Sonlu bölgede Neumann Sınır Değer Problemlerinin Çözümleri

Poisson denklemi için

$$\left.\begin{aligned} \nabla^2 u &= F(x,y) \quad (x,y)\in A \quad (a) \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= k(x,y) \quad (x,y)\in \beta(A) \quad (b) \end{aligned}\right\} (22)$$

$$\iint 1\,\delta(x-X)\,\delta(y-Y)\,dx\,dY = 1 \neq \oint_{\beta(A)} 0\,ds = 0$$

Neumann problemi, Dirichlet probleminden daha zordur. Çünkü buna karşılık gelen homojen problemi

$$\left.\begin{aligned} \nabla^2 u &= 0 \quad (x,y)\in A \quad (a) \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 \quad (x,y)\in \beta(A) \quad (b) \end{aligned}\right\} (23)$$

daima $u=sbt$ şeklinde aşikâr olmayan çözümlere sahiptir.
Sonuç olarak, (22) problemi tek bir çözüme sahip değildir. Eğer $u(x,y)$ bir çözüm ise $u(x,y)+c$ de bir çözümdür. (22) probleminin bir çözümünün var olması için $F(x,y)$ ve $k(x,y)$'nin aşağıdaki teoremde belirtildiği üzere tutarlılık koşulunu sağlaması gerekir.

Teorem: (22) Neumann probleminin bir çözüme sahip olması için gerek ve yeter koşul

$$\iint_A F(x,y)\,dA = \oint_{\beta(A)} k(x,y)\,ds \qquad (24)$$

olmasıdır.

(22) problemi durgun haldeki bir ısı iletim problemi olduğunda (24) koşulu, A bölgesi içindeki ısı oluşumunun sınırdaki ısı transferi ile telafi edilmesi gerektiğini; ima eder. Bu nedenle, (22) probleminin Green fonksiyonu

$$\left.\begin{aligned} \nabla^2 u &= \underbrace{\delta(x-X,\, y-Y)}_{F(x,y)} && (x,y)\in A \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= \underbrace{0}_{k(x,y)} && (x,y)\in \beta(A) \end{aligned}\right\} \quad (25)$$

$$\iint_A F(x,y)\,dA = \oint_{\beta(A)} k(x,y)\,ds$$

$$\iint_A \delta(x-X,y-Y)\,dx\,dY = 1 \neq \oint_{\beta(A)} 0 . ds = 0$$

probleminin çözümü olarak tanımlamak boşunadır. Tutarlılık koşulu sağlanmaz.

Adi dif. denklemler için Green fonksiyonlarını ve modifiye Green fonksiyonlarını göz önüne alırsak,

bunlar

$$\left.\begin{aligned} \nabla^2 \overset{\text{Green fonk.}}{N} &= \underbrace{\delta(x-X,\, y-Y) - \frac{1}{A\text{'nın alanı}}}_{F(x,y)} && (x,y)\in A \\ \frac{\partial N}{\partial n} &= \underbrace{0}_{k(x,y)} && (x,y)\in \beta(A) \end{aligned}\right\} \quad (26)$$

problemini sağlar.

(24) koşulu sağlandığı için (26) probleminin çözümleri mevcuttur.

$$\iint_A \left[\delta(x-X,\, y-Y) - \frac{1}{A\text{'nın alanı}}\right] dA = 1-1=0$$

Bazı çözümler (x,y) ve (X,Y)'nin yer değiştirmesine göre simetriktir; bazıları ise değildir. Aşağıdaki teoreme göre simetrik olanlar tercih edilir. Ancak zorunlu değildir.

Teorem:

(24) koşulu sağlandığında (22) Neumann probleminin çözümü, C keyfi bir sabit ve $N(x,y;X,Y)$ (26) problemini sağlayan simetrik modifiye Green fonksiyonu olmak üzere

$$u(x,y)=\iint_A N(x,y;X,Y)\,F(X,Y)\,dA-\oint_{\partial(A)} N(x,y;X,Y)\,k(X,Y)\,ds+C \qquad (27)$$

şeklindedir.

Ör/

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0 && 0<x<L,\ 0<y<L'\\
&\frac{\partial v}{\partial x}(0,y)=0 && 0<y<L'\\
&\frac{\partial v}{\partial x}(L,y)=0 && 0<y<L'\\
&\frac{\partial v(x,0)}{\partial y}=0 && 0<x<L\\
&\frac{\partial v(x,L')}{\partial y}=f(x) && 0<x<L
\end{aligned}\right\}$$

Sınır değer problemini modifiye Green fonksiyonunu kullanarak çözünüz.

$$\frac{\partial^2 N}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 N}{\partial y^2}=\delta(x-X,\,y-Y)-\frac{1}{LL'}$$

$0<x<L$

$0<y<L'$

$N_x'(0,y)=0$

$N_x'(L,y)=0$

$N_y'(x,0)=0$

$N_y'(x,L')=0$

$$\int_0^L [f_n(x)]^2\,dx=1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(y)\,f_n(x)$$

$\nabla^2 N=0$

$N'_x(0,y)=0$

$N'_x(L,y)=0$

$$\frac{\partial^2 N}{\partial x^2}=X''Y \qquad \frac{\partial^2 N}{\partial y^2}=XY''$$

$$\frac{X''Y+XY''}{XY}=\frac{0}{XY}\Rightarrow \frac{X''}{X}+\frac{Y''}{Y}=0$$

$$\frac{X''}{X}=-\frac{Y''}{Y}=t$$

$$N(x,y;X,Y)=X(x)\,Y(y)$$

$$\boxed{X''-Xt=0}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(y)\,f_n''(x)+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d^2a_n}{dy^2}f_n(x)$$

$+$

$$f_n(x)=\frac{1}{\sqrt{L}}+\sqrt{\frac{2}{L}}\cos\frac{n\pi x}{L}$$

$\downarrow f_0$

N için verilen kısmi türevli dif. denklemde

$$N(x,y;X,Y)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(y)\,f_n(x)=\frac{a_0(y)}{\sqrt{L}}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(y)\cdot\sqrt{\frac{2}{L}}\cos\frac{n\pi x}{L} \qquad (27')$$

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right)$$

kısmi özfonksiyon genişlemesini yerine yazarsak;

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-n^2\pi^2}{L^2}a_n f_n(x)+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d^2a_n}{dy^2}f_n(x)=\delta(x-X,\,y-Y)-\frac{1}{LL'}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^L\left[\delta(x-X)\,\delta(y-Y)-\frac{1}{LL'}\right]f_n(x)\,dx\right)f_n(x)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\int_0^L\delta(x-X)\,\delta(y-Y)\,f_n(x)\,dx-\int_0^L\frac{1}{LL'}f_n(x)\,dx\right]f_n(x)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\int_0^L \delta(x-X)\,\delta(y-Y)\, f_n(x)\,dx - \int_0^L \frac{1}{LL'} f_n(x)\,dx \right] f_n(x)$$

$(n=0)$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left[f_n(X)\,\delta(y-Y) - \frac{1}{\sqrt{L}L'} \right] f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\delta(y-Y) - \frac{1}{L'} \right) f_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(X)\,\delta(y-Y)\cdot f_n(x)$$

$$\int_0^L \frac{1}{LL'} f_n(x)\,dx = \frac{1}{LL'} \int_0^L \left[\frac{1}{\sqrt{L}} + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{L}} \cos\frac{n\pi x}{L} \right] dx$$

$$= \frac{1}{LL'} \left[\frac{x}{\sqrt{L}} \Big|_0^L + \cancel{\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{L}} \cdot \frac{L}{n\pi} \sin\frac{n\pi x}{L} \Big|_0^L}^{\,0} \right]$$

$$= \frac{1}{LL'} \left(\frac{L}{\sqrt{L}} - 0 \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{L}L'}$$

Bu denklem $N_y(x,0) = 0 = N_y(x,L')$ sınır koşulları ile birlikte $a_n(y)$ katsayılarının $n=0$ için

$$\frac{d^2 a_0}{dy^2} = \frac{1}{\sqrt{L}}\left[\delta(y-Y) - \frac{1}{L'}\right] \qquad 0<y<L'$$

$$a_0'(0) = a_0'(L') = 0$$

ve $n>0$ için

$$\frac{d^2 a_n}{dy^2} - \frac{n^2\pi^2}{L^2} a_n = f_n(X)\,\delta(y-Y) \qquad 0<y<L'$$

$$a_n'(0) = a_n'(L') = 0$$

problemlerinin sağlanmasını gerektirir.

$$\sum_{n=0}^{\infty} -\frac{n^2\pi^2}{L^2} a_n f_n(x) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^2 a_n}{dy^2} f_n(x) = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\delta(y-Y) - \frac{1}{L'}\right) f_0(x)}_{n=0} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} f_n(X)\,\delta(y-Y)\cdot f_n(\cancel{x})}_{n>0}$$

$$\frac{d^2 a_0}{dy^2} = \frac{-1}{\sqrt{L}L'}$$ 'nün bir çözümü $\frac{-y^2}{2\sqrt{L}L'}$ olduğundan

$$a_0(y) = \begin{cases} Ay+B-\dfrac{y^2}{2\sqrt{L}L'} & 0 \le y < Y \\ Dy+C-\dfrac{y^2}{2\sqrt{L}L'} & Y < y \le L' \end{cases} \qquad (28)$$

$a_0'(0) = a_0'(L') = 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} A=0, \quad D-\dfrac{1}{\sqrt{L}} = 0 \\ AY+B = DY+C, \quad D-A = \dfrac{1}{\sqrt{L}} \end{array} \right\}$$

sınır şartları ve Green fonk. özellikleri.

$A=0$, $D=\frac{1}{\sqrt{L}}$

C keyfi olmak üzere

$B = \frac{Y}{\sqrt{L}} + C$ olur.

$$a_0(y) = \begin{cases} \dfrac{Y}{\sqrt{L}}+C-\dfrac{y^2}{2\sqrt{L}L'} & 0 \le y \le Y \\ \dfrac{y}{\sqrt{L}}+C-\dfrac{y^2}{2\sqrt{L}L'} & Y \le y \le L' \end{cases}$$

$r^2 = 0$

$r_{1,2} = 0$

$\Big\}\ a_{0h}(y) = Ay+B$

$a_{0ö}(y) = y^2(ky+l)$

$= ky^3 + ly^2$

$a_0' = 3ky^2 + 2ly$

$a_0'' = 6ky + 2l$

$6ky + 2l = \frac{-1}{\sqrt{L}L'}$

$k=0 \qquad 2l = \frac{-1}{\sqrt{L}L'}$

$l = \frac{-1}{2\sqrt{L}L'}$

$\Rightarrow a_{0ö}(y) = \frac{-y^2}{2\sqrt{L}L'}$

$a_0(y) = a_{0ö}(y) + a_{0h}(y)$

$= Ay+B-\frac{y^2}{2\sqrt{L}L'}$

$$\frac{d^2 a_n}{dy^2} - \frac{n^2\pi^2}{L^2} a_n = f_n(X)\,\delta(y-Y) \qquad 0<y<L'$$

$$a_n'(0) = a_n'(L') = 0$$

$\frac{d^2 a_n}{dy^2} - \frac{n^2\pi^2}{L^2} a_n = 0$ denkleminin genel çözümü $A\cosh\left(\frac{n\pi y}{L}\right) + B\sinh\left(\frac{n\pi y}{L}\right)$ olduğundan

$$a_n(y) = \begin{cases} A\cosh\frac{n\pi y}{L} + B\sinh\frac{n\pi y}{L} & 0 \le y < Y \\ C\cosh\frac{n\pi y}{L} + D\sinh\frac{n\pi y}{L} & Y < y \le L' \end{cases} \qquad (29)$$

$$a_n'(0) = \frac{Bn\pi}{L} = 0$$

$$a_n'(L') = \frac{n\pi C}{L}\sinh\frac{n\pi L'}{L} + \frac{n\pi D}{L}\cosh\frac{n\pi L'}{L} = 0$$

$$a_n'(y) = \begin{cases} \frac{n\pi A}{L}\sinh\frac{n\pi y}{L} + B\frac{n\pi}{L}\cosh\frac{n\pi y}{L} & 0 \le y < Y \\ \frac{n\pi C}{L}\sinh\frac{n\pi y}{L} + D\frac{n\pi}{L}\cosh\frac{n\pi y}{L} & Y < y \le L' \end{cases}$$

sürekliliği de kullanırsak;

$$A = \frac{-L\cosh\frac{n\pi}{L}(L'-Y)\, f_n(X)}{n\pi\sinh\left(\frac{n\pi L'}{L}\right)}, \quad B = 0, \quad C = \frac{-L\cosh\frac{n\pi L'}{L}\cosh\frac{n\pi Y}{L}\, f_n(X)}{n\pi\sinh\left(\frac{n\pi L'}{L}\right)}, \quad D = \frac{L}{n\pi}\cosh\frac{n\pi Y}{L}\, f_n(X)$$

Bunlar $a_n(y)$'de (29)'da yerine yazılır. Sonra (28) ve (29)'(27')'nde yerine yazılarak Green fonksiyonu belirlenir. Green fonksiyonu simetrik değildir. Bulunan Green fonksiyonu (27)'de yerine yazılarak istenen çözüm

$$V(x,y) = -\int_{c'} N(X,Y;x,y)\, f(X)\, ds + D = -\int_0^L N(X,L';x,y)\, f(X)\, dX + D$$

şeklinde bulunur. $(D \to sbt)$