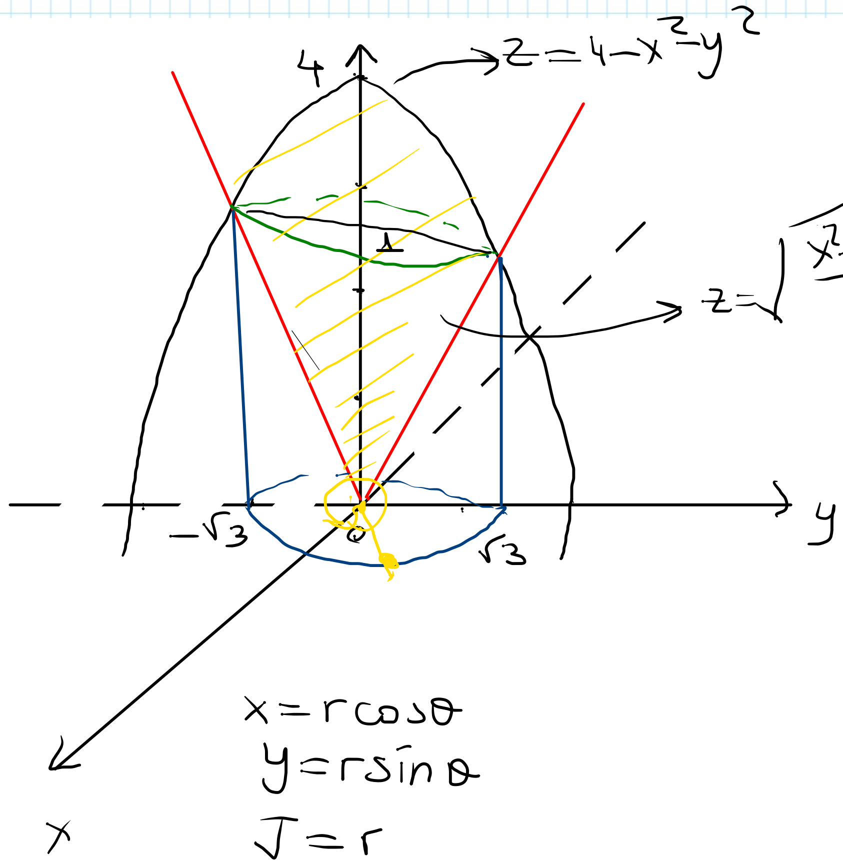
öd/ $x^2+y^2=4-z$ paraboloidi ile $3z^2=x^2+y^2$ koni yüzeylerinin sınırladığı cismin hacmini bulunuz.



$x^2+y^2=4-z \Rightarrow z=4-x^2-y^2$

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2&=4-z \\ x^2+y^2&=3z^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 3z^2=4-z$$

$\Rightarrow 3z^2+z-4=0$

$3z \quad -4$

$z \quad -1$

$(3z+4)(z-1)=0$

$z=-\frac{4}{3}$ $\quad$ $z=1$

$z=1$

$D: \; x^2+y^2=3$

$x=r\cos\theta$

$y=r\sin\theta$

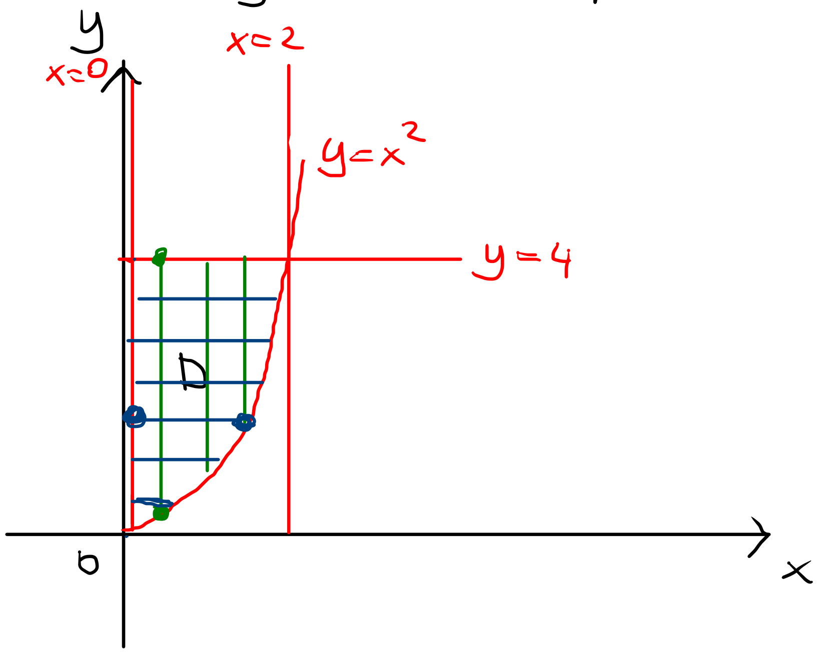
$J=r$

$$V=\iint_D \left((4-x^2-y^2) - \sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}} \right) dA$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}} \left[(4-r^2) - \frac{r}{\sqrt{3}} \right] \cdot r\,dr\,d\theta$$

Örnekler

1) $I=\int_0^2\int_{x^2}^4 x.\sin(y^2)\,dy\,dx$ integralini hesaplayınız.



$0 \le x \le 2$

$x^2 \le y \le 4$

$y^2=t$

$2y\,dy=dt$

$y\,dy=\frac{dt}{2}$

$y=0 \Rightarrow t=0$

$y=4 \Rightarrow t=16$

$$I=\int_0^4\int_0^{\sqrt{y}} x\sin(y^2)\cdot dx\,dy$$

$$=\int_0^4\left[\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{y}}\right]\cdot\sin(y^2)\,dy$$

$$=\int_0^4\frac{y}{2}\cdot\sin(y^2)\,dy$$

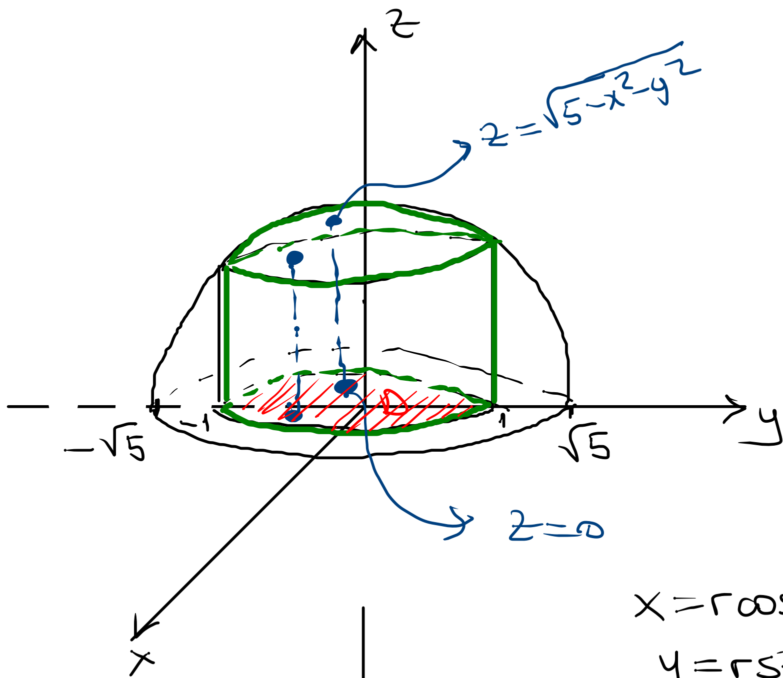
$$=\int_0^{16}\frac{1}{2}\cdot\sin t\,\frac{dt}{2}$$

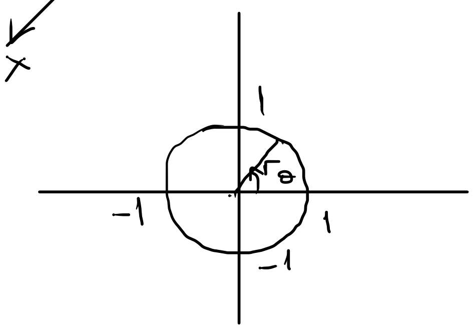
$$=\frac{1}{4}\left(-\cos t\Big|_0^{16}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(-\cos 16+1\right)$$

2) $z=\sqrt{5-x^2-y^2}$ yarı-küresi ile üstten ve $x^2+y^2=1$ silindiri ve de alttan $z=0$ düzlemi ile sınırlı cismin hacmini bulunuz.

$D:\ x^2+y^2=1$





$x=r\cos\theta$

$y=r\sin\theta$

$J=r$

$$V=\iint_D\left(\sqrt{5-x^2-y^2}-0\right)dA$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^1\sqrt{5-r^2}\cdot r\,dr\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_5^4\sqrt{t}\cdot\left(-\frac{dt}{2}\right)d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_4^5 t^{1/2}\,dt\,d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[\frac{2}{3}t^{3/2}\Big|_4^5\right]d\theta$$

$$=\frac{1}{3}(5\sqrt{5}-8)\,\theta\Big|_0^{2\pi}=\frac{2\pi}{3}(5\sqrt{5}-8)\,br^3$$

$5-r^2=t$

$-2r\,dr=dt$

$r\,dr=-\frac{dt}{2}$

$r=0\Rightarrow t=5$

$r=1\Rightarrow t=4$

3) $z = 5 - x - y$ yüzeyi altında $D: 0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 3$ $\left([0,1] \times [0,3] \right)$
bölgesi üstünde bulunan cismin hacmini bulunuz.

$$V = \iint_D (5-x-y)\,dA = \int_0^1 \int_0^3 (5-x-y)\,dy\,dx = \int_0^1 \left((5-x)y - \frac{y^2}{2} \Big|_0^3 \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left[3(5-x) - \frac{9}{2} \right] dx$$

$$= 15x - 3\frac{x^2}{2} - \frac{9x}{2} \Big|_0^1$$

$$= 15 - \frac{3}{2} - \frac{9}{2}$$

$$= 9 \text{ br}^3$$

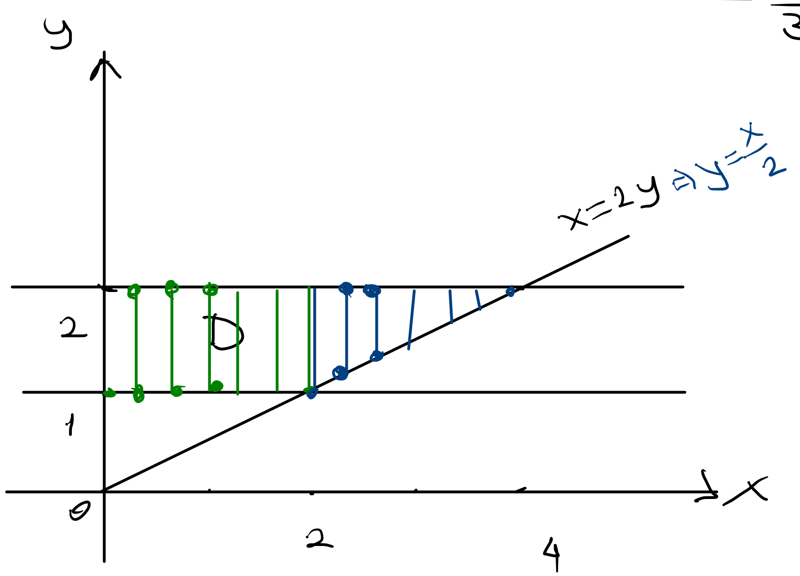
4) $I=\int_1^2\int_0^{2y}(x+y^2)\,dx\,dy$ integralini

a) verildiği şekliyle hesaplayınız.

b) integrasyon sırasını değiştirerek integrali yazınız.

$$I=\int_1^2\left[\frac{x^2}{2}+xy^2\Big|_0^{2y}\right]dy=\int_1^2\left(\frac{4y^2}{2}+2y^3\right)dy$$

$$=\frac{2}{3}y^3+\frac{y^4}{2}\Big|_1^2=\left(\frac{16}{3}+\frac{16}{2}\right)-\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right)=\frac{14}{3}+\frac{15}{2}=\frac{28+45}{6}=\frac{73}{6}$$

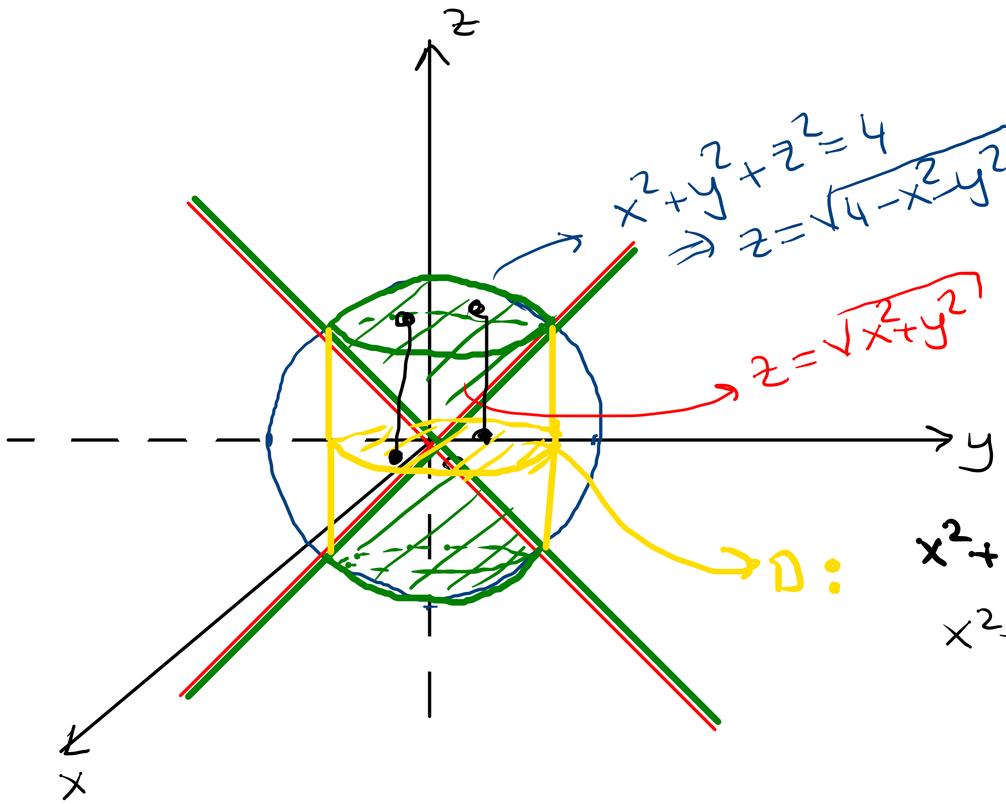


$1\le y\le 2$

$0\le x\le 2y$

$$I=\int_0^2\int_1^2(x+y^2)\,dy\,dx+\int_2^4\int_{x/2}^2(x+y^2)\,dy\,dx$$

5) $x^2+y^2+z^2=4$ küresi ve $z^2=x^2+y^2$ konisinin sınırladığı cismin hacmini bulunuz.

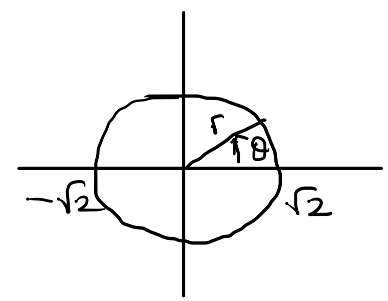


$$\frac{V}{2}=\iint_D\left[\sqrt{4-x^2-y^2}-\sqrt{x^2+y^2}\right]dA$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}}\left(\sqrt{4-r^2}-r\right)r\,dr\,d\theta$$

$$\left.\begin{aligned}x^2+y^2+z^2&=4\\ x^2+y^2&=z^2\end{aligned}\right\}\Rightarrow 2z^2=4$$

$$z=\mp\sqrt{2}\Rightarrow\boxed{x^2+y^2=2}:D$$



$x=r\cos\theta$

$y=r\sin\theta$

$J=r$

6) $f(x,y)=e^{xy}-xy$ fonksiyonunun kritik noktalarını bulunuz ve sınıflandırınız. $(e^{u}-u\geq 1)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=ye^{xy}-y=0 \Rightarrow y(e^{xy}-1)=0 \Rightarrow y=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=xe^{xy}-x=0 \Rightarrow x(e^{xy}-1)=0 \Rightarrow x=0$$

$(0,0)$ K.N.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=y^2e^{xy}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=e^{xy}+xye^{xy}-1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=x^2e^{xy}$$

$\underbrace{(0,0)}$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=0 \quad =A$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=1+0-1=0=B$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0=C$$

$\Rightarrow B^2-AC=0$

Test cevap vermedi.

$$\Delta f=f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)$$

$$\Delta f=f(h,k)-f(0,0)$$

$f(0,0)=1$

$$\Delta f=\underbrace{e^{hk}-hk}_{\geq 1}-1\geq 0 \Rightarrow$$ f bir minimum değere sahiptir.

7) $(2.05) \cdot e^{(2.05)^2 - 3.9}$ değerini yaklaşık olarak hesaplayınız.

$$f(x,y) = x e^{x^2 - y}$$

f'in $(2.05, 3.9)$ daki değerini hesaplamak için $(2, 4)$ noktasında lineer yaklaşımı kullanabiliriz.

$$f(x,y) = x e^{x^2 - y}$$

$$f(2,4) = 2 \cdot e^0 = 2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{x^2 - y} + 2x^2 e^{x^2 - y}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(2,4)} = e^0 + 8 e^0 = 9$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -x e^{x^2 - y}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(2,4)} = -2 e^0 = -2$$

$$L(x,y) = f(a,b) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(a,b)} (x-a) + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(a,b)} (y-b)$$

$$L(2,4) = 2 + 9 \cdot (x-2) - 2(y-4)$$

$$f(2.05, 3.9) \cong L(2.05, 3.9)$$
$$\cong 2 + 9 \cdot (0.05) - 2 \cdot (-0.1)$$
$$\cong 2 + 0.45 + 0.2 = 2.65$$

8) $a_1=\frac{1}{2}$ ve $n\geq 1$ bir doğal sayı, $a_{n+1}=\sqrt{3+a_n}-1$ olmak üzere $\{a_n\}$ dizisinin limiti

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1 \text{ ise } \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-1}{a_n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{3+a_n}-1-1}{a_n-1}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{3+a_n}-2\right)\left(\sqrt{3+a_n}+2\right)}{(a_n-1)\cdot\left(\sqrt{3+a_n}+2\right)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3+a_n-4}{(a_n-1)\left(\sqrt{3+a_n}+2\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{a_n-1}}{\cancel{(a_n-1)}\left(\sqrt{3+a_n}+2\right)}=\frac{1}{4}$$

9) $\{a_n\}$ dizisi yakınsak ve $2a_n+3a_{2n+1}=\frac{5n+1}{2n+3} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = ?$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad , \quad \lim_{n\to\infty}\left[2a_n+3a_{2n+1}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{5n+1}{2n+3}$$

$$5a=\frac{5}{2}$$

$$a=\frac{1}{2}$$

10) $f(x,y)=\sqrt{1+x^2y^2}$ ile verilen fonksiyonun kritik noktalarını bulunuz ve sınıflandırınız.

?

Hatalı mı?

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{xy^2}{\sqrt{1+x^2y^2}}=0 \Rightarrow xy^2=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{yx^2}{\sqrt{1+x^2y^2}}=0 \Rightarrow yx^2=0$$

$x=0$, $y=0$ (k.N)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{y^2\cdot\sqrt{1+x^2y^2}-xy^2\cdot\frac{xy^2}{\sqrt{1+x^2y^2}}}{1+x^2y^2}$$

$$=\frac{y^2(1+x^2y^2)-x^2y^4}{(1+x^2y^2)^{3/2}}$$

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(0,0)}=0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{2xy\left(\sqrt{1+x^2y^2}\right)-xy^2\cdot\frac{yx^2}{\sqrt{1+x^2y^2}}}{1+x^2y^2}$$

$$=\frac{2xy(1+x^2y^2)-x^3y^3}{(1+x^2y^2)^{3/2}}$$

$$=\frac{2xy+x^3y^3}{(1+x^2y^2)^{3/2}}=\frac{xy(2+x^2y^2)}{(1+x^2y^2)^{3/2}}$$

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right|_{(0,0)}=0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\left.\frac{x^2}{(1+x^2y^2)^{3/2}}\right|_{(0,0)}=0$$

11) $f(x,y)=\ln(x^2+y^2)$ fonksiyonunun $(1,-2)$ noktasındaki teğet düzleminin ve normal doğrusunun denklemini bulunuz.

$z=f(x,y)$

$f(x,y)-z=0$

Teğet düz. denk: $z=f(a,b)+\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(a,b)}(x-a)+\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(a,b)}(y-b)$

Normal doğ. denk: $\dfrac{x-a}{\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(a,b)}}=\dfrac{y-b}{\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(a,b)}}=\dfrac{z-f(a,b)}{-1}$

$f(x,y) = \ln(x^2+y^2) \qquad (1,-2)$

$$f(1,-2) = \ln(1+4) = \ln 5$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y^2} \Rightarrow \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,-2)} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{x^2+y^2} \Rightarrow \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,-2)} = \frac{-4}{5}$$

Teğet düz. denk:

$$z = \ln 5 + \frac{2}{5}(x-1) - \frac{4}{5}(y+2)$$

Normal doğ. denk.

$$\frac{x-1}{\frac{2}{5}} = \frac{y+2}{-\frac{4}{5}} = \frac{z-\ln 5}{-1}$$

12) $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{2x^4+y^4}$ fonksiyonunun $(0,0)$ noktasında limitinin varlığını inceleyiniz.

$$y=kx \Rightarrow \lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}} \frac{x^2.k^2x^2}{2x^4+k^4x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x^4}.k^2}{\cancel{x^4}(2+k^4)} = \frac{k^2}{2+k^4}$$

k nın her farklı değeri için sonuç farklı olacağından limit yoktur.

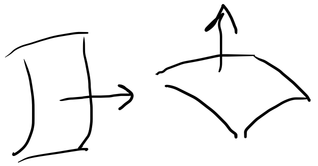
13) $x^2+y^2+z^2=14$ küresinin $z=x^2-y^2$ hiperbolik paraboloidine $(2,1,3)$ noktasında dik olup olmadığını gösteriniz.

$$\nabla f_1 = 2x\vec{i}+2y\vec{j}+2z\vec{k}$$

$$\nabla f_1\Big|_{(2,1,3)} = 4\vec{i}+2\vec{j}+6\vec{k}$$

$$\nabla f_2 = 2x\vec{i}-2y\vec{j}-\vec{k}$$

$$\nabla f_2\Big|_{(2,1,3)} = 4\vec{i}-2\vec{j}-\vec{k}$$



$$\nabla f_1 \cdot \nabla f_2 = 16-4-6 = 6 \neq 0$$ birbirlerine dik değiller

14) $f(x,y)=e^x\sin(x^2-y)$ fonksiyonunun $(0,\pi)$ noktasında hangi yönlerdeki türevi sıfır olur.

$$\nabla f=\left[e^x\sin(x^2-y)+2xe^x\cos(x^2-y)\right]\vec{i}-e^x\cos(x^2-y)\vec{j} \qquad \vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}$$

$$\nabla f(0,\pi)=\vec{j}$$

$$D_{\vec{u}}(0,\pi)=\nabla f(0,\pi)\cdot\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=0 \Rightarrow \vec{j}\cdot\frac{(a_1\vec{i}+a_2\vec{j})}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}=0 \Rightarrow a_2=0 \Rightarrow \vec{a}=a_1\vec{i}$$

$$-a_1\vec{i}$$
$$a_1\vec{i}$$

x-ekseninin pozitif ve negatif yönlerinde alınan türevler sıfırdır.

15) $f(x,y,z)=x^2+2y^2+3z$ fonksiyonunun $M(1,2,0)$ noktasını $N(2,4,2)$ noktasına birleştiren $\overrightarrow{MN}$ yönündeki doğrultu türevinin $M(1,2,0)$ noktasındaki değerini bulunuz.

$$D_{\overrightarrow{MN}}(1,2,0)=\nabla f(1,2,0)\cdot\frac{\overrightarrow{MN}}{|\overrightarrow{MN}|}=(2\vec{i}+8\vec{j}+3\vec{k})\frac{(\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k})}{3}=\frac{2+16+6}{3}=\frac{24}{3}=8$$

$$\nabla f=2x\vec{i}+4y\vec{j}+3\vec{k} \qquad \overrightarrow{MN}=\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$$

$$\nabla f(1,2,0)=2\vec{i}+8\vec{j}+3\vec{k} \qquad |\overrightarrow{MN}|=\sqrt{1+4+4}=3$$

16) $x = t^2uv$ ve $y = u + tv^2$ olmak üzere $z = f(x,y)$ diferansiyellenebilir fonksiyon olsun. $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)} = 4$ ve $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,2)} = -1$ olarak verildiğine göre $\frac{\partial z}{\partial t}$ türevinin $(t,u,v) = (1,1,1)$ noktasındaki değeri aşağıdakilerden hangisidir?

a) 2
b) 3
c) 5
d) 7
e) 9

$$\left.\begin{array}{l} z = f(x,y) \\ x = x(t,u,v) \\ y = y(t,u,v) \end{array}\right\} \Rightarrow z = f\big(x(t,u,v),\, y(t,u,v)\big) = F(t,u,v)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial t} = 4\cdot 2 + (-1)\cdot 1 = 8 - 1 = 7$$

$\left. x \right|_{(1,1,1)} = 1$

$\left. y \right|_{(1,1,1)} = 2$

$\frac{\partial x}{\partial t} = 2tuv$

$\left.\frac{\partial x}{\partial t}\right|_{(1,1,1)} = 2$

$\frac{\partial y}{\partial t} = v^2$

$\left.\frac{\partial y}{\partial t}\right|_{(1,1,1)} = 1$

$(x,y) = (1,2) \Leftarrow (t,u,v) = (1,1,1)$

17) g diferansiyellenebilen bir fonksiyon olmak üzere $g(2)=3$, $g'(2)=1$ ve $f(x,y)=g(x^2y)$ olsun. $(x,y)=(1,2)$ noktasında $f(x,y)$'nin Lineerizasyonunu kullanırsak $f(1.1, 2.1)$'in yaklaşık değeri aşağıdakilerden hangisi olur?

a) 3.5
b) 3.6
c) 3.7
d) 3.8
e) 3.9

$$L(x,y) = f(1,2) + \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(1,2)}(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(1,2)}(y-2)$$

$$f(1,2) = g(2) = 3$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy\,g'(x^2y) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(1,2)} = 2.1.2.g'(2) = 2.1.2.1 = 4$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 g'(x^2y) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(1,2)} = 1.g'(2) = 1.1 = 1$$

$$\Rightarrow L(x,y) = 3 + 4(x-1) + 1.(y-2)$$

$$f(1.1, 2.1) \cong L(1.1, 2.1) = 3 + 4(1.1-1) + 1.(2.1-2)$$
$$= 3 + 4.(0.1) + (0.1)$$
$$= 3.5$$

18) $(x>0, y>0)$, $f(x,y) = y\ln x + xe^y$ olmak üzere

$h(x,y)\, f_{xx} + x\, f_{xy} - f_{yy} = 0$ eşitliğini sağlayan $h(x,y)$ fonksiyonu aşağıdakilerden hangisidir?

a) $-\frac{y}{x}$

b) $\frac{x^2}{y}$

c) $x^2 y$

d) $-x^2 y$

e) $\frac{1}{xy}$

$f_x = \frac{y}{x} + e^y \quad \rightarrow \quad f_{xx} = -\frac{y}{x^2}, \quad f_{xy} = \frac{1}{x} + e^y$

$f_y = \ln x + xe^y \longrightarrow f_{yy} = xe^y$

$$\Rightarrow h(x,y)\cdot\left(\frac{-y}{x^2}\right) + x\cdot\left[\frac{1}{x} + e^y\right] - xe^y = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{y}{x^2} h(x,y) + 1 + \cancel{xe^y} - \cancel{xe^y} = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{y}{x^2} h(x,y) = -1 \Rightarrow h(x,y) = \frac{x^2}{y}$$

19) $b>2$ olmak üzere $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2^{n+1}}{b^n}+\frac{3^n}{4^{n+1}}\right]=\frac{19}{4}$ denklemini sağlayan b değeri aşağıdakilerden hangisidir?

a) 3
b) 5
c) 6
d) 7
e) 8

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2^{n+1}}{b^n}+\frac{3^n}{4^{n+1}}\right]=\frac{19}{4}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^2}{b}\left[\frac{2}{b}\right]^{n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{4^2}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}=\frac{19}{4}$$

$a=\frac{4}{b}$ $|r|=\frac{2}{b}<1$ $a=\frac{3}{16}$. $|r|=\frac{3}{4}<1$

$$\Rightarrow \frac{\frac{4}{b}}{1-\frac{2}{b}}+\frac{\frac{3}{16}}{1-\frac{3}{4}}=\frac{19}{4}\Rightarrow \frac{4}{b-2}+\frac{3}{4}=\frac{19}{4}$$

$$\frac{4}{b-2}=\frac{16}{4}\Rightarrow b-2=1$$

$$b=3$$

20) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{2^{n+2}}$ serisinin toplamı ve yakınsaklık aralığı hangi şıkta doğru verilmiştir?

a) Toplam: $\frac{x-2}{16-4x}$, yakınsaklık aralığı $0<x<4$

b) Toplam: $\frac{x-4}{24-4x}$, yakınsaklık aralığı $2<x<6$

c) Toplam: $\frac{x-2}{16-4x}$, yakınsaklık aralığı $0\le x\le 4$

d) Toplam: $\frac{x-2}{16+x}$, yakınsaklık aralığı $0<x<4$

e) Toplam $\frac{x-4}{24-4x}$, yakınsaklık aralığı $2\le x\le 6$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{2^{n+2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{(x-2)}{2^3}}_{a} \underbrace{\left(\frac{x-2}{2}\right)}_{r}^{n-1} = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{x-2}{8}}{1-\frac{x-2}{2}} = \frac{\frac{x-2}{8}}{\frac{4-x}{2}} = \frac{x-2}{4(4-x)} = \frac{x-2}{16-4x}$$

$|r| = \left|\frac{x-2}{2}\right| < 1 \Rightarrow |x-2|<2 \Rightarrow -2 < x-2 < 2 \Rightarrow 0<x<4$ Yak. aralığı