$y=(c_1+c_2x)e^{0.x}+c_3e^{1.x}+c_4e^{(-1).x}=c_1+c_2x+e^x+e^{-x}$

Ör/ $y''+4y'+4y=0$ denklemiyle birlikte verilen $y(0)=-1\ ,\ y'(0)=1$ başlangıç koşullarına uygun çözümü bulunuz.

$\underbrace{(D^2+4D+4)}_{L(D)}y=0$ $\qquad L(r)=r^2+4r+4=(r+2)^2 \Rightarrow r_{1,2}=-2$

$y=(c_1+c_2x)\,e^{-2x}$ $\qquad y'=c_2e^{-2x}-2(c_1+c_2x).e^{-2x}$

$y(0)=-1 \Rightarrow -1=(c_1+c_2.0).e^{-2.0} \Rightarrow c_1=-1$ $\qquad y'(0)=1 \Rightarrow 1=c_2-2c_1$

$c_2=-1$

$y = (-1-x).e^{-2x} = -(1+x)e^{-2x}$

3°) Köklerden bazıları karmaşık kök ise;

Örneğin; $r_{1,2} = \alpha \mp i\beta$ ve diğer kökler birbirinden farklı reel kökler olsun. O zaman $r_{1,2}$'ye karşılık gelen çözüm.

$$c_1y_1 + c_2y_2 = c_1e^{(\alpha+i\beta)x} + c_2e^{(\alpha-i\beta)x} = c_1e^{\alpha x}.e^{i\beta x} + c_2e^{\alpha x}.e^{-i\beta x} = e^{\alpha x}\left[c_1e^{i\beta x} + c_2e^{-i\beta x}\right]$$

$$\left.\begin{aligned} e^{i\beta x} &= \cos\beta x + i\sin\beta x \\ e^{-i\beta x} &= \cos\beta x - i\sin\beta x \end{aligned}\right\} \text{Euler formülleri} \Rightarrow c_1y_1 + c_2y_2 = e^{\alpha x}\left[c_1(\cos\beta x + i\sin\beta x) + c_2(\cos\beta x - i\sin\beta x)\right]$$

$$= e^{\alpha x}\left[\underbrace{(c_1+c_2)}_{C_1}\cos\beta x + \underbrace{i(c_1-c_2)}_{C_2}\sin\beta x\right]$$

$$= e^{\alpha x}\left[C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x\right]$$

$$y = e^{\alpha x}\left[C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x\right] + c_3e^{r_3x} + \dots + c_ne^{r_nx}$$

Ör/ $y''' + 3y'' + 7y' + 5y = 0$ dif. denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$$\underbrace{(D^3+3D^2+7D+5)}_{L(D)}\,y=0$$

$$L(r) = r^3+3r^2+7r+5=0$$

$$\Rightarrow r^3+3r^2+2r+(5r+5)=0$$

$$\Rightarrow r^3+r^2+2r^2+2r+5(r+1)=0$$

$$\Rightarrow r^2(r+1)+2r(r+1)+5(r+1)=0$$

$$\Rightarrow (r+1)(r^2+2r+5)=0$$

$$r_1=-1 \qquad r_{2,3}=\frac{-2\mp\sqrt{4-20}}{2}=-1\mp 2i$$

$$y=c_1e^{-x}+e^{-x}\left[c_2\cos 2x+c_3\sin 2x\right]$$

Ör/ $y'''+y''+y'-3y=0$ dif. denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$$\underbrace{(D^3+D^2+D-3)}_{L(D)}\,y=0$$

$$L(r)=r^3+r^2+r-3=0$$

$$r_1=1 \Rightarrow 1+1+1-3=0 \checkmark$$

$$\begin{array}{r|l}
r^3+r^2+r-3 & r-1 \\ \hline
-\;r^3+r^2 \qquad\quad & r^2+2r+3 \\ \hline
2r^2+r-3 & \\
-\;2r^2+2r \quad & \\ \hline
3r-3 & \\
-\;3r-3 & \\ \hline
0 &
\end{array}$$

$$L(r)=(r-1)(r^2+2r+3)=0$$

$$r_1=1 \qquad r_{2,3}=\frac{-2\mp\sqrt{4-12}}{2}=-1\mp\sqrt{2}\,i$$

Horner yöntemi

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & 1 & 1 & -3 \\
1 & \downarrow & 1 & 2 & 3 \\ \hline
 & 1 & 2 & 3 & \boxed{0}
\end{array}$$

$$(r-1)(r^2+2r+3)$$

$$y = c_1 e^{x} + e^{-x}\left[c_2 \cos\sqrt{2}x + c_3 \sin\sqrt{2}x\right]$$

Ör/ $y'' + 4y = 0$ dif. denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$\underbrace{(D^2+4)}_{L(D)}\, y = 0$ $\qquad L(r) = r^2 + 4 = 0$

$$r_{1,2} = \mp 2i$$

$$y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$$

4°) Eğer $r_{1/2}$ kompleks (karmaşık) ve k katlı kökler ise;

$r_1 = \alpha + i\beta$ $\quad k$ katlı
$r_2 = \alpha - i\beta$ $\quad k$ katlı $\Big\}$ kökler, $r_3, \ldots, r_n$ birbirinden farklı reel kökler olsun.

k katlı köklere karşılık gelecek çözüm

$$y_1 = e^{\alpha x}\cdot\left[(c_1 + c_2 x + \cdots + c_k x^{k-1}) \cos\beta x + (c_{k+1} + c_{k+2} x + \cdots + c_{2k} x^{k-1}) \sin\beta x\right]$$ şeklindedir.

Dolayısıyla ikinci tarafsız denklemin genel çözümü

$$y = e^{\alpha x}\left[(c_1 + c_2 x + \cdots + c_k x^{k-1}) \cos\beta x + (c_{k+1} + c_{k+2} x + \cdots + c_{2k} x^{k-1}) \sin\beta x\right] + c_{2k+1} e^{r_{2k+1} x} + \cdots + c_n e^{r_n x}$$

Ör/ $y^{(4)}+2y''+y=0$ dif. denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$$\underbrace{(D^4+2D^2+1)}_{L(D)}y=0 \qquad L(r)=r^4+2r^2+1=0$$

$$(r^2+1)^2=0$$

$$r_{1,2}=\mp i \qquad r_{3,4}=\mp i$$

$$y=(c_1+c_2x)\cos x+(c_3+c_4x)\sin x$$

Ör/ $y^{(4)}+8y''+16y=0$ dif. denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$$\underbrace{(D^4+8D^2+16)}_{L(D)}y=0 \qquad L(r)=r^4+8r^2+16=0$$

$$(r^2+4)^2=0$$

$$r_{1,2}=\mp 2i \qquad r_{3,4}=\mp 2i$$

$$y=(c_1+c_2x)\cos 2x+(c_3+c_4x)\sin 2x$$

Ör/ $y^{(4)}-4y'''+14y''-20y'+25y=0$ dif. denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$$(D^4-4D^3+14D^2-20D+25)y=0 \qquad L(r)=r^4-4r^3+14r^2-20r+25=0$$

$$(r^2-2r+5)^2=0$$

$$r_{1,2}=\frac{2\mp\sqrt{4-20}}{2}=1\mp 2i$$

$$r_{3,4}=\frac{2\mp\sqrt{4-20}}{2}=1\mp 2i$$

$$y = e^{x}\left[(c_1 + c_2 x)\cos 2x + (c_3 + c_4 x)\sin 2x\right]$$

Ör/ $y'' - 4y' + 13y = 0$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 2$ şeklinde verilen başlangıç değer probleminin çözümünü bulunuz.

$$\underbrace{(D^2 - 4D + 13)}_{L(D)} y = 0 \qquad L(r) = r^2 - 4r + 13 = 0$$

$$r_{1,2} = \frac{4 \mp \sqrt{16 - 52}}{2} = 2 \mp 3i$$

$$y = e^{2x}\left[c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x\right]$$

$$y' = 2e^{2x}\left[c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x\right] + e^{2x}\left[-3c_1 \sin 3x + 3c_2 \cos 3x\right]$$

$$y(0) = -1 \Rightarrow -1 = \underbrace{e^{0}}_{=1}\left[c_1 \underbrace{\cos 0}_{=1} + c_2 \underbrace{\sin 0}_{0}\right] \Rightarrow c_1 = -1$$

$$y'(0) = 2 \Rightarrow 2 = 2\underbrace{e^{0}}_{1}\left[\underbrace{c_1}_{-1} \underbrace{\cos 0}_{=1} + c_2 \underbrace{\sin 0}_{0}\right] + e^{0}\left[-3c_1 \underbrace{\sin 0}_{0} + 3c_2 \underbrace{\cos 0}_{=1}\right]$$

$$\Rightarrow 2 = -2 + 3c_2 \quad \Rightarrow c_2 = \frac{4}{3} \qquad \Rightarrow y = e^{2x}\left[-\cos 3x + \frac{4}{3}\sin 3x\right]$$

Ör/ $y'' + y = 0$, $y(0) = 1$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$ sınır değer probleminin çözümünü bulunuz.

$(D^2+1)\,y = 0 \qquad L(r) = r^2 + 1 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \mp i$

$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$, $\quad y(0) = 1 \Rightarrow 1 = c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0 \Rightarrow c_1 = 1$

$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 \Rightarrow -1 = c_1 \cos\frac{\pi}{2} + c_2 \sin\frac{\pi}{2} \Rightarrow c_2 = -1$

$\Rightarrow y = \cos x - \sin x$

Ör/

$L(r) = r^6 (r^3 - 1) = 0$

$L(r) = r^6 (r-1)(r^2+r+1) = 0 \qquad r_{1,2,3,4,5,6} = 0 \qquad r_7 = 1 \qquad r_{8,9} = \frac{-1 \mp \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \mp \sqrt{3}\, i}{2}$

$y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3 + c_5 x^4 + c_6 x^5) \cdot e^0 + c_7 e^x + e^{-\frac{x}{2}} \left[c_8 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + c_9 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right]$