

### Teorem 3.3

Regüler Sturm-Liouville probleminin negatif özdeğerlerinin sayısı sonludur.

Bu teoremden ve  $w_1(s)=0$  denkleminin köklerinin kareleri problemin özdeğerleri olduğundan  $w_1(s)=0$  denkleminin  $s=it$  şeklindeki köklerinin sayısının sonlu olduğu ve sadece reel köklerden oluşan kümenin sonsuz olabileceği sonucu çıkar.

### Yardımcı Teorem:

$$-y'' + q(x)y = \lambda y \quad (\lambda \in \mathbb{C})$$

denkleminin  $y(0) = \sin \alpha$ ,  $y'(0) = \cos \alpha$  ( $-\infty < \alpha < \infty$ ) koşullarını sağlayan bir tek  $y(x, \lambda)$  çözümü vardır. Ve bu çözüm her  $x \in [0, \pi]$  için  $\lambda$ 'ya bağlı tam fonksiyondur. (yani, her noktada sonlu türevelere sahip fonksiyon)

Yardımcı teoremden ve

$$\varphi(x, \lambda) = \cos sx + \frac{h}{s} \sin sx + \frac{1}{s} \int_0^x q(z) \sin s(x-z) \varphi(z, \lambda) dz$$

formülünden yararlanarak  $w_1(s) \neq 0$  fonksiyonunun tam fonksiyon olduğu gösterilebilir. O takdirde kompleks analizden bilindiği gibi  $w_1(s)=0$  denkleminin her  $d > 0$  sabiti için  $[0, d]$  aralığına ait köklerinin sayısı sonlu olacaktır. Ayrıca  $w_1(s)$  çift fonksiyon olduğunda bu denklemin sadece pozitif köklerinin incelenmesi yeterlidir.

### Teorem 3.3

Regüler Sturm-Liouville probleminin negatif özdeğerlerinin sayısı sonludur.

Bu teoremden ve  $w_1(s)=0$  denkleminin köklerinin kareleri problemin özdeğerleri olduğundan  $w_1(s)=0$  denkleminin  $s=\alpha+i\tau$  şeklindeki köklerinin sayısının sonlu olduğu ve sadece reel köklerden oluşan kümenin sonsuz olabileceği sonucu çıkar.

### Yardımcı Teorem:

$$-y'' + q(x)y = \lambda y \quad (\lambda \in \mathbb{C})$$

denkleminin  $y(0)=\sin \alpha$ ,  $y'(0)=\cos \alpha$  ( $-\infty < \alpha < \infty$ ) koşullarını sağlayan bir tek  $y(x, \lambda)$  çözümü vardır. Ve bu çözüm her  $x \in [0, \pi]$  için  $\lambda$ 'ya bağlı tam fonksiyondur. (yani, her noktada sonlu türevelere sahip fonksiyon)

Yardımcı teoremden ve

$$\varphi(x, \lambda) = \cos sx + \frac{h}{s} \sin sx + \frac{1}{s} \int_0^x q(z) \sin s(x-z) \varphi(z, \lambda) dz$$

formülünden yararlanarak  $w_1(s) \neq 0$  fonksiyonunun tam fonksiyon olduğu gösterilebilir. O takdirde kompleks analizden bilindiği gibi  $w_1(s)=0$  denkleminin her  $d>0$  sabiti için  $[0, d]$  aralığına ait köklerinin sayısı sonlu olacaktır. Ayrıca  $w_1(s)$  çift fonksiyon olduğunda bu denklemin sadece pozitif köklerinin incelenmesi yeterlidir.

Teorem 3.2. den dolayı  $|s| \geq s_0$ ,  $x \in [0, \pi]$  için  $\varphi(x, \lambda) = O(e^{|t| x})$  dir. Bu formülden  $s \geq s_0$  için  $x \in [0, \pi]$  iken

$$\varphi(x, \lambda) = O(1), \quad \varphi(x, \lambda) \leq C \text{ yazılır.}$$

$$\varphi(x, \lambda) = \cos s x + \frac{h}{s} \sin s x + \frac{1}{s} \int_0^x q(z) \sin s(x-z) \varphi(z, \lambda) dz$$

$$\Rightarrow \varphi'(x, \lambda) = -s \sin s x + h \cos s x + \frac{1}{s} \cdot s \cdot \int_0^x q(z) \cos s(x-z) \varphi(z, \lambda) dz$$

$$= -s \sin s x + h \cos s x + \underbrace{\int_0^x q(z) \cos s(x-z) \varphi(z, \lambda) dz}_{O(1)}$$

$$= -s \sin s x + O(1)$$

bulunur.

$$\varphi(x, \lambda) = O(1), \quad \varphi'(x, \lambda) = -s \sin s x + O(1)$$

$$\Rightarrow \varphi(\pi, \lambda) = O(1), \quad \varphi'(\pi, \lambda) = -s \sin s \pi + O(1) \quad (s \geq s_0)$$

dir. Bu eşitlikleri  $\varphi'(\pi, \lambda) + H \varphi(\pi, \lambda) = 0$  denkleminde yerine yazarsak;

$$-s \sin s \pi + O(1) + H O(1) = 0$$

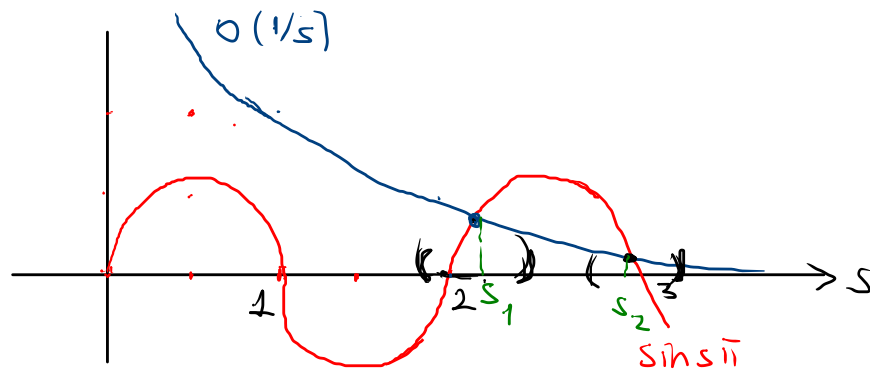
$$\Rightarrow \underbrace{s \sin s \pi + O(1) = 0}_{\text{elde edilir.}}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dx} I(x, \alpha) &= \frac{d}{dx} \left[ \int_{a(x)}^{b(x)} f(x, \alpha) d\alpha \right] \\ &= \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial x} d\alpha \\ &\quad + b'(x) \cdot f(x, b(x)) \\ &\quad - a'(x) \cdot f(x, a(x)) \end{aligned} \right.$$

Bu denklemin köklerini inceleyelim. Bunun için denklemi

$$\sin s\pi = O\left(\frac{1}{s}\right)$$

şeklinde yazıp  $\sin s\pi$  ve  $O\left(\frac{1}{s}\right)$  grafiklerini çizelim.



$|\sin s\pi| \leq C \cdot s^{-1}$  özelliği sağlanır.

$$s \in \mathbb{N} \quad \sin s\pi = 0 \Rightarrow s\pi = n\pi \Rightarrow s = n \quad n \in \mathbb{N}$$

0 halde  $O\left(\frac{1}{s}\right)$  ve  $\sin s\pi$ 'nin kesişim noktaları doğal sayıların çok yakınındadır.

Bu grafikten görüldüğü gibi öyle bir  $m \in \mathbb{N}$  vardır ki  $-ss\sin s\pi + O(1)$  denkleminin  $m$ 'den büyük kökleri  $(n - \frac{1}{4}, n + \frac{1}{4})$  ( $n = m, m+1, m+2, \dots$ ) aralığına aittir. (Not arkada)

$-ss\sin s\pi + O(1) = 0$  denkleminin kökleri  $s = s_n = n + \delta_n$  şeklinde olsun.  $|\delta_n| < \frac{1}{4}$

$$-(n + \delta_n) \sin(n + \delta_n)\pi + O(1) = 0$$

$$\sin(n + \delta_n)\pi - O\left(\frac{1}{n + \delta_n}\right) = 0$$

$$\sin n\pi \cdot \cos \delta_n\pi + \underbrace{\cos n\pi}_{(-1)^n} \cdot \sin \delta_n\pi - O\left(\frac{1}{n + \delta_n}\right) = 0 \Rightarrow (-1)^n \cdot \sin \delta_n\pi - \underbrace{O\left(\frac{1}{n + \delta_n}\right)}_{< \frac{C}{n + \delta_n}} = 0$$

$$\frac{1}{n+\delta_n} = \frac{1}{n+\delta_n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n} = -\frac{\delta_n}{n(n+\delta_n)} + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n} \Rightarrow O\left(\frac{1}{n+\delta_n}\right) \leq c \cdot (n+\delta_n)^{-1} < \frac{2c}{n}$$

$$\left| \frac{-\delta_n}{n(n+\delta_n)} \right| \leq \frac{|\delta_n|}{n(n-|\delta_n|)} \ll \frac{\frac{1}{4}}{\underbrace{n(n-\frac{1}{4})}_{>1}} < \frac{1}{n}$$

$$O\left(\frac{1}{n+\delta_n}\right) = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1+x+x^2+\dots = \sum x^n \quad |x| < 1$$

$$\Rightarrow (-1)^n \sin \delta_n \pi = O\left(\frac{1}{n}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \sin \delta_n \pi = O\left(\frac{1}{n}\right) = 0 \quad (3.7)$$

Buradan yararlanarak  $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$  olduğunu gösterelim.

Aksihi farzedelim yani  $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n \neq 0$  olsun. ( $\{\delta_n\}$  dizisi bu durumda ıraksak veya  $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = a \neq 0$  dir)

$\{\delta_n\}$  dizisinin  $|\delta_{n_m}| > \delta_0 > 0$  olacak şekilde bir alt dizisi vardır.

$$|\pi \delta_{n_m}| > \pi \delta_0 > 0, \quad |\delta_{n_m}| < \frac{1}{4} \Rightarrow |\pi \delta_{n_m}| < \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow 0 < \pi \delta_0 < |\pi \delta_{n_m}| < \frac{\pi}{4} \Rightarrow 0 < |\sinh(\pi \delta_0)| < |\sinh(\pi \delta_{n_m})| < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

bulunur. Bu ise (3.7)'a göre  $\sin \delta_n \pi = O\left(\frac{1}{n}\right)$  ( $\Rightarrow |\sin \delta_n \pi| \leq \frac{c}{n}$ ) olmasına aykırıdır.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c}{n} = 0$   $|\sin \delta_n \pi| \rightarrow 0$

**NOT:** Her  $(n - \frac{1}{4}, n + \frac{1}{4})$  aralığına ait olan kök tek'tir.

$$[s \sin s\pi - O(1)]'_s = \sin s\pi + \pi s \cos s\pi - O(1)$$

$s \in (n - \frac{1}{4}, n + \frac{1}{4}) \quad n \geq m.$

$$|\cos(n - \frac{1}{4})\pi| = |\cos(n + \frac{1}{4})\pi|$$

$$|\underbrace{\cos n\pi}_{(-1)^n} \cos \frac{\pi}{4} + \overset{0}{\sin n\pi} \sin \frac{\pi}{4}| = \frac{1}{\sqrt{2}} < |\cos s\pi|$$

Dolayısıyla

$\sin s\pi + \pi s \cos s\pi - O(1)$  ifadesi  $(n - \frac{1}{4}, n + \frac{1}{4})$  aralığında ya pozitif ya da negatiftir. Yani

$$s \sin s\pi - O(1) \quad (s \geq s_0)$$

fonksiyonu gözönüne alınan aralıkta ya artan ya da azalandır. Bu durumda

$s \sin s\pi - O(1) = 0$  denkleminin  $(n - \frac{1}{4}, n + \frac{1}{4})$  ( $n \geq m$ ) aralıklarına ait her kökü tek'tir.

$$|\delta_n \pi| \cdot \left| \frac{\sin \delta_n \pi}{\delta_n \pi} \right| = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$|\delta_n| = \frac{1}{\pi} O\left(\frac{1}{n}\right) \cdot \left| \frac{\delta_n \pi}{\sin \delta_n \pi} \right| \leq \frac{C}{n}$$

$$\left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\delta_n \pi}{\sin \delta_n \pi} = 1 \right)$$

$$\delta_n = O\left(\frac{1}{n}\right) \Rightarrow s_n = n + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\lambda_n = s_n^2 = n^2 + O(1) \quad \left( s_n^2 = n^2 + 2n O\left(\frac{1}{n}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right)^2 \right)$$

$\rightarrow$  Özdeğerlerin asimptotik formülü

$$|\lambda_n - n^2| \leq C \quad \text{yazılır.}$$

Özdeğerler için daha açık bir formül bulalım. Bunun için  $q(x)$  fonksiyonunun  $[0, \pi]$  aralığında sürekli türevelere sahip olduğunu kabul edelim.

Teorem 3.2'den

$$\varphi(x, \lambda) = \cos s x + O\left(\frac{e^{H|x}}{|s|}\right) \rightarrow \begin{array}{l} s \text{ in sanal kısmı} \\ \text{olduğundan } t=0 \\ \text{olacaktır. } (s, s_0) \end{array} \quad \begin{array}{l} z = a + ib \\ |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \\ s = \lambda + it \\ (s \rightarrow \text{tam sayı}) \end{array}$$

$$s \geq s_0 \text{ için } \varphi(x, \lambda) = \cos s x + O\left(\frac{1}{|s|}\right) \quad (3.8) \quad \begin{array}{l} s = \sqrt{\lambda} > s_0 > 0 \\ |s| > s_0 \quad s = it \end{array}$$

$$\varphi(x, \lambda) = \cos s x + \frac{h}{s} \sin s x + \frac{1}{s} \int_0^x q(z) \sin s(x-z) \varphi(z, \lambda) dz \quad (3.9)$$

$$\varphi'(x, \lambda) = -s \sin s x + h \cos s x + \int_0^x q(z) \cos s(x-z) \varphi(z, \lambda) dz \quad (3.10)$$

(3.10)'daki integrali göz önüne alalım ve (3.8)'i kullanalım

$$\int_0^x q(z) \cos s(x-z) \varphi(z, \lambda) dz = \int_0^x q(z) \cos s(x-z) \left[ \cos s z + O\left(\frac{1}{|s|}\right) \right] dz$$

$$= \int_0^x q(z) \cos s(x-z) \cos s z dz + \int_0^x q(z) \cos s(x-z) O\left(\frac{1}{|s|}\right) dz$$

$$= \int_0^x q(z) [\cos s x \cos s z + \sin s x \sin s z] \cos s z dz + \int_0^x q(z) \cos s(x-z) O\left(\frac{1}{|s|}\right) dz$$

$$= \underbrace{\int_0^x q(z) \cos s x \cdot \cos^2 s z dz}_{\text{I}} + \underbrace{\int_0^x q(z) \sin s x \sin s z \cos s z dz}_{\text{II}} + \underbrace{\int_0^x q(z) \cos s(x-z) O\left(\frac{1}{|s|}\right) dz}_{\text{III}}$$

$$\begin{cases} \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \\ \hline \cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)] \end{cases}$$

I.  $\int_0^x q(z) \cdot \cos sx \cdot \cos^2 sz \, dz = \cos sx \int_0^x q(z) \cdot \left( \frac{1 + \cos 2sz}{2} \right) dz$

$$= \frac{\cos sx}{2} \int_0^x q(z) \, dz + \frac{\cos sx}{2} \int_0^x q(z) \underbrace{\cos 2sz \, dz}_{=}$$

$$= \frac{\cos sx}{2} \int_0^x q(z) \, dz + \cos sx \int_0^x q(z) \left[ \frac{\sin 2sz}{2s} \right]' dz$$

$$= \frac{\cos sx}{2} \int_0^x q(z) \, dz + \frac{\cos sx}{2s} \int_0^x q(z) \cdot (\sin 2sz)' \, dz$$

$$= \frac{\cos sx}{2} \int_0^x q(z) \, dz + \frac{\cos sx}{2s} \left[ q(z) \sin 2sz \Big|_0^x - \int_0^x \sin 2sz \cdot q'(z) \, dz \right]$$

$$= \frac{\cos sx}{2} \int_0^x q(z) \, dz + O\left(\frac{1}{s}\right) \quad \underbrace{\leq \frac{C}{s}}_{\text{(sınırlı)}}$$

$q(z) = u$   
 $q'(z) \, dz = du$   
 $(\sin 2sz)' \, dz = dv$   
 $\sin 2sz = v$

II.  $\sin sx \int_0^x q(z) \sin sz \cos sz \, dz = O\left(\frac{1}{s}\right)$  (benzer işlemlerle gösterilebilir)

III.  $\int_0^x q(z) \cos s(x-z) \cdot O\left(\frac{1}{|s|}\right) \, dz = O\left(\frac{1}{s}\right)$  ( " )



$$\varphi'(x, \lambda) = -s \sinh s x + h \cos s x + \frac{\cos s x}{2} \int_0^x q(z) dz + O\left(\frac{1}{|s|}\right)$$

$$\varphi'(\pi, \lambda) = -s \sinh s \pi + h \cos s \pi + \frac{\cos s \pi}{2} \int_0^\pi q(z) dz + O\left(\frac{1}{|s|}\right)$$

$$\varphi(x, \lambda) = \cos s x + O\left(\frac{1}{s}\right)$$

$$\varphi(\pi, \lambda) = \cos s \pi + O\left(\frac{1}{s}\right)$$

$$\varphi'(\pi, \lambda) + H \varphi(\pi, \lambda) = 0$$

$$-s \sinh s \pi + h \cos s \pi + \frac{\cos s \pi}{2} \int_0^\pi q(z) dz + O\left(\frac{1}{|s|}\right) + H \left( \cos s \pi + O\left(\frac{1}{|s|}\right) \right) = 0$$

$$\Rightarrow -s \sinh s \pi + \underbrace{\cos s \pi \left[ H + h + \frac{1}{2} \int_0^\pi q(z) dz \right]}_{c_1} + O\left(\frac{1}{|s|}\right) = 0$$

elde edilir.

( $s = s_n = n + \delta_n$  olsun.)

$$\underline{s \sinh s \pi - c_1 \cos s \pi + O\left(\frac{1}{|s|}\right) = 0} \Rightarrow (n + \delta_n) \sinh(n + \delta_n) \pi - c_1 \cos(n + \delta_n) \pi + \underbrace{O\left(\frac{1}{n}\right)}_{O\left((n + \delta_n)^{-1}\right)} = 0$$

Eşitliğin her tarafını  $(n + \delta_n) \cdot \cos(n + \delta_n) \pi$  'ye bölelim.

$$\Rightarrow \frac{\sin(n+\delta_n)\pi}{\cos(n+\delta_n)\pi} - \frac{c_1}{n+\delta_n} + \frac{1}{n+\delta_n} \cdot O\left(\frac{1}{n}\right) = 0$$

$$\frac{1}{n+\delta_n} \approx \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\frac{1}{n(1+\frac{\delta_n}{n})} = \frac{1}{n} \cdot \left(1 - \frac{\delta_n}{n} + \left(\frac{\delta_n}{n}\right)^2 - \dots\right)$$

$$= \frac{1}{n} - \frac{\delta_n}{n^2} + \dots$$

$$= \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\Rightarrow \tan(n+\delta_n)\pi - \frac{c_1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = 0$$

$\delta_n$  çok küçük

$$|\cos(n+\delta_n)\pi| > \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + \underline{x^2 - x^3 + \dots}$$

$$\tan \delta_n \pi = \frac{c_1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = 0$$

$$\tan \delta_n \pi = \delta_n \pi + O[(\delta_n \pi)^3]$$

$$\delta_n = O\left(\frac{1}{n}\right) \Rightarrow (\delta_n \pi)^3 = O\left(\frac{1}{n^3}\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\Rightarrow \tan \delta_n \pi = \delta_n \pi + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

ve ~~ve~~ dan

$$\delta_n \pi + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{c_1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = 0$$

$$\delta_n \pi = \frac{c_1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \Rightarrow \delta_n = \frac{c_1}{n\pi} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad c_1 = \left[ h + h + \frac{1}{2} \int_0^\pi q(x) dx \right] \quad \frac{c_1}{\pi} = c \text{ olsun.}$$

$$s_n = n + \delta_n \Rightarrow s_n = n + \frac{c}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\lambda_n = s_n^2 = \left[ n + \frac{c}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right]^2 = n^2 + \frac{c^2}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right) + 2c + O\left(\frac{1}{n}\right) + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$\lambda_n = n^2 + 2c + O\left(\frac{1}{n}\right) \text{ elde ederiz.}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0 \quad |\delta_n| \leq \frac{c}{n} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n \pi = 0 \\ \exists n \in \mathbb{N}, n \geq N \text{ iken} \\ |\delta_n \pi| < \varepsilon \text{ dir.} \\ \delta_n = O\left(\frac{1}{n}\right) \Rightarrow |\delta_n| \leq \frac{c}{n} \\ |(\delta_n \pi)^3| = \pi^3 \cdot |\delta_n|^3 \leq \pi^3 \cdot \frac{c^3}{n^3} \leq \frac{c^3 \cdot \pi^3}{n^2} \end{array} \right.$$

Öyle  $\varepsilon > 0$  ve  $A > 0$  sabitleri vardır ki  $|x| < \varepsilon$  için  $x \rightarrow 0$   $\tan x = x + O(x^3) \Rightarrow |\tan x - x| = |O(x^3)| \leq Ax^3$  ( $x \geq 0$ )

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots}{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots}$$

$$\begin{array}{r} x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \\ -x + \frac{x^3}{2!} - \frac{x^5}{4!} + \dots \\ \hline \frac{x^3}{3} - \frac{4x^5}{5!} + \dots \\ -\frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{3 \cdot 2} - \dots \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \\ x + \frac{x^3}{3} - \dots \end{array}$$