Rasyonel fonksiyonların integralleri

$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$ şeklindeki integralleri gözönüne alalım. Burada P ve Q sırasıyla

$P(x) \to$ n. dereceden polinom,

$Q(x) \to$ m. dereceden polinomdurlar. Eğer P(x)'in derecesi Q'nun derecesinden büyük ise

Yani, $n \geq m$ ise polinom bölmesi yapılır. $\begin{array}{l|l} P(x) & Q(x) \\ \hline & R(x) \\ \overline{S(x)} & \end{array} \Rightarrow \frac{P(x)}{Q(x)} = R(x) + \frac{S(x)}{Q(x)}$ $(r < m$'dir$)$

r. dereceden bir polinom

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int \left[R(x) + \frac{S(x)}{Q(x)} \right] dx = \int R(x)\,dx + \int \frac{S(x)}{Q(x)}dx$$

Burada S(x) derecesi Q(x)'den küçük olan bir polinomdur. Yani eğer S(x)'in derecesi r ise $r < m$'dir. Bu durumda $\int \frac{S(x)}{Q(x)}dx$ integrali basit kesirlere ayırma yöntemi ile çözülecektir.

Şimdi $n \geq m$ durumuna örnekler verelim;

Ör/ $\displaystyle\int \frac{x^3+3x^2}{x^2+1}\,dx = \int\left[x+3-\frac{x+3}{x^2+1}\right]dx = \int x\,dx+3\int dx-\frac{1}{2}\int\frac{2x\,dx}{x^2+1}-3\int\frac{dx}{x^2+1}$

$$\begin{array}{l|l} \cancel{x^3}+3x^2 & x^2+1 \\ \hline -\cancel{x^3}\mp x & x+3 \\ \hline \cancel{3x^2}-x & \\ -\cancel{3x^2}\mp 3 & \\ \hline -x-3 & \end{array}$$

$\displaystyle = \frac{x^2}{2}+3x-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-3\arctan x+C$

Ör/ $\displaystyle\int\frac{x\,dx}{2x-1} = \int\left[\frac{1}{2}+\frac{1/2}{2x-1}\right]dx = \frac{1}{2}\int dx+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{2x-1}$

$$\begin{array}{l|l} \cancel{x} & 2x-1 \\ \hline -\cancel{x}+\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline \frac{1}{2} & \end{array}$$

$\displaystyle = \frac{x}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\ln|2x-1|+C$

$\displaystyle = \frac{x}{2}+\frac{1}{4}\ln|2x-1|+C$

n<m ise

1. dereceden (lineer) ve 2. dereceden (kuadratik) paydalar

Paydanın 1. dereceden olması durumu

Payda 1. dereceden ise pay 0. dereceden olmalı.

$$\int \frac{d}{ax+b}\,dx = d\int \frac{dx}{ax+b} = d\int \frac{\frac{du}{a}}{u} = \frac{d}{a}\ln|u| + c = \frac{d}{a}\ln|ax+b| + c$$

$ax+b=u$

$a\,dx = du$

$dx = \frac{1}{a}du$

Ör/ $\int \frac{2\,dx}{3x-2} = 2\int \frac{dx}{3x-2} = \frac{2}{3}\int \frac{du}{u} = \frac{2}{3}\ln|u| + c$

$= \frac{2}{3}\ln|3x-2| + c$

$3x-2=u$

$3\,dx = du \Rightarrow dx = \frac{du}{3}$

Paydanın 2. dereceden olması durumu

Bir ikinci dereceden ifade daima, kareye tamamlanarak ve uygun değişken dönüşümü yapılarak x^2-a^2 ya da x^2+a^2 şekline getirilebilir. Pay kısmı bu durumda ya 0. dereceden ya da 1. dereceden bir ifade olacaktır.

Dolayısıyla karşılaşacağımız integraller

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2}, \int \frac{x\,dx}{x^2+a^2}, \int \frac{x\,dx}{x^2-a^2}, \int \frac{dx}{x^2-a^2}$$ şeklinde olacaktır.

1. integral $x = a\tan t$ dönüşümü ile çözülür.

2. ve 3. integraller paydanın türevinin pay da oluşturulabildiği integrallerdir.

4. integral ise $|x| < |a|$ ise $x = a\sin\theta$, $|x| > |a|$ ise $x = a\sec\theta$ değişken dönüşümleri ile hesaplanabilir.

Fakat bu integrali daha basit olarak $\frac{1}{x^2-a^2}$ ifadesini iki kesrin toplamı şeklinde yazmak suretiyle hesaplayacağız.

$$\frac{1}{x^2-a^2} = \frac{1}{(x-a)(x+a)} = \frac{A}{\underset{(x+a)}{x-a}} + \frac{B}{\underset{(x-a)}{x+a}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(x-a)(x+a)} = \frac{A(x+a)+B(x-a)}{(x+a)(x-a)} \Rightarrow 1 \equiv A(x+a) + B(x-a)$$

$$1 \equiv (A+B)x + a(A-B) \Rightarrow \begin{array}{l} A+B = 0 \\ A-B = \frac{1}{a} \\ \hline A = \frac{1}{2a} \Rightarrow B = \frac{-1}{2a} \end{array}$$

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \int \left[\frac{\frac{1}{2a}}{x-a} + \frac{-\frac{1}{2a}}{x+a} \right] dx$$

$$= \frac{1}{2a} \int \frac{dx}{x-a} - \frac{1}{2a} \int \frac{dx}{x+a}$$

$$= \frac{1}{2} \ln|x-a| - \frac{1}{2} \ln|x+a| + C$$

$$= \frac{1}{2} \ln \frac{|x-a|}{|x+a|} + C$$

Paydadaki $Q(x)$ polinomunun derecesi 2'den büyük ise

$Q(x)$ polinomunun derecesi $n \geq 2$ olsun. En büyük dereceli terimin x^n olduğunu kabul edelim.

1°) $Q(x)$'in çarpanları 1. dereceden ise, yani

$Q(x) = (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$ şeklinde ise o zaman $\frac{P(x)}{Q(x)}$ rasyonel fonksiyonu

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} + \cdots + \frac{A_n}{x-a_n}$$ şeklinde $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sabitleri için basit kesirlere

ayrılabilir.

Buradaki $A_1, A_2, \ldots, A_n$ katsayılarını hesaplamanın iki yolu vardır.

Birinci yol payda eşitlemek suretiyle polinom özdeşliğinden hesaplama yapmaktır.

İkinci yol ise;

$$A_i = \lim_{x \to a_i} \cancel{(x-a_i)} \frac{P(x)}{(x-a_1)(x-a_2)\cdots\cancel{(x-a_i)}\cdots(x-a_n)} = \frac{P(a_i)}{(a_i-a_1)(a_i-a_2)\cdots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\cdots(a_i-a_n)}$$

$$\frac{1}{(x-a)(x+a)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x+a}$$

$$A = \frac{1}{(x-a)(x+a)} = \frac{1}{(x+a)}\Bigg|_{x=a} = \frac{1}{2a}$$

$$B = \frac{1}{(x-a)(x+a)} = \frac{1}{x-a}\Bigg|_{x=-a} = \frac{-1}{2a}$$

Ör/

$$\int \frac{x+4}{x^2-5x+6}\,dx = \int \frac{x+4}{(x-2)(x-3)}\,dx = \int\left[\frac{-6}{x-2} + \frac{7}{x-3}\right]dx$$

$$\frac{x+4}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}$$

$A = -6$

$B = 7$

$$= -6\int \frac{dx}{x-2} + 7\int \frac{dx}{x-3}$$

$$= -6\ln|x-2| + 7\ln|x-3| + C$$

Ör/ $\int \frac{x^3+2}{x^3-x}\,dx = \int \left[1 + \frac{2+x}{x^3-x}\right] dx = \int dx + \int \frac{x+2}{x(x-1)(x+1)}\,dx$

$$\begin{array}{l|l} x^3+2 & x^3-x \\ \hline -x^3+x & 1 \\ \hline 2+x & \end{array}$$

$$= x + \int \left[\frac{-2}{x} + \frac{3/2}{x-1} + \frac{1/2}{x+1} \right] dx$$

$$= x - 2\ln|x| + \frac{3}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x+1| + c$$

$$\frac{x+2}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}$$

$A = -2$

$B = \frac{3}{2}$

$C = \frac{1}{2}$

2°) $Q(x)$'in ikinci dereceden çarpanlarına ayrılamayan çarpanının olması durumu

$$Q(x) = (x-a_1)(x^2+a_2)(x-a_4)\cdots(x-a_n)$$

Bu durumda 2. dereceden paydaya karşılık gelen kesrin payı 1. dereceden bir fonksiyon olarak göz önüne alınmalıdır.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2x+A_3}{x^2+a_2} + \frac{A_4}{(x-a_4)} + \cdots + \frac{A_n}{x-a_n}$$

Payda eşitlenir ve polinom özdeşliğinden $A_1, A_2, \ldots, A_n$ katsayıları bulunur.

$$I = \int \frac{dx}{x^3+1} = \int \frac{dx}{(x+1)(x^2-x+1)} = \int \left[\frac{1/3}{x+1} + \frac{\left(-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}\right)}{x^2-x+1} \right] dx$$

$$x^2-x+1 = u$$
$$(2x-1)\,dx = du$$
$$\left(x-\frac{1}{2}\right) = t$$
$$dx = dt$$

$$\frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}$$

$$\Rightarrow A(x^2-x+1) + (Bx+C)(x+1) \equiv 1$$

$$(A+B)x^2 + (-A+B+C)x + (A+C) \equiv 1$$

$$\left.\begin{aligned} A+B&=0 \\ -A+B+C&=0 \\ A+C&=1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} 2A-C&=0 \\ A+C&=1 \\ \hline 3A&=1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad A = \frac{1}{3},\ B = -\frac{1}{3}$$
$$C = \frac{2}{3}$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{3}\int \frac{x-2}{x^2-x+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{2\cdot 3}\int \frac{2x-4}{x^2-x+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\int \frac{(2x-1)-3}{x^2-x+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\int \frac{du}{u} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln|u| + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2t}{\sqrt{3}} + C$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln|x^2-x+1| + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

3°) Paydadaki $Q(x)$'in 1. dereceden ve 2. dereceden çarpanlarının tekrarlanması durumu:

Örneğin; $Q(x)$'in 1. dereceden veya 2. dereceden çarpanının m kez tekrarlanması durumunda $\frac{P(x)}{Q(x)}$ rasyonel fonksiyonunun basit kesirlere ayrılışında bu çarpan için m tane kesir karşılık gelir. Bu kesirlerin paydalarının üsleri 1 den m'ye doğru artarken çarpanın 1. dereceden (lineer) olması durumunda pay 0. dereceden, çarpanın 2. dereceden (kuadratik) olması durumunda da pay 1. dereceden bir fonksiyon olacaktır.

Ör/ $\int \frac{dx}{x(x-1)^2} = \int \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} \right] dx = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{(x-1)^2}$

$= \ln|x| - \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C$

$$\frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

$$\frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx}{x(x-1)^2}$$

$$1 \equiv A(x^2-2x+1) + B(x^2-x) + Cx$$

$A+B=0$

$(-2A-B+C)=0$

$A=1 \Rightarrow B=-1 \Rightarrow C=1$

Ör/ $I = \int \frac{x^2+2}{4x^5+4x^3+x}\,dx = \int \frac{(x^2+2)}{x(4x^4+4x^2+1)}\,dx = \int \frac{x^2+2}{x(2x^2+1)^2}\,dx$

$$\frac{x^2+2}{x(2x^2+1)^2} \equiv \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{2x^2+1} + \frac{Dx+E}{(2x^2+1)^2}$$

$\Rightarrow A(2x^2+1)^2 + (Bx+C)x(2x^2+1) + (Dx+E)x \equiv x^2+2$

$4Ax^4 + 4Ax^2 + A + 2Bx^4 + Bx^2 + 2Cx^3 + Cx + Dx^2 + Ex \equiv x^2+2$

$(4A+2B)x^4 + 2Cx^3 + (4A+B+D)x^2 + (C+E)x + A \equiv x^2+2$

$4A+2B=0 \Rightarrow B=-4$

$2C=0 \Rightarrow C=0$

$4A+B+D=1 \Rightarrow D=-3$

$C+E=0 \Rightarrow E=0$

$A=2 \Rightarrow$

$$I = \int \left[\frac{2}{x} + \frac{-4x}{2x^2+1} + \frac{-3x}{(2x^2+1)^2} \right] dx$$

$$2x^2+1 = u$$

$$4x\,dx = du$$

$$x\,dx = \frac{du}{4}$$

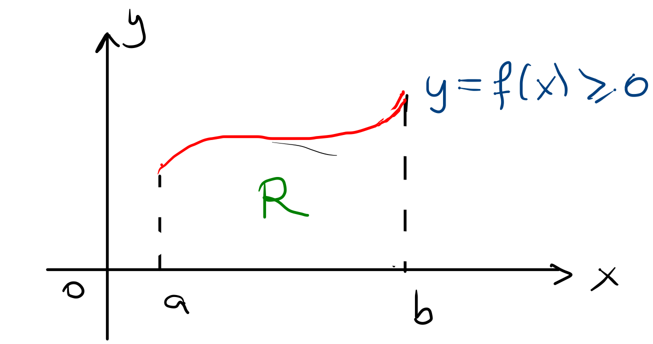
$$= 2\int \frac{dx}{x} - \int \frac{4x\,dx}{2x^2+1} - 3\int \frac{x\,dx}{(2x^2+1)^2}$$

$$= 2\int \frac{dx}{x} - \int \frac{du}{u} - 3\int \frac{\frac{du}{4}}{u^2}$$

$$= 2\ln|x| - \ln|u| + \frac{3}{4u} + C$$

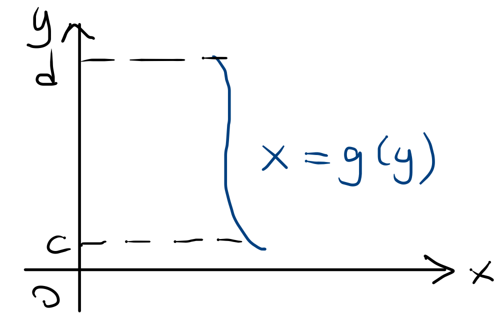
$$= 2\ln|x| - \ln|2x^2+1| + \frac{3}{4(2x^2+1)} + C$$

Düzlemsel Bölgelerin Alanları

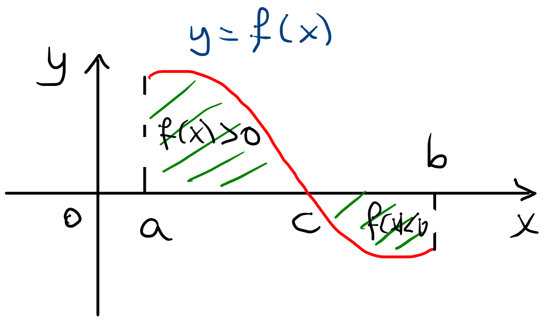


R bölgesinin alanı

$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$

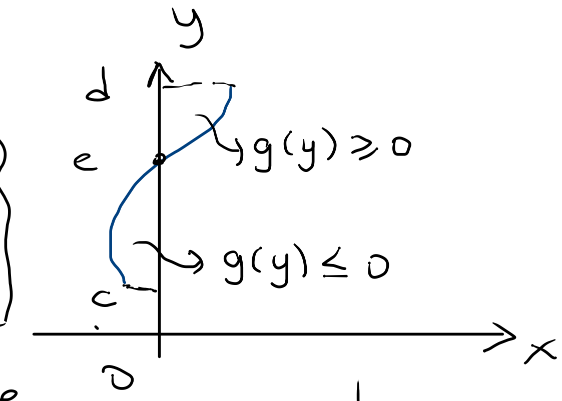


$$A = \int_c^d g(y)\,dy$$



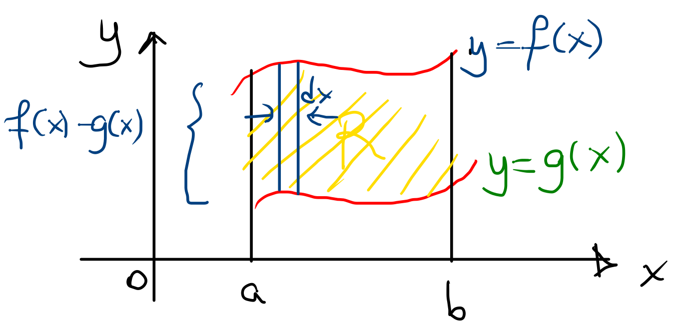
Taralı bölgenin alanı

$$A = \int_a^b |f(x)|\,dx = \int_a^c f(x)\,dx - \int_c^b f(x)\,dx$$



$$A = \int_c^d |g(y)|\,dy = \int_c^e -g(y)\,dy + \int_e^d g(y)\,dy$$

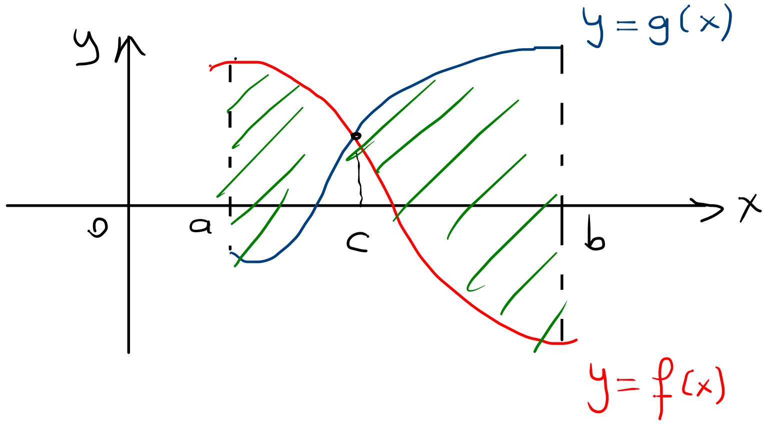
İki eğri arasında kalan alan



Bir düzlemsel R bölgesinin, $y=f(x)$ ve $y=g(x)$ sürekli fonksiyonlarının grafiği ve dikey $x=a$, $x=b$ doğruları ile sınırlandığını kabul edelim. $a<b$ olduğunu ve $[a,b]$ aralığında $g(x)<f(x)$ olduğunu da kabul edelim. Bu durumda g'nin grafiği, f'in grafiğinin altında kalacaktır. Eğer, $[a,b]$'de $g(x) \geq 0$ ise o zaman R bölgesinin alanı x-eksenin üzerinde f'in grafiğinin altında kalan

alandan, x-ekseninin üzerinde g(x)'in grafiğin altında kalan alanın farkıdır.

R bölgesinin alanı $\leftarrow A = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$

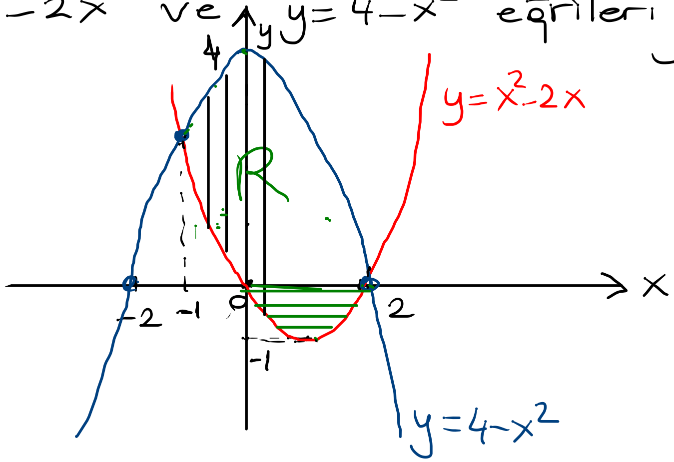


Taralı bölgenin alanı

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx$$

$$= \int_a^c [f(x) - g(x)]\,dx + \int_c^b [g(x) - f(x)]\,dx$$

Ör/ $y = x^2 - 2x$ ve $y = 4 - x^2$ eğrileri arasında kalan sınırlı düzlemsel bölgenin alanını bulunuz.



Not: (Düzgün Bölge kavramı)

Bölge eksenlere dik doğrularla tarandığında doğrular hep bölgeyi sınırlayan iki eğri arasında kalıyorsa bölgeye eksene göre düzgündür denir.

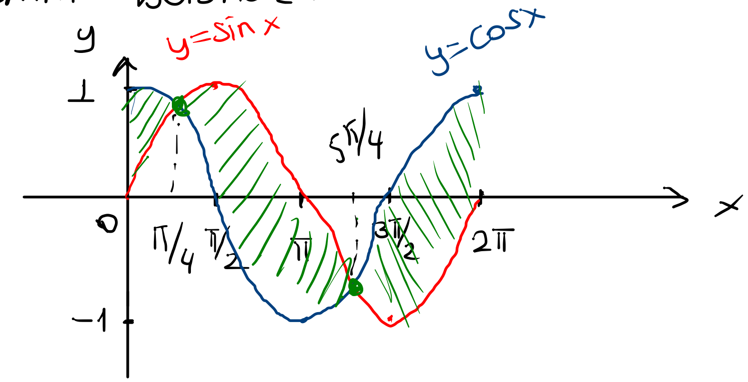
Örneğin; yandaki şekilde x-eksenine dik olan (siyah) doğrularla bölge tarandığında doğrular hep alttaki kırmızı eğri ile üstteki mavi eğri arasında kaldığından bölge x-eksenine göre düzgündür. Dolayısıyla tek bir integral ile alan hesaplanır.

Bölge y-eksenine dik (yeşil) doğrularla tarandığında doğrular önce kırmızı eğrinin iki kolu arasında, sonra kırmızı eğrinin sol kolu ile mavi eğrinin sağ kolu arasında ve daha sonra da mavi eğrinin iki kolu arasında kaldığından bölge y-eksenine göre düzgün değildir. Dolayısıyla alan y'ye göre hesaplanmak istendiğinde 3 integral ile hesaplanacaktır.

x'e göre seçersek; $A=\int_{-1}^{2}(4-x^2-(x^2-2x))\,dx=\int_{-1}^{2}(-2x^2+2x+4)\,dx=-2\frac{x^3}{3}+x^2+4x\Big|_{-1}^{2}=9\ br^2$

y'ye göre seçersek; $A=\int_{-1}^{0}\left[\left(1+\sqrt{1+y}\right)-\left(1-\sqrt{1+y}\right)\right]dy+\int_{0}^{3}\left[\sqrt{4-y}-\left(1-\sqrt{1+y}\right)\right]dy+\int_{3}^{4}\left[\sqrt{4-y}-\left(-\sqrt{4-y}\right)\right]dy$

Ör/ $x=0$ dan $x=2\pi$'ye $y=\sin x$ ve $y=\cos x$ eğrileri arasında kalan düzlemsel bölgenin alanını bulunuz.



$\sin x=\cos x$

$\tan x=1$

$x=\frac{\pi}{4},\ \frac{5\pi}{4}$

1. bölge   3. bölge

$$A=\int_0^{2\pi}|\cos x-\sin x|\,dx$$

$$=\int_0^{\pi/4}(\cos x-\sin x)\,dx+\int_{\pi/4}^{5\pi/4}(\sin x-\cos x)\,dx+\int_{5\pi/4}^{2\pi}(\cos x-\sin x)\,dx$$

$$A = \int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x)\, dx + \int_{\pi/4}^{5\pi/4} (\sin x - \cos x) dx + \int_{5\pi/4}^{2\pi} (\cos x - \sin x)\, dx$$

$$= \left(\sin x + \cos x \Big|_0^{\pi/4}\right) + \left(-\cos x - \sin x \Big|_{\pi/4}^{5\pi/4}\right) + \left(\sin x + \cos x \Big|_{5\pi/4}^{2\pi}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - (0+1) + \left(\cancel{-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}}\right) - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + (0+1) - \left(\cancel{-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}}\right)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}} - \cancel{1} + \frac{2}{\sqrt{2}} + \cancel{1}$$

$$= \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}\ br^2$$

$$\cancel{\int_0^{2\pi} (\cos x - \sin x)\, dx = \sin x + \cos x \Big|_0^{2\pi}}$$

$$\cancel{= (0+1) - (0+1)}$$

$$\cancel{= 0}$$