Örnekler

$n \in \mathbb{Z}^+$

1) $\{a_n\} = \left\{\frac{\cos n}{n}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\cos n}{n}$

$$-1 \leq \cos n \leq 1 \Rightarrow -\frac{1}{n} \leq \frac{\cos n}{n} \leq \frac{1}{n}$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0 \Rightarrow$ sandaviç teo. göre $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\cos n}{n} = 0$ 'dır.

2) $\{a_n\} = \left\{\sqrt{n^2+2n} - n\right\} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2n} - n\right)$

$$\overset{\infty-\infty}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}+2n-\cancel{n^2}}{\sqrt{n^2+2n}+n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2+2n}+n} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n\sqrt{1+\frac{2}{n}}+n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2\cancel{n}}{\cancel{n}\left[\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1\right]} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\underbrace{\frac{2}{n}}_{0}}+1} = \frac{2}{2} = 1$$

3) $\{a_n\} = \{\ln(2n+3) - \ln n\} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\ln(2n+3) - \ln n\right] = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\ln\left(\frac{2n+3}{n}\right)\right]$

$$= \ln\left[\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{n}\right)\right]$$

$$= \ln 2$$

4) $\{a_n\} = \{(2^n+5^n)^{1/n}\}$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (2^n+5^n)^{1/n}$$

$$\overset{\infty^0}{=} \lim_{n\to\infty} \left[5^n\left(\left(\tfrac{2}{5}\right)^n+1\right)\right]^{1/n}$$

$$= 5 \lim_{n\to\infty} \left[\left(\tfrac{2}{5}\right)^n+1\right]^{1/n} \qquad \left(\tfrac{2}{5}<1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\tfrac{2}{5}\right)^n = 0\right)$$

$$= 5$$

5) $\{a_n\} = \{e^n \arcsin(e^{-n})\}$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left[e^n . \arcsin(e^{-n})\right]$$

$$\overset{0.\infty}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\arcsin(e^{-n})}{e^{-n}}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{t\to 0^+} \frac{t}{\sin t} = 1$$

$\arcsin e^{-n} = t$

$e^{-n} = \sin t$

$n\to\infty \quad t\to 0^+$

Teorem: Bir $\{a_n\}$ dizisi yakınsak ise sınırlıdır. Ancak teoremin tersi her zaman doğru değildir.

$$\{(-1)^n\} = \{-1, 1, -1, 1, \ldots\} \qquad (n\in \mathbb{Z}^+)$$

dizisi alttan -1 ve üstten 1 ile sınırlıdır. Ancak dizinin limiti mevcut değildir ve ıraksaktır.

Teorem: Eğer bir $\{a_n\}$ dizisi monoton artan ve üstten sınırlı ise yakınsaktır.
(monoton azalan ve alttan sınırlı)

Ör/ Ardışık olarak $a_1=1$, $a_{n+1}=\frac{3}{4}+\frac{a_n}{2}$ ile tanımlanan $\{a_n\}$ dizisinin yakınsak olduğunu gösteriniz.

NOT: Tümevarım yöntemi : Bir $P(n)$ olayı $(n\in\mathbb{N})$

1. $n=1$ için doğru olduğu gösterilir
2. $n=k$ için doğru olduğu kabul edilir
3. Ve $n=k+1$ için doğru olduğu ispat edilir

ise $\forall n\in\mathbb{N}$ için doğrudur denir.

$$a_1=1<\frac{3}{2},\quad a_2=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}=\frac{5}{4}<\frac{3}{2}\quad a_3=\frac{3}{4}+\frac{5}{8}=\frac{11}{8}<\frac{3}{2}\quad a_4=\frac{3}{4}+\frac{11}{16}=\frac{23}{16}<\frac{3}{2}$$

1. $n=1 \Rightarrow a_1=1<\frac{3}{2}$

2. $n=k \Rightarrow a_k<\frac{3}{2}$ kabul edelim

3. $n=k+1$ için doğru olduğunu ispat edelim

$$a_{k+1}=\frac{3}{4}+\frac{a_k}{2}<\frac{3}{4}+\frac{3/2}{2}=\frac{3}{4}+\frac{3}{4}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}\Rightarrow a_{k+1}<\frac{3}{2}\Rightarrow \{a_n\} \text{ dizisi üstten } \tfrac{3}{2} \text{ ile sınırlıdır.}$$

$$a_{n+1}-a_n=\frac{3}{4}+\frac{a_n}{2}-a_n=\frac{3-2a_n}{4}>0 \Rightarrow a_{n+1}>a_n\Rightarrow \{a_n\} \text{ dizisi monoton artandır.}$$

Dolayısıyla $\{a_n\}$ dizisi üstten sınırlı ve artan olduğundan yakınsaktır.

Bazı önemli limitler

1. Eğer $x>0$ ise $\lim\limits_{n\to\infty} x^{1/n}=1$

2. Eğer $|x|<1$ ise $\lim\limits_{n\to\infty} x^n=0$

3. Her $\alpha>0$ için $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha}=0$

4. Her $x\in\mathbb{R}$ için $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!}=0$

5. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n}=0$

6. $\lim\limits_{n\to\infty} n^{1/n}=1$

7. Her $x\in\mathbb{R}$ için $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n=e^x$

8. $a>1$ ise $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n}=\infty$

- $a>1$ ve $p\in\mathbb{N}$ ise $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n^p}=\infty$

$$\boxed{x=e^{\ln x}}$$

Ör/ $\{a_n\}=\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1^\infty \text{ B.Ş.}$$

$$y=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \Rightarrow \ln y=\ln\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left[n.\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]\overset{0.\infty}{=}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[n\cdot\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right] \overset{0\cdot\infty}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{L'H}{=}} \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\cancel{-1/n^2}}{1+\frac{1}{n}}}{\cancel{\frac{-1}{n^2}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1$$

$$\Rightarrow \ln y = 1 \Rightarrow \boxed{y=e}$$

$$\left\{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x\right\}$$

Ör/ $\{a_n\} = \left\{\left(\frac{1+n^2}{2+n^2}\right)^n\right\}$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+n^2}{2+n^2}\right)^n \overset{1^\infty}{=} \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1+n^2+1-1}{2+n^2}\right]^n = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{2+n^2-1}{2+n^2}\right]^n = \lim_{n\to\infty}\left[1-\frac{1}{2+n^2}\right]^n$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[1-\frac{1}{2+n^2}\right]^{n\cdot\left[\frac{-(2+n^2)}{-(2+n^2)}\right]}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left\{\underbrace{\left[1-\frac{1}{2+n^2}\right]^{-(2+n^2)}}_{e}\right\}^{\frac{-n}{2+n^2}}$$

$$= e^0$$

$$= 1$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{-n}{2+n^2} = 0$$