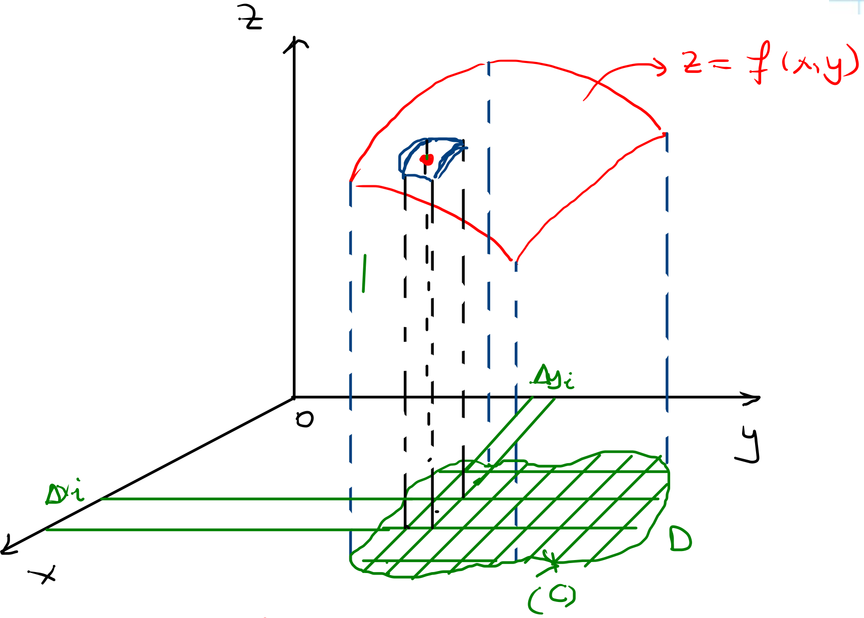
iki katlı integraller

xoy düzleminde bir c eğrisi ile sınırlı kapalı bir D bölgesinde tanımlı ve sürekli olan $z=f(x,y)$ fonksiyonunu gözönüne alalım.

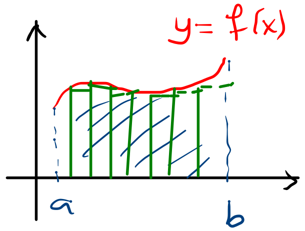


D bölgesini, alanları ΔA_i $(i=1,2,\ldots,n)$ olan kısmi bölgelere ayırıp bu bölgelerden keyfi (x_i,y_i) noktaları seçelim.

$$f(x_1,y_1)\cdot\Delta A_1+f(x_2,y_2)\Delta A_2+\cdots+f(x_n,y_n)\Delta A_n=\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\Delta A_i$$

toplamını oluşturalım. Bu toplam, tabanı ΔA_i ve yüksekliği $f(x_i,y_i)$ olan silindir elemanlarının hacimleri toplamıdır. ΔA_i alanlarının herbirinin sıfıra yaklaşması halinde bu toplamın limitine $z=f(x,y)$ fonksiyonunun D bölgesinde iki katlı integrali denir ve

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ (\Delta A_i\to 0)}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\cdot\Delta A_i=\iint_D f(x,y)\,dA$$



$\Delta A=\Delta x_i\,\Delta y_i$

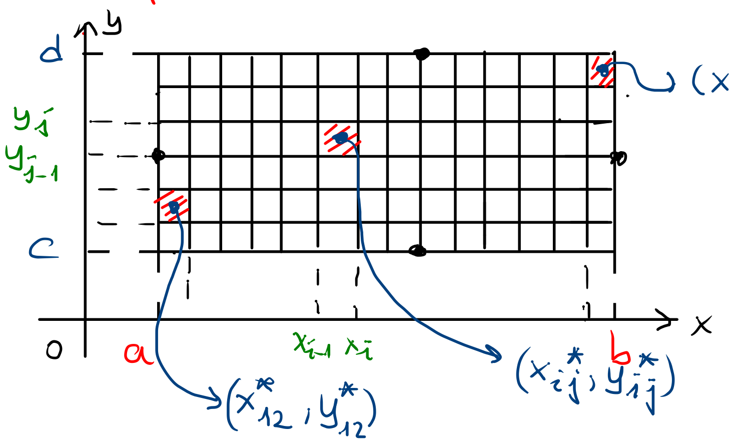
şeklinde gösterilir. Bu integralin değeri, D bölgesinin çevresi üzerinde üstten $z=f(x,y)$ ve alttan xoy-düzlemi ile sınırlı cismin hacmini verir. Bu limit D bölgesinin kısmi bölgelere bölünüş şekline ve (x_i,y_i) noktalarının ΔA_i içindeki seçiliş şekline bağlı değildir. Eğer D bölgesi eksenlere paralel doğrularla kısmi bölgelere ayrılırsa, kısmi bölgeler birer dikdörtgen olur ve bu dikdörtgenlerin alanları $\Delta A_i=\Delta x_i\,\Delta y_i$ ve dolayısıyla

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\,\Delta A_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\cdot \Delta x_i \Delta y_i = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$

olur. D bölgesine integrasyon bölgesi denir.

Düzgün bölge : Eğer, D bölgesinin çevresi, eksenlere dik doğrularla en çok iki noktada kesiliyorsa bölgeye düzgün bölge denir.

Dikdörtgenler üzerinde iki katlı integraller



D bölgesinin; kenarları xy-düzlemindeki koordinat eksenlerine paralel olan bir dikdörtgensel bölge olduğunu $f(x,y)$ fonksiyonunun da bu bölge üzerinde sınırlı bir fonksiyon olduğunu gözönüne alalım. Eğer D bölgesi $a \le x \le b$, $c \le y \le d$ şeklindeki (x,y) noktalarından oluşuyorsa o zaman $[a,b]$ ve $[c,d]$ aralıklarının her birini

$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_i < \dots < x_m = b$

$c = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_j < \dots < y_n = d$ şeklinde parçalayarak

D bölgesinin küçük dikdörtgenlerden oluşan bir P parçalanışını oluşturabiliriz. P parçalanışı mn tane D_{ij} $(1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n)$ dikdörtgenlerinden oluşur. Dikdörtgenlerin her biri $x_{i-1} \le x \le x_i$, $y_{j-1} \le y \le y_j$

noktalarından oluşur. D_{ij} dikdörtgenin alanı $\Delta A_{ij} = \Delta x_i \Delta y_j$ ve diyagonal uzunluk

$$\operatorname{diam}(D_{ij}) = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_j - y_{j-1})^2}$$

şeklindedir. P parçalanışının normu $\|P\| = \max\limits_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} (\operatorname{diam}(D_{ij}))$ dir. Her bir D_{ij} dikdörtgeninden bir (x_{ij}^*, y_{ij}^*) noktası alarak her bir parçalanıştaki dikdörtgene karşı gelen mn terimin toplamı olan

$$R(f,P) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\, \Delta A_{ij}$$

Riemann toplamını oluşturalım. Her bir D_{ij} dikdörtgenine karşılık gelen terim eğer $f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \geq 0$ ise tabanı D_{ij} ve yüksekliği $f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)$'ın değeri olan dikdörtgensel kutunun hacmidir.

$$\lim_{\|P\| \to 0} R(f,P) = \iint_D f(x,y)\, dA = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\, dy\, dx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\, dx\, dy$$

dir.

Teorem: (Fubini'nin 1- teoremi)

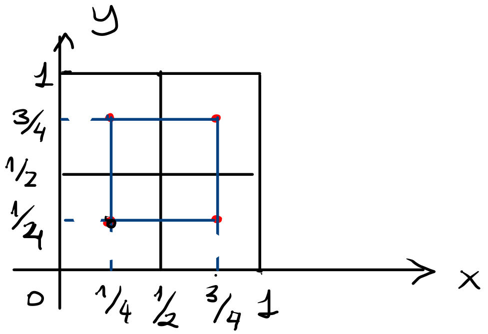
Eğer $f(x,y)$, $a \le x \le b$, $c \le y \le d$ dikdörtgensel bölgesi üzerinde sürekli ise;

$$\iint_D f(x,y)\, dA = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\, dy\right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\, dx\right] dy$$

dir.

NOT: D bölgesi üzerinde sürekli olan fonksiyonlar bu bölgede integrallenebilirdirler.

Ör/ D bölgesi $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$ karesi olsun. $\iint_D (x^2+y)\, dA$ integraline yaklaşık bir değer bulmak için bölgenin 4 tane küçük kareye parçalanışına karşılık gelen Riemann toplamını her birinin merkezindeki noktaları seçerek kullanınız.



$$\Delta A_{ij} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

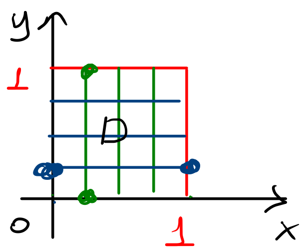
$$R(f,P) = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\cdot \Delta A_{ij}$$

$$= f(x_{11}^*, y_{11}^*)\cdot\Delta A_{11} + f(x_{12}^*, y_{12}^*)\cdot\Delta A_{12} + f(x_{21}^*, y_{21}^*)\Delta A_{21} + f(x_{22}^*, y_{22}^*)\Delta A_{22}$$

$$= f\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{1}{4} + f\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{1}{4} + f\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right)\frac{1}{4} + f\left(\frac{3}{4},\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{1}{4}$$

$$= \left[\left(\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{4}\right]\cdot\frac{1}{4} + \left[\left(\frac{3}{4}\right)^2+\frac{1}{4}\right]\cdot\frac{1}{4} + \left[\left(\frac{1}{4}\right)^2+\frac{3}{4}\right]\cdot\frac{1}{4} + \left[\left(\frac{3}{4}\right)^2+\frac{3}{4}\right]\cdot\frac{1}{4}$$

$$= \frac{5}{64} + \frac{13}{64} + \frac{13}{64} + \frac{21}{64} = \frac{52}{64} = \frac{13}{16}$$



x'e dik doğrular aldık;

$$\iint_D (x^2+y)\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1\int_0^1 (x^2+y)\, dy\, dx = \int_0^1 \left[x^2y + \frac{y^2}{2} \Big|_0^1 \right] dx = \int_0^1 \left[\left(x^2+\frac{1}{2}\right) - 0\right] dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x}{2}\Big|_0^1 = \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right) - 0$$

$$= \frac{5}{6}$$ //

y'ye dik doğrular alırsak;

$$\int_0^1\int_0^1 (x^2+y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left[\frac{x^3}{3}+yx \Big|_0^1 \right] dy$$

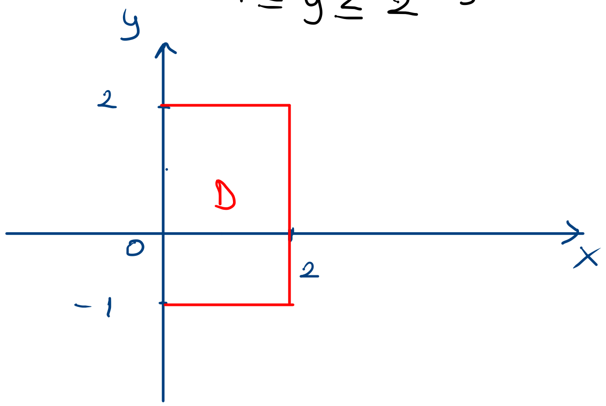
$$= \int_0^1 \left[\left(\frac{1}{3}+y\right)-0\right] dy$$

$$= \frac{y}{3}+\frac{y^2}{2} \Big|_0^1$$

$$= \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)-0$$

$$= \frac{5}{6}$$

Ör/ $D: \begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ -1 \le y \le 2 \end{cases}$ ve $f(x,y) = 100 - 6x^2y$ olduğuna göre $\iint_D f(x,y)\,dA = ?$



$$\iint_D (100-6x^2y)\,dA = \int_0^2\int_{-1}^2 (100-6x^2y)\,dy\,dx = \int_{-1}^2\int_0^2 (100-6x^2y)\,dx\,dy$$

$$= \int_0^2 \left(100y - \frac{6x^2y^2}{2}\Big|_{-1}^{2}\right) dx$$

$$= \int_0^2 \left[(200-12x^2) - (-100-3x^2)\right] dx$$

$$= \int_0^2 (300-9x^2)\,dx = 300x - \frac{\cancel{9}^{3}x^3}{\cancel{3}}\Big|_0^2 = 600-24 = 576$$

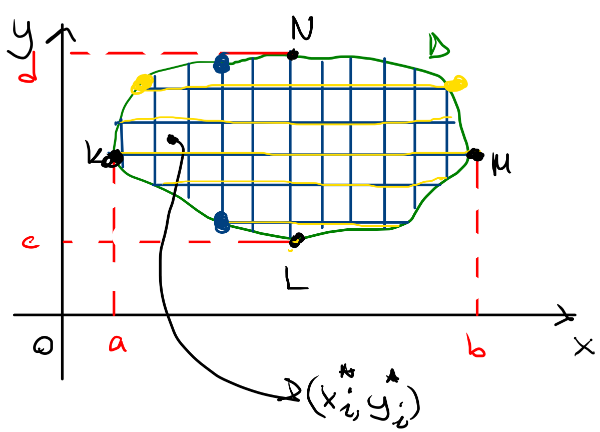
$$= \int_{-1}^2 \left[100x - 6\frac{x^3}{3}y\Big|_0^2\right] dy$$

$$= \int_{-1}^2 [200-16y]\,dy = 200y - 8y^2\Big|_{-1}^2$$

$$= [(400-32) - (-200-8)]$$

$$= 600 - 24 = 576$$

Genel Bölgeler Üzerinde iki katlı integraller. (Dik kesitler kullanarak iki katlı integrali hesaplamak)



$\overset{\frown}{KLM}: \varphi_1(x)$ $\qquad$ $\overset{\frown}{NKL} = g_1(y)$

$\overset{\frown}{KNM}: \varphi_2(x)$ $\qquad$ $\overset{\frown}{NML} = g_2(y)$

$$R(f,P) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\,\Delta A_i$$

$$\lim_{\|P\|\to 0} R(f,P) = \iint_D f(x,y)\,dA$$

x'e dik doğrular alarak bölge taranırsa;

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_a^b\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$

y'ye dik doğrular alarak bölge taranırsa;

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_c^d\int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$

Teorem: (Fubini'nin 2. teoremi)

$f(x,y)$ bir D bölgesi üzerinde sürekli olsun.

1) Eğer D bölgesi $\varphi_1(x)$ ve $\varphi_2(x)$ $[a,b]$ aralığında sürekli olmak üzere $a \leq x \leq b$, $\varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)$ ile tanımlı ise;

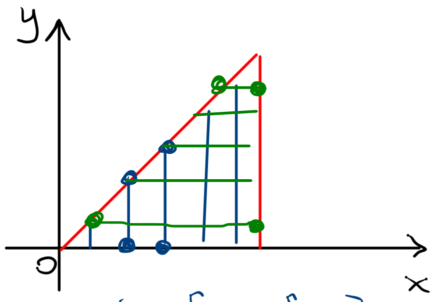
$$\iint_D f(x,y)\, dA = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\, dy \right] dx$$

2) Eğer D bölgesi $g_1(y)$ ve $g_2(y)$ $[c,d]$ aralığında sürekli olmak üzere $g_1(y) \leq x \leq g_2(y)$, $c \leq y \leq d$ ile tanımlı ise

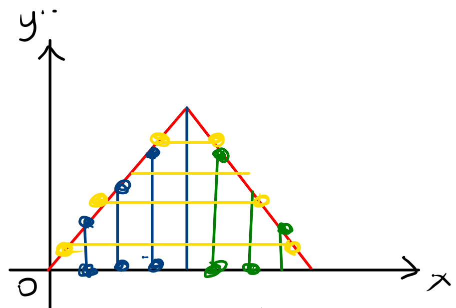
$$\iint_D f(x,y)\, dA = \int_c^d \left[\int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)\, dx \right] dy$$

dir.

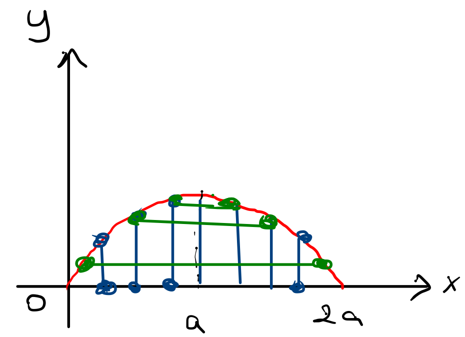
Düzgün bölge örnekleri



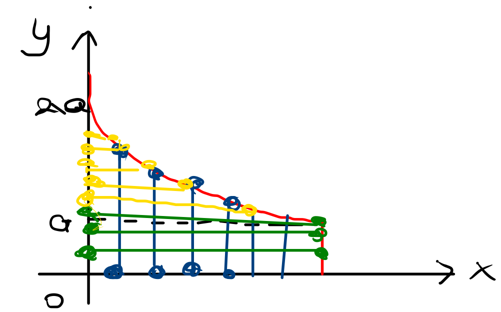
x'e göre düzgün
y'ye göre de düzgün



x'e göre düzgün bölge değildir.
y'ye göre düzgün bölgedir.



x'e göre düzgün bölge
y'ye göre de düzgün bölge



x'e göre düzgün bölge
y'ye göre düzgün bölge değildir.

Ör/ $I = \int_{-2}^{1}\left[\int_{y^2}^{2-y} dx\right]dy = \int_{-2}^{1}\left[x \Big|_{y^2}^{2-y} \right] dy = \int_{-2}^{1}(2-y-y^2)\,dy = 2y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\Big|_{-2}^{1} = \left(2-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) - \left(-4-2+\frac{8}{3}\right)$

$= \frac{7}{6} - \left(-\frac{10}{3}\right) = \frac{7}{6} + \frac{10}{3} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2}$

integrasyon sırasını değiştirirsek; (y'ye göre düzgün olan bölgeyi x'e dik doğrular la tarayarak yeniden integrali yazmak dersek)

$y^2 \leq x \leq 2-y$

$-2 \leq y \leq 1$

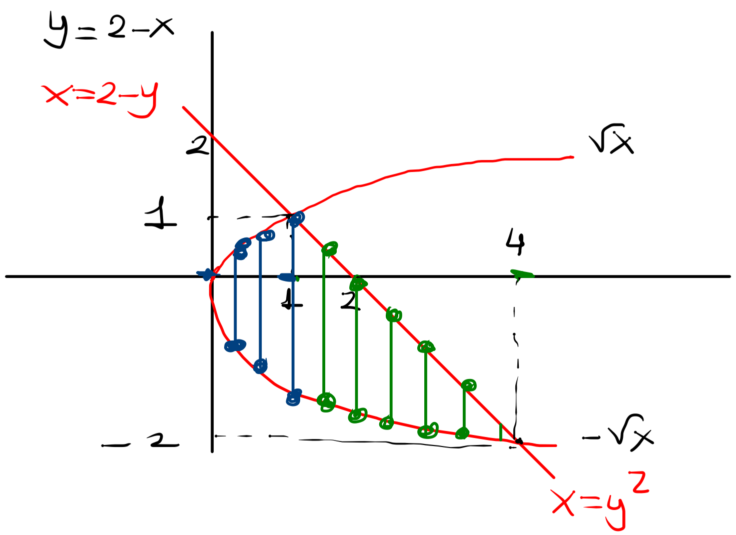
$x = 2-y$

$x=0 \Rightarrow y=2$

$y=0 \Rightarrow x=2$

$x = y^2 \Rightarrow y = \mp\sqrt{x}$

$x = 2-y \Rightarrow y = 2-x$



$y^2 = 2-y \Rightarrow y^2 + y - 2 = 0$

2 −1

$y=-2 \quad y=1$

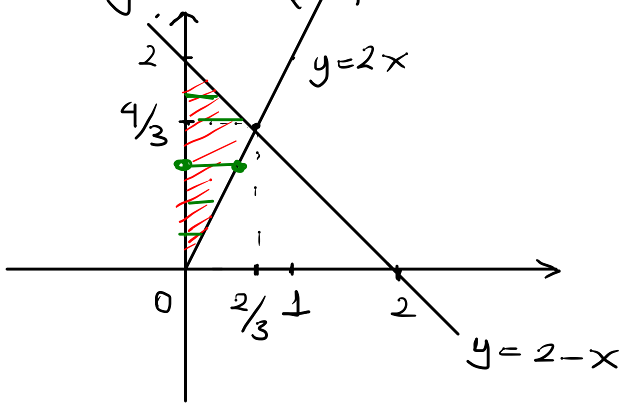
x'e göre bölge düzgün değil iki ayrı int. ile yazacağız.

$$\int_0^1 \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} dy\,dx + \int_1^4 \int_{-\sqrt{x}}^{2-x} dy\,dx$$

$I=\int_0^{2/3}\int_{2x}^{2-x} f(x,y)\,dy\,dx$ integralinde integrasyon sırası değiştirildiğinde elde edilen yeni integral aşağıdakilerden hangisidir.

$0\le x\le \frac{2}{3}$

$2x \le y \le 2-x$



$$I=\int_0^{4/3}\int_0^{y/2} f(x,y)\,dx\,dy+\int_{4/3}^{2}\int_0^{2-y} f(x,y)\,dx\,dy$$

a) $\int_0^{2/3}\int_{2y}^{2-y} f(x,y)\,dx\,dy$

b) $\int_0^{2/3}\int_0^{y/2} f(x,y)\,dx\,dy+\int_0^{4/3}\int_0^{2-y} f(x,y)\,dx\,dy$

c) $\int_0^{4/3}\int_0^{y/2} f(x,y)\,dx\,dy+\int_{4/3}^{2}\int_0^{2-y} f(x,y)\,dx\,dy$

d) $\int_0^{2/3}\int_0^{y/2} f(x,y)\,dx\,dy+\int_{2/3}^{2}\int_0^{2-y} f(x,y)\,dx\,dy$

e) $\int_0^{4/3}\int_{2-y}^{y/2} f(x,y)\,dx\,dy$

• $I = \int_0^{3/4} \int_{3x}^{3-x} f(x,y)\, dy\, dx$

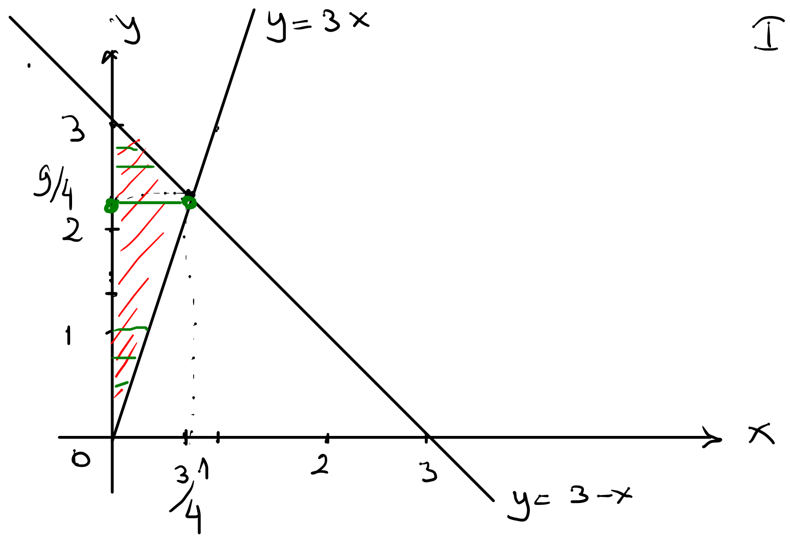
$0 \le x \le \frac{3}{4}$

$3x \le y \le 3-x$

$3x = 3-x$

$4x = 3$

$x = \frac{3}{4}$



$I = \int_0^{9/4} \int_0^{y/3} f(x,y)\, dx\, dy + \int_{9/4}^{3} \int_0^{3-y} f(x,y)\, dx\, dy$

• $I = \int_0^{1/2} \int_x^{1-x} f(x,y)\, dy\, dx$

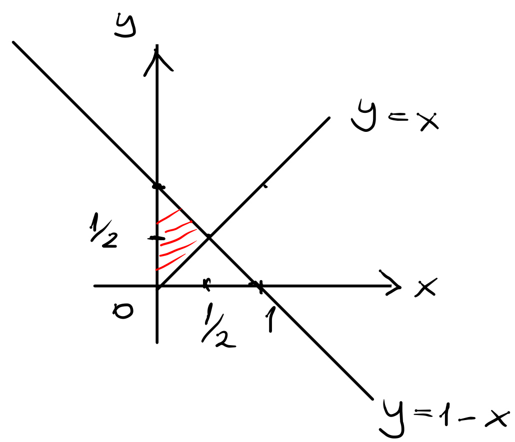
$0 \le x \le \frac{1}{2}$

$x \le y \le 1-x$

$x = 1-x$

$2x = 1$

$x = \frac{1}{2}$



$I = \int_0^{1/2} \int_0^{y} f(x,y)\, dx\, dy + \int_{1/2}^{1} \int_0^{1-y} f(x,y)\, dx\, dy$

$$I = \int_0^{4/5} \int_{4x}^{4-x} f(x,y)\, d\cancel{x}y\, dx$$

$$I = \int_0^{16/5} \int_0^{y/4} f(x,y)\, dx\, dy + \int_{16/5}^{4} \int_0^{4-y} f(x,y)\, dx\, dy$$

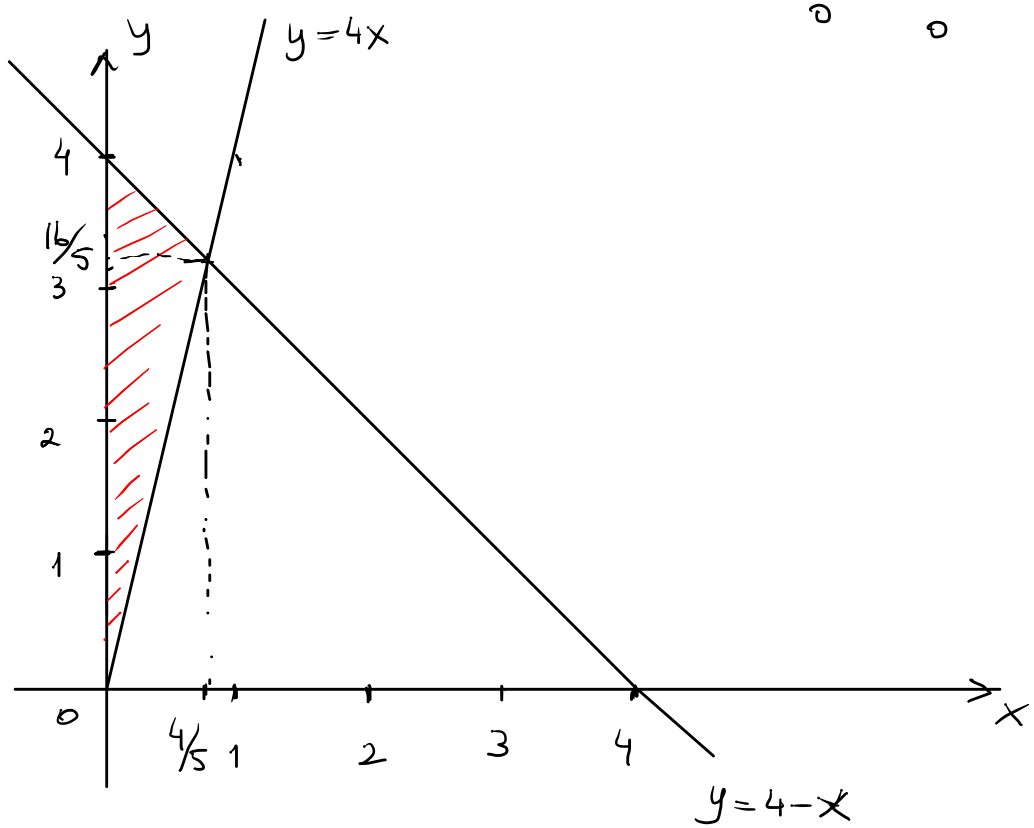
$0 \le x \le \frac{4}{5}$

$4x \le y \le 4-x$

$4x = 4-x$

$5x = 4$

$x = \frac{4}{5}$



$I=\int_0^{\sqrt{2}}\int_{\frac{y^2}{2}}^{\sqrt{3-y^2}} f(x,y)\,dx\,dy$ integralinde integrasyon sırası değiştirildiğinde elde edilen yeni integral aşağıdakilerden hangisidir?

$0\le y\le\sqrt{2}$

$\frac{y^2}{2}\le x\le\sqrt{3-y^2}$

$\frac{y^2}{2}=\sqrt{3-y^2}$

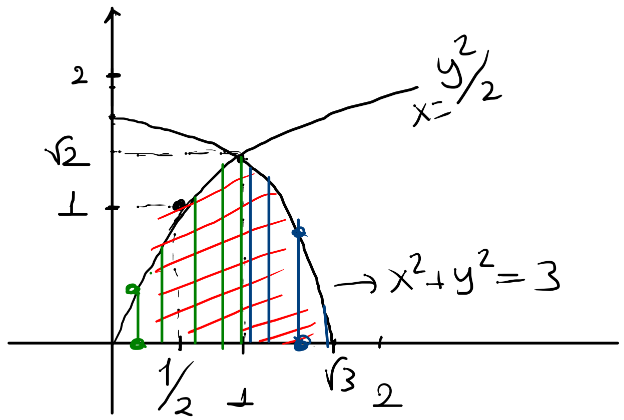
$\frac{y^4}{4}=3-y^2$

$y^4=12-4y^2$

$y^4+4y^2-12=0$

$(y^2-2)(y^2+6)=0$

$y^2=2 \Rightarrow y=\mp\sqrt{2}$



$x=\frac{y^2}{2}$ $\qquad x^2+y^2=3$

$I=\int_0^1\int_0^{\sqrt{2x}} f(x,y)\,dy\,dx+\int_1^{\sqrt{3}}\int_0^{\sqrt{3-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx$

$$I = \int_0^1 \int_{y^2}^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)\,dx\,dy$$

$$I = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy\,dx + \int_1^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx$$

$0 \le y \le 1$

$y^2 \le x \le \sqrt{2-y^2}$

$y^2 = \sqrt{2-y^2}$

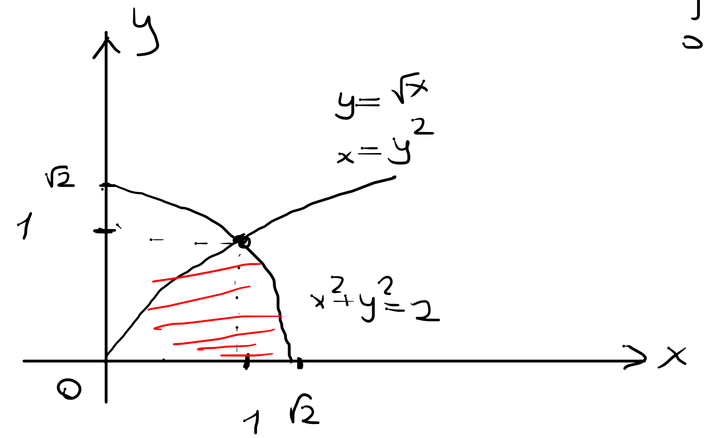
$y^4 = 2-y^2$

$y^4+y^2-2=0$

$(y^2-1)(y^2+2)=0$

$y^2=1$

$y=\mp 1$



$$I = \int_0^{\sqrt{3}} \int_{\frac{y^2}{3}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)\,dx\,dy$$

$0 \le y \le \sqrt{3}$

$\frac{y^2}{3} \le x \le \sqrt{4-y^2}$

$\frac{y^4}{9} = 4-y^2$

$y^4 = -9y^2+36$

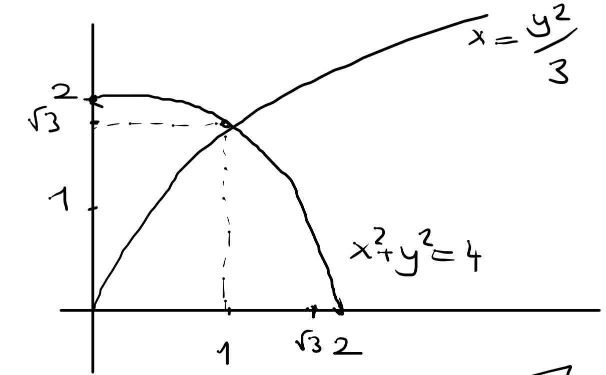
$y^4+9y^2-36=0$

$+12 \quad -3$

$(y^2+12)(y^2-3)=0$

$y^2=3$

$y=\mp\sqrt{3}$



$$I = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{3x}} f(x,y)\,dy\,dx + \int_1^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx$$

• $I = \int_0^2 \int_{\frac{y^2}{4}}^{\sqrt{5-y^2}} f(x,y)\,dx\,dy$

$0 \le y \le 2$

$\frac{y^2}{4} \le x \le \sqrt{5-y^2}$

$\frac{y^2}{4} = \sqrt{5-y^2}$

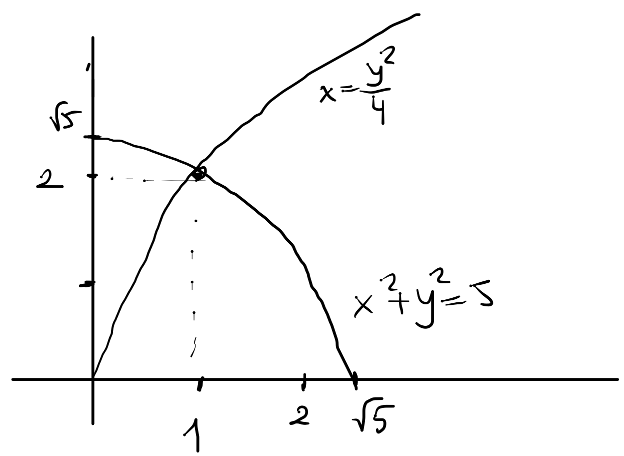
$\frac{y^4}{16} = 5-y^2$

$y^4+16y^2-80=0$

$20 \cdot -4$

$(y^2-4)(y^2+20)=0$

$y = \mp 2$

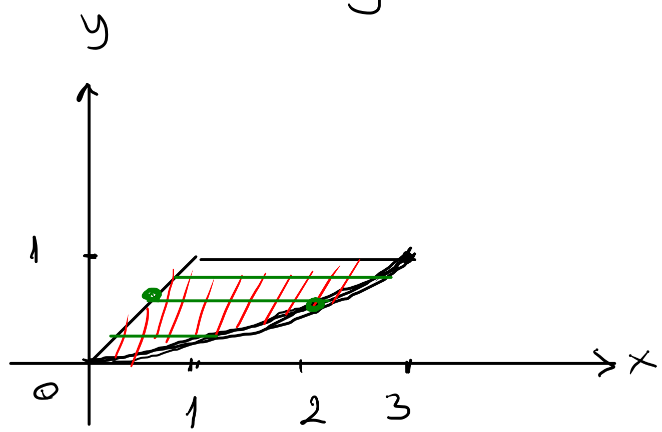


$I = \int_0^1 \int_0^{2\sqrt{x}} f(x,y)\,dy\,dx + \int_1^{\sqrt{5}} \int_0^{\sqrt{5-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx$

$$\int_0^1 \int_{\frac{x^2}{9}}^{x} f(x,y)\,dy\,dx + \int_1^3 \int_{\frac{x^2}{9}}^{1} f(x,y)\,dy\,dx = \int_0^1 \int_y^{3\sqrt{y}} f(x,y)\,dx\,dy$$

$$0 \le x \le 1 \qquad\qquad 1 \le x \le 3$$

$$\frac{x^2}{9} \le y \le x \qquad\qquad \frac{x^2}{9} \le y \le 1$$



a) $\displaystyle\int_0^1 \int_{\frac{y^2}{9}}^{y} f(x,y)\,dx\,dy + \int_1^3 \int_{y^2/9}^{1} f(x,y)\,dx\,dy$

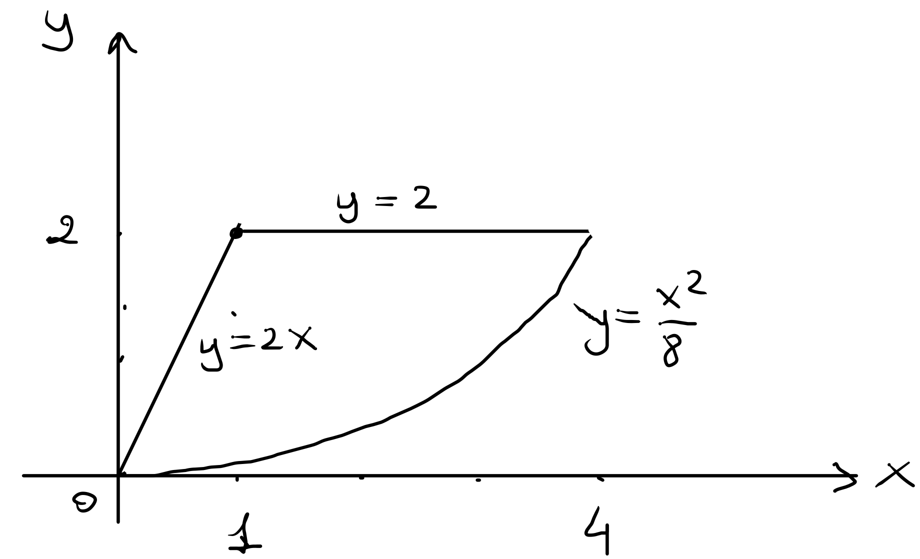
b) $\displaystyle\int_0^1 \int_y^{3\sqrt{y}} f(x,y)\,dx\,dy$

c) $\displaystyle\int_0^1 \int_{3\sqrt{y}}^{9} f(x,y)\,dx\,dy$

d) $\displaystyle\int_1^3 \int_x^{3\sqrt{x}} f(x,y)\,dx\,dy$

e) $\displaystyle\int_0^1 \int_y^{y^2/9} f(x,y)\,dx\,dy + \int_1^3 \int_1^{y^2/9} f(x,y)\,dx\,dy$

- $I = \int_0^1 \int_{\frac{x^2}{8}}^{2x} f(x,y)\,dy\,dx + \int_1^4 \int_{\frac{x^2}{8}}^{2} f(x,y)\,dy\,dx$

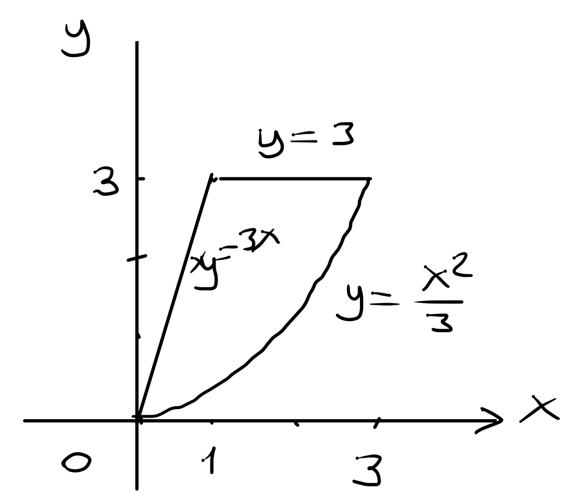


$0 \le x \le 1$ $\quad\quad$ $1 \le x \le 4$

$\frac{x^2}{8} \le y \le 2x$ $\quad\quad$ $\frac{x^2}{8} \le y \le 2$

$$I = \int_0^2 \int_{\frac{y}{2}}^{2\sqrt{2y}} f(x,y)\,dx\,dy$$

- $I = \int_0^1 \int_{\frac{x^2}{3}}^{3x} f(x,y)\,dy\,dx + \int_1^3 \int_{\frac{x^2}{3}}^{3} f(x,y)\,dy\,dx$

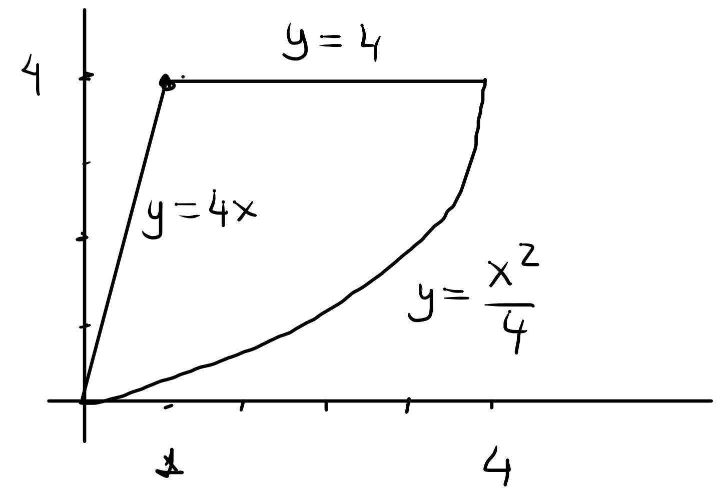


$0 \le x \le 1$ $\quad\quad$ $1 \le x \le 3$

$\frac{x^2}{3} \le y \le 3x$ $\quad\quad$ $\frac{x^2}{3} \le y \le 3$

$$I = \int_0^3 \int_{y/3}^{\sqrt{3y}} f(x,y)\,dx\,dy$$

$$I = \int_0^1 \int_{\frac{x^2}{4}}^{4x} f(x,y)\, dy\, dx + \int_1^4 \int_{\frac{x^2}{4}}^{4} f(x,y)\, dy\, dx$$



$0 \le x \le 1$ $\qquad$ $1 \le x \le 4$

$\frac{x^2}{4} \le y \le 4x$ $\qquad$ $\frac{x^2}{4} \le y \le 4$

$$I = \int_0^4 \int_{\frac{y}{4}}^{2\sqrt{y}} f(x,y)\, dx\, dy$$