# DİZİLER VE SERİLER

## Reel Sayı Dizileri:

Reel sayıların bir dizisi pozitif tam sayılar kümesi üzerinde tanımlanmış reel değerli bir fonksiyondur.

Her $n \in \mathbb{Z}^+$ sayısına $f(n) = a_n \in \mathbb{R}$ karşılık gelir.

$\left\{\frac{1}{n}\right\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ---, ---\right\}$

$\{a_n\} = \{a_1, a_2, ---, a_n\} \rightarrow$ sonlu $\qquad a_n \rightarrow$ dizinin genel terimi

$\{a_n\} = \{a_1, a_2, --- a_n, ---\} \rightarrow$ sonsuz

$\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\} = \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, ---\right\}$

$\left\{\frac{n}{n+1}\right\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, ---\right\}$

$\alpha$ $\quad a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$

$\{a_n\} = \{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13 ---\} \rightarrow$ Fibonacci Dizisi

$\alpha$ $\{a_n\}, \{b_n\}$ herhangi iki dizi, $\alpha$ bir sabit olsun

$\alpha . \{a_n\} = \{\alpha a_n\} = \{\alpha a_1, \alpha a_2, --- \alpha a_n, ---\}$

$\{a_n\} \mp \{b_n\} = \{a_n \mp b_n\} = \{a_1 \mp b_1, a_2 \mp b_2, --- a_n \mp b_n, ---\}$

$\{a_n\} . \{b_n\} = \{a_n . b_n\} = \{a_1 b_1, a_2 b_2, --- a_n b_n, ---\}$

$\frac{\{a_n\}}{\{b_n\}} = \left\{\frac{a_n}{b_n}\right\} = \left\{\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, ---, \frac{a_n}{b_n}, ---\right\}$ ($\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $b_n \neq 0$ olmak koşuluyla)

## Dizinin Limiti

Her pozitif reel $\varepsilon$ sayısı için ($\varepsilon > 0, \varepsilon \in R$)

$n \geq N$ iken $|a_n - L| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N$ tamsayısı bulunabiliyorsa $\{a_n\}$ dizisinin limiti $L$'dir ve $\lim_{n \to \infty} a_n = L$ şeklinde gösterilir.

Ör: $\{a_n\} = \{\frac{1}{n}\}$ dizisinin limitinin '0' olduğunu gösteriniz.

$\varepsilon > 0$, $\varepsilon \in R$ $n \geq N$ iken $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N \in Z^+$ var mıdır?

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$$

$$\frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$n \geq N \quad N \in Z^+$$

Eğer $N$ tamsayısı $\frac{1}{\varepsilon}$'dan küçük en büyük tamsayı ise

$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$'dır

$$\lim_{n\to\infty} a_n \begin{cases} \to L \text{ gibi sonlu bir değerse } \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ yakınsaktır.} \\ \to \mp\infty \text{ ise dizi ıraksaktır.} \\ \to \text{limit yok ise dizi yine ıraksaktır.} \end{cases}$$

$\alpha$ Herhangi bir $a_n$ dizisi ya sonlu bir L limitine yakınsak ya da ıraksaktır.

$\Rightarrow \{a_n\} = \left\{\dfrac{n-1}{n}\right\}$

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \dfrac{n-1}{n} = 1$ dizi yakınsaktır.

$\Rightarrow \{a_n\} = \{n\}$

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} n = \infty$ ıraksak

$\Rightarrow \{a_n\} = \{-n\}$

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (-n) = -\infty$ ıraksak

$\Rightarrow \{(-1)^n\} = \{a_n\} = \{-1, 1, -1, 1, ---\}$

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (-1)^n = \begin{cases} n \text{ çift ise} \to 1 \\ n \text{ tek ise} \to -1 \end{cases}$ limit yoktur Dizi ıraksaktır

# LİMİT KURALLARI

Fonksiyonlardaki standart limit kuralları diziler için de sağlanır. $\{a_n\}$ ve $\{b_n\}$ yakınsak reel sayı dizisi, $\alpha$ herhangi reel sabit olmak üzere ve $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ ise

1) Limit varsa tektir

2) $\lim_{n\to\infty} \alpha . a_n = \alpha . \lim_{n\to\infty} a_n = \alpha a$

3) $\lim_{n\to\infty} (a_n \mp b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \mp \lim_{n\to\infty} b_n = a \mp b$

4) $\lim_{n\to\infty} (a_n . b_n) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) . \left(\lim_{n\to\infty} b_n\right) = a . b$

5) $\lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{a_n}{b_n}\right) = \dfrac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \dfrac{a}{b}$ $\left(\lim_{n\to\infty} b_n = b \neq 0 \text{ olmak koşuluyla}\right)$

6) Her $n \in Z^+$ için

$$a_n \leq b_n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n \Rightarrow a \leq b$$

7) Her $n \in Z^+$ için $a_n \leq b_n \leq c_n$ ve $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = a$ ise

$\lim_{n\to\infty} b_n = a$ 'dır. (Sandoviç teoremi)

Diziler için sürekli fonksiyon teoremi:

$\{a_n\}$ bir reel sayı dizisi olsun. Eğer $\{a_n\}$ dizisi $L$ limitine yakınsıyor ve $f$ fonksiyonu da her $\{a_n\}$ de tanımlı olup $L$'de sürekli ise $f(a_n)$ de $f(L)$ limitine yakınsar

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

$f$, $\forall a_n$'de tanımlı ve $L$'de sürekli ise $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(L)$

ÖRNEKLER

1) $\{a_n\} = \left\{\dfrac{2n^2-n-1}{5n^2+n-3}\right\}$ dizisinin limitini bulunuz.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2-n-1}{5n^2+n-3} \rightarrow \text{yakınsak}$$

$$= \frac{2}{5}$$

2) $\{a_n\} = \left\{\dfrac{\cos n}{n}\right\}$ dizisinin limiti = ?

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\cos n}{n}$$

$$-1 \leq \cos n \leq 1$$

$$\frac{-1}{n} \leq \frac{\cos n}{n} \leq \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{-1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right) = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cos n}{n} = 0 \quad //$$

3) $\{a_n\} = \{\sqrt{n^2+2n} - n\}$ dizisinin limiti = ?

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2n} - n\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right)\cdot\left(\sqrt{n^2+2n}+n\right)}{\left(\sqrt{n^2+2n}+n\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}+2n-\cancel{n^2}}{\sqrt{n^2+2n}+n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2\cancel{n}}{\cancel{n}\left(\sqrt{1+\cancel{\frac{2}{n}}^{\,0}}+1\right)} = 1$$

4) $\lim_{n\to\infty} \underbrace{\sqrt{4+\frac{1}{n^2}}}_{b_n} = 2$ olduğunu gösteriniz.

$\boxed{a_n} \leq b_n \leq \boxed{c_n}$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \ell$$

$$\sqrt{4+\frac{1}{n^2}} \leq \sqrt{4+\frac{1}{n^2}+\frac{4}{n}} = 2+\frac{1}{n}$$

$$2 \leq \sqrt{4+\frac{1}{n^2}} \leq 2+\frac{1}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} 2 = \lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right) = 2$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{4+\frac{1}{n^2}}\right) = 2$$

5) $\lim_{n\to\infty} n \cdot \arctan\frac{1}{n} = ? \to 0.\infty$

$= \lim_{n\to\infty} \dfrac{\arctan\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \to \frac{0}{0}$

$= \lim_{n\to\infty} \dfrac{\frac{-1/n^2}{1+(1/n)^2}}{-\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2} = 1$ //

6) $\{a_n\} = \{\sin n\pi\}$ dizisi yakınsak mıdır?

$\forall n$ için $\sin n\pi = 0$ olacağından $\{a_n\}$ dizisinin limiti sıfırdır ve yakınsaktır.

**TEOREM:** Bir $a_n$ dizisi yakınsak ise sınırlıdır. Ancak teoremin tersi doğru değildir.

$\{(-1)^n\} = \{-1, 1, -1, 1, \ldots\}$

→ dizi sınırlıdır

→ fakat yakınsak değildir.

**TEOREM:** Eğer bir $a_n$ dizisi monoton artan ve üstten sınırlı ise (monoton azalan ve alttan sınırlı ise) $a_n$ dizisi yakınsaktır.

**ÖR** ⇒

$\{a_n\} = \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ dizisinin limiti=?

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to 1^\infty$ ⇒ Her tarafın ln'i alınır.

$y = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

$\ln y = \lim_{n\to\infty} \ln\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right] = \lim_{n\to\infty} n \cdot \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)_{\to 0.\infty} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{1/n} \to \frac{0}{0}$

$= \lim_{n\to\infty} \dfrac{\frac{-1/n^2}{1+1/n}}{-1/n^2}$

$= \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1 \Rightarrow \ln y = 1$

$\boxed{y = e}$

## Bazı Önemli Limitler

1) Eğer $x>0$ ise $\lim_{n\to\infty} x^{1/n} = 1$

2) Eğer $|x|<1$ ise $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$

3) Her $\alpha>0$ $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$

4) Her $x\in\mathbb{R}$ $\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$

5) $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$

6) $\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1$

7) Her $x\in\mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

8) $a>1$ ise $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n} = \infty$

$a>1$ ve $p\in\mathbb{N}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n^p} = \infty$$

## SERİLER

Bir dizinin terimlerinin toplamından oluşan ifadeye seri denir.

$\{a_n\} = \{a_1, a_2, ---, a_n, ---\}$

$$a_1 + a_2 + --- + a_n + --- = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

↳ serinin genel terimi

$\{a_n\} = \{\frac{1}{n}\}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ---$$

**NOT**

Serilerde ilk terimin 1'den başlamak gibi bir zorunluluğu yoktur.

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + ---$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n} = \frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + ---$$

$\alpha \sum_{n=3}^{\infty} a_{n-2} = \sum_{m=1}^{\infty} a_m$

$\alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$

## KISMİ TOPLAMLAR DİZİSİ VE YAKINSAKLIK

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin $\{S_n\}$ ile gösterilen kısmi toplamlar dizisi aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\left.\begin{aligned} S_1 &= a_1 \\ S_2 &= a_1 + a_2 \\ S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ &\vdots \\ S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n \\ &\vdots \end{aligned}\right\}$$

$\{S_n\} = \{S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots\}$ kısmi toplamlar dizisi

$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ toplamına da serinin n. kısmi toplamı denir.

Eğer $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ ise o zaman $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi $S$ toplamına yakınsıyor denir. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$ ile ifade edilir. Benzer şekil de $\{S_n\}$ dizisi ıraksak veya $\mp\infty$ ise seride ıraksaktır.

**NOT**

Sonsuz bir serinin baş tarafına sonlu sayıda terim eklenmesi veya yine baş tarafından sonlu sayıda terimin çıkarılması serinin karakterini değiştirmez.

Sonsuz bir serinin her teriminin sıfırdan farklı bir sabit ile çarpılması serinin karakterini değiştirmez.

## Geometrik Seriler:

$\sum_{n=1}^{\infty} a.r^{n-1} = a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + a.r^{n-1} + \ldots$ şeklindeki serilerdir.

$r$ ortak oran

$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} [a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1}]$

$S_1 = a$

$S_2 = a + ar$

$S_3 = a + ar + ar^2$

$\vdots$

$S_n = a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1}$

Geometrik serinin n. kısmi toplamını hesaplayalım.

$$S_n = a + \cancel{ar} + \dots + \cancel{ar^{n-2}} + \cancel{ar^{n-1}}$$

$$rS_n = \cancel{ar} + \cancel{ar^2} + \dots + \cancel{ar^{n-1}} + ar^n$$

$$S_n - rS_n = a - ar^n$$

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

$$= \begin{cases} \frac{a}{1-r} \text{ (yakınsak)} & |r|<1 \\ \text{ıraksak} & |r|>1 \\ \infty\text{'a ıraksar} & r=1 \\ \text{limit yok, ıraksak} & r=-1 \end{cases}$$

$r>1,\ a>0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n \to \infty$

$r>1,\ a<0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n \to -\infty$

$r<-1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} r^n$ mevcut değildir; Dolayısıyla $\lim_{n\to\infty} S_n$ mevcut değildir.

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} a = \underbrace{a+a+a+\dots}_{} \\ &S_n = n\cdot a \\ &\lim_{n\to\infty} S_n \to \infty \end{aligned}\right\} r=1 \text{ için}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a\cdot(-1)^{n-1} = a-a+a-a \dots \quad \} \ r=-1 \text{ için}$$

$\alpha$ $$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = 1+x+x^2+x^3+\dots$$

$a=1$

$r=x$

$|x|<1$

$\alpha$ $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$

$a=1$

$r=\frac{1}{2}$

$|r|<1$

$\alpha$

$\pi - e + \frac{e^2}{\pi} - \frac{e^3}{\pi^2} + \dots = \pi \cdot \left[1 - \frac{e}{\pi} + \frac{e^2}{\pi^2} - \frac{e^3}{\pi^3} + \dots\right]$

$= \sum_{n=1}^{\infty} \pi \cdot \left(-\frac{e}{\pi}\right)^{n-1}$ $\quad a=\pi \quad r=-\frac{e}{\pi} \quad |r| = \frac{e}{\pi} < 1$

$= \frac{\pi}{1+\frac{e}{\pi}} = \frac{\pi^2}{\pi+e}$

$\alpha$

$1+2^{1/2}+2+2^{3/2}+\dots$ serisinin toplamını bulunuz

$1+2^{1/2}+2+2^{3/2}+\dots = 1+2^{1/2}+(2^{1/2})^2+(2^{1/2})^3+\dots$

$= \sum_{n=1}^{\infty}(2^{1/2})^{n-1}$ $\quad a=1 \quad r=2^{1/2}=\sqrt{2}$

$|r|=\sqrt{2}>1$ olduğundan seri $a=1>0$ için $\infty$'a ıraksar.

$\alpha$ $x=0,323232\dots$ serisini geometrik seriden yararlanarak iki tam sayının oranı şeklinde ifade ediniz

$x=0,323232\dots$

$=0,32+0,0032+0,000032+\dots$

$=\frac{32}{100}+\frac{32}{10000}+\frac{32}{1000000}+\dots$

$=32.10^{-2}+32.10^{-4}+32.10^{-6}+\dots$

$=32.10^{-2}\left[1+10^{-2}+10^{-4}+\dots\right]$

$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{32}{100}\left(\frac{1}{10^2}\right)^{n-1} = \frac{32/100}{1-\frac{1}{100}} = \frac{32}{99}$

$a=\frac{32}{100}$

$r=\frac{1}{100}$

$|r|<1 \Rightarrow$

## Teleskopik Seriler:

Eğer Bir serinin kısmi toplamları onun terimlerini basit kesirlere ayırmak suretiyle ifade edilebiliyorsa böyle serilere teleskopik seriler denir.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \left[\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n-1)\cdot n} + \frac{1}{n(n+1)} + \dots\right]$$

$$S_1 = \frac{1}{1\cdot 2}$$

$$S_2 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3}$$

$$\vdots$$

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \dots + \frac{1}{n\cdot(n+1)}$$

$$\frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$A = 1 \quad B = -1$$

$$S_n = \left(1 - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \dots + \left(\cancel{\frac{1}{(n-1)}} - \cancel{\frac{1}{n}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1} \qquad \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left[1 - \frac{1}{n+1}\right] = 1$$

## Harmonik Seriler: → Daima ıraksak

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \dots$$

$$> 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right)}_{2^1.\ \text{terim}} + \underbrace{\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right)}_{2^2.\ \text{terim}} + \dots + \underbrace{\left(\quad\right)}_{2^{n-1}.\ \text{terim}}$$

$$> 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{2} = 1+n\cdot\frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_{2^n} = \lim_{n\to\infty} 1+n\cdot\frac{1}{2} = \infty$$

## Seriler İçin Bazı Teoremler

1) Bir seri yakınsak ise sonsuz için limiti sıfırdır. Tersi doğru değildir.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \to \text{yakınsak} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

2) Bir $a_n$ serisinin yakınsak olması için gerek ve yeterli koşul $N \geq 1$ için $\sum_{k=N}^{\infty} a_k$ serisinin yakınsak olmasıdır.

3) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a$ , $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b$ $\quad \alpha \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n = \alpha a \qquad \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \mp b_n] = \underline{a \mp b}$$

4) Iraksaklık Testi (n. terim testi):

$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ ise $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi ıraksaktır.

**NOT**

$a_n$ serisi yakınsak, $b_n$ serisi ıraksak ise bu iki serinin toplamı veya farkıyla oluşturulan seri ıraksaktır.

**NOT**

$a_n$ ve $b_n$ serileri ıraksak olsalar bile toplamları yakınsak olabilir.

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1 = 1+1+1+\dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1) = (-1)+(-1)+(-1)+\dots$$

ÖRNEKLER

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^{n+1}}{3^n}$ serisinin toplamı=?

$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{3^n}$

$= \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^2}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}}$

$a = \frac{1}{3}$ $\qquad$ $a = \frac{3}{4}$

$r = \frac{1}{3} < 1$ $\qquad$ $r = \frac{2}{3} < 1$

$= \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} + \frac{\frac{4}{3}}{1-\frac{2}{3}}$

$= \frac{1}{2} + 4 = \frac{9}{2}$ //

2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n - 2^n}{6^n} = ? \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{6^n} - \sum_{n=0}^{0} \frac{2^n}{6^n}$

$= \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{6}\right)^{n-1}} - \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{6}\right)^{n-1}}$

$a = 1$ $\qquad$ $a = 1$

$r = \frac{1}{2} < 1$ $\qquad$ $r = \frac{1}{3} < 1$

$= \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - \frac{1}{1-\frac{1}{3}}$

$= 2 - \frac{3}{2}$

$= \frac{1}{2}$ //

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ → Harmonik seri

3) $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \sin\left(\frac{1}{n}\right) = ?$

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} n \cdot \sin\left(\frac{1}{n}\right) \to 0 \cdot \infty$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(1/n)}{1/n} \to \frac{0}{0}$

$= 1 \neq 0$ → ıraksak

## Pozitif Terimli Seriler İçin Yakınsaklık Testleri

1) İntegral Testi: → Logaritmik fonksiyonlarda daha çok kullanılır

İntegral testi pozitif terimli bir serinin kendisine benzer şekilde davranan bir genelleştirilmiş integralle karşılaştırmak suretiyle yakınsak ya da ıraksak olup olmadığını belirlememize yardımcı olur.

Teorem: Bir f fonksiyonu pozitif bir N tamsayısı için $[N,\infty)$ aralığı üzerinde pozitif, sürekli ve azalan bir fonksiyon olmak üzere $f(n)=a_n$ olduğunu kabul edelim. O zaman $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ve $\int_N^{\infty} f(n)\,dn$'in her ikisi ya yakınsaktır ya da ıraksaktır ($N=1$). Bu sonuç serinin toplamının integralin değerine eşit olduğunu söylemez.

ÖRNEKLER

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ → Harmonik seri

$f(n) = a_n = \frac{1}{n}$

$[1,\infty)$ aralığında pozitif, sürekli ve

$f'(n) = \frac{-1}{n^2} < 0$ olduğundan azalan bir fonksiyondur. İntegral testinin şartlarını sağlar.

$\int_1^{\infty} \frac{dn}{n} = \lim_{k\to\infty} \int_1^{k} \frac{dn}{n}$

$= \lim_{k\to\infty} \left[\ln|n| \Big|_1^k\right]$

$= \lim_{k\to\infty} \left(\ln|k| - \cancel{\ln 1}^{\,0}\right)$

$= \ln\infty$

$= \infty$ → seri sonsuza ıraksar.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \to$ p-serisi $(p>0)$

$f(n)=a_n=\frac{1}{n^p}$

$[1,\infty)$ aralığında pozitif, sürekli ve

$f'(n)=-p \cdot n^{-p-1}$

$=\frac{-p}{n^{p+1}}<0$ olduğundan azalan

bir fonksiyondur. İntegral testi uygulanabilir.

$$\int_1^{\infty}\frac{dn}{n^p}=\lim_{k\to\infty}\int_1^{k}\frac{dn}{n^p}=\lim_{k\to\infty}\left[\frac{n^{-p+1}}{-p+1}\Big|_1^k\right]$$

$$=\lim_{k\to\infty}\left[\frac{k^{-p+1}}{-p+1}-\frac{1}{-p+1}\right]$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{p-1} & p>1 \text{ yakınsak}\\ \infty & p\leq 1 \text{ ıraksak}\end{cases}$$

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$ serisinin karakterini inceleyin.

$f(n)=\frac{1}{n^2+1}$

$[1,\infty)$ aralığında pozitif, sürekli ve $f'(n)=\frac{-2n}{(n^2+1)^2}<0$ olduğundan

azalan bir fonksiyondur. İntegral testi uygulanabilir.

$$\int_1^{\infty}\frac{dn}{n^2+1}=\lim_{k\to\infty}\int_1^{\infty}\frac{dn}{n^2+1}$$

$$=\lim_{k\to\infty}\left[\arctan n\Big|_1^k\right]$$

$$=\lim_{k\to\infty}\left[\arctan k-\arctan 1\right]$$

$$=\arctan\infty-\frac{\pi}{4}$$

$$\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}$$

$=\frac{\pi}{4}\to$ yakınsak

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

$f(n) = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

$[1,\infty)$ aralığında sürekli, pozitif ve $f'(n) = \dfrac{-1/n^2}{1+\frac{1}{n}}$

$= \dfrac{-1}{n(n+1)}$

olduğundan azalan bir fonksiyondur. İntegral testi uygulanabilir.

$$\int_1^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)dn = \lim_{k\to\infty}\int_1^{k} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)dn = \lim_{k\to\infty}\left[n.\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\Big|_1^k + \int_1^k \frac{dn}{n+1}\right]$$

$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = u$

$\dfrac{-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}}dn = du$

$dn = dv$

$n = v$

$$= \lim_{k\to\infty}\left[\left(k.\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) - 1.\ln 2\right) + \left(\ln(n+1)\Big|_1^k\right)\right]$$

$$= \lim_{k\to\infty}\left[\underbrace{k.\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)}_{0.\infty} - \ln 2 + \underbrace{\ln(k+1)}_{\infty} - \ln 2\right]$$

$= \infty \to$ ıraksak

$$\lim_{k\to\infty} k.\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$$

$$= \lim_{k\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)}{\frac{1}{k}} = \lim_{k\to\infty}\frac{\frac{-1/k^2}{1+1/k}}{-1/k^2}$$

$$= \lim_{k\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{k}} = 1$$

## 2) Karşılaştırma (Mukayese) Testi:

**Teorem (Doğrudan Karşılaştırma):**

$\sum a_n$ ve $\sum b_n$ pozitif terimli seriler ve $\sum b_n$ seçilen seri olsun.

Eğer her $n$ için $a_n \leq b_n$ ve $\sum b_n$ yakınsak ise $\sum a_n$ de yakınsaktır.

Eğer her $n$ için $a_n \geq b_n$ ve $\sum b_n$ ıraksak ise $\sum a_n$'de ıraksaktır.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{5}{5n-1}}_{a_n}$$

$$a_n = \frac{5}{5n-1} = \frac{1}{\frac{5n-1}{5}} = \frac{1}{n-\frac{1}{5}} > \frac{1}{n} \quad (\forall n \text{ için})$$

$\sum b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ seçildiğinde harmonik seri olduğundan ıraksaktır ve verilen serinin her terimi her $n$ için $\frac{5}{5n-1} \geq \frac{1}{n}$ olduğundan o da ıraksaktır

ÖR $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{n^3+1}$ serisinin karakterini inceleyin.

$$\frac{3n+1}{n^3+1} = \frac{3n}{n^3+1} + \frac{1}{n^3+1} < \frac{3n}{n^3} + \frac{1}{n^3} < \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^2} = \frac{4}{n^2}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \rightarrow$ p-serisi
$p=2>1$ yakınsaktır

Sonsuz bir seriyi sıfırdan farklı bir sabitle çarpmak serinin karakterini değiştirmeyeceğinden $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}$ serisi de yakınsaktır ve verilen serinin her terimi bu serinin karşılığı olan her teriminden küçük kaldığından o da yakınsaktır

ÖR ⇒ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n\sqrt{n}}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e}\left(\frac{1}{e}\right)^{n-1}$$

$$a = \frac{1}{e}$$

$r = \frac{1}{e}$ $|r| < 1$ → yakınsak

$\frac{1}{e^n\sqrt{n}} < \frac{1}{e^n}$ olduğundan seri yakınsaktır

ÖR ⇒ $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1+n\ln n}{n^2+5}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1+n\ln n}{n^2+5}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+n^2\ln n}{n^2+5}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1+2n\ln n+n^2\frac{1}{n}}{2n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1+2n\ln n+n}{2n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n\left[\frac{1}{n}+2\ln n+1\right]}{2n} = \infty$$

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ serisi ıraksak ve verilen seri ile limit karşılaştırma sonucu $\infty$ olduğundan verilen seri de ıraksaktır

TEOREM (Limitle Mukayese)

$\sum a_n$ ve $\sum b_n$, pozitif terimli iki seri olmak üzere $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$ olsun.

i) $L \neq 0, \infty$ ise her iki seri aynı karakterlidir.

ii) $L = 0$ ve $\sum b_n$ yakınsak ise $\sum a_n$ yakınsak

iii) $L \to \infty$ ve $\sum b_n$ ıraksak ise $\sum a_n$ ıraksak

($\sum b_n$ → seçilen seri)

→ Geometrik seri
Harmonik seri
veya
p-serisidir.

## 3) D'Alembert Oran Testi: → Faktöriyelli sorularda kullanılır.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pozitif terimli bir seri ve $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \geq 0$ olsun.

1) Eğer $0 \leq L < 1$ ise seri yakınsaktır.

2) Eğer $L > 1$ ise seri ıraksaktır.

3) Eğer $L = 1$ ise test cevap vermez. (Testin cevap vermediği durumlarda n. terim testi kullanılır)

**ÖR ⇒** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{99^n}{n!}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$a_n = \frac{99^n}{n!}$

$a_{n+1} = \frac{99^{n+1}}{(n+1)!}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{99^{n+1}}{\underbrace{(n+1)!}_{\cancel{n!}(n+1)}} \cdot \frac{\cancel{n!}}{99^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{99}{n+1}$$

$$= 0 < 1$$ → seri yakınsaktır.

**ÖR ⇒** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$a_n = \frac{n^n}{n!}$

$a_{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n \cdot \cancel{(n+1)}}{\cancel{(n+1)} \cdot \cancel{n!}} \cdot \frac{\cancel{n!}}{n^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$= e > 1$$

↳ seri ıraksaktır.

$$\underbrace{\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)}_{\text{Raabe testi}}$$

ÖR ⇒ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!}$

$$a_n = \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!}$$

$$a_{n+1} = \frac{4^{n+1}\left[(n+1)!\right]^2}{\left[2(n+1)\right]!}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4^{n+1}\cdot\left[(n+1)!\right]^2}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{4^n\cdot(n!)^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4\cdot\cancel{(n!)^2}\cdot(n+1)^2\cdot\cancel{(2n)!}}{(2n+2)(2n+1)\cancel{(2n)!}\cdot\cancel{(n!)^2}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4(n^2+2n+1)}{4n^2+6n+2}$$

$= 1 \rightarrow$ test cevap vermez n. terim testi uygulanır.

## 4) Cauchy Kök Testi: → üslü sorularda kullanılır

$\sum a_n$ pozitif terimli bir seri bir seri ve $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$ olsun.

1) $0 \le L < 1$ ise seri yakınsak
2) $L > 1$ ise seri ıraksak
3) $L = 1$ ise test cevap vermez.

**ÖR** ⇒ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{n^n}$ serisinin karakterini belirleyiniz

$$a_n = \frac{2^{n+1}}{n^n} \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^{n+1}}{n^n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2^{\frac{n+1}{n}}}{n^{\frac{n}{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n}$$

$$= 0 < 1$$ → seri yakınsaktır.

**ÖR** ⇒ $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{2^n+5}{3^n}}_{a_n}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n+5}{3^n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(2^n+5)^{1/n}}{3}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left[2^n\left(1+\frac{5}{2^n}\right)\right]^{1/n}}{3} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\left(1+\frac{5}{2^n}\right)^{1/n}}{3}$$

$$= \frac{2}{3} < 1$$ → seri yakınsaktır.

**ÖR** ⇒ $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{2^n}{n^2}}_{a_n}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{n^2}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\underbrace{n^{2/n}}_{\text{belirsizlik}}} = \frac{2}{1} = 2 > 1$$

↓ seri ıraksaktır.

$$y = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{2}{n}} \Rightarrow \ln y = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} \ln n$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2 \ln n}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2 \cdot \frac{1}{n}}{1}$$

$$= 0 \Rightarrow \ln y = 0$$

$$y = e^0 = 1$$

## 5) Raabe Testi

$\sum a_n$ pozitif terimli serisi için

$$\lim_{n\to\infty} n.\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=L$$

olsun. i) $L>1$ ise $\sum a_n$ serisi yakınsaktır.

ii) $L<1$ ise $\sum a_n$ serisi ıraksaktır.

**Örnek:** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(x+1)\ldots(x+n)}$ $(x>0)$

serisinin karakterini belirleyiniz.

**Çözüm:**

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{(x+1)\ldots(x+n+1)}\cdot\frac{(x+1)\ldots(x+n)}{n!}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{x+n+1}=1$$

$$\lim_{n\to\infty} n.\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x+n+1}{n+1}-1\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}x=x$$

olduğundan seri $x>1$ için yakınsak, $x<1$ için ıraksaktır.

## Değişik İşaretli Seriler

Terimlerinin bir kısmı negatif bir kısmı ise pozitif reel sayılardan oluşan serilere değişik işaretli seriler denir. Özel olarak, serinin terimleri bir pozitif ve bir negatif veya bir negatif bir pozitif olan seriye "alternatif (alterne) seri" denir. Verilen herhangi bir değişik işaretli seriden onun tüm terimlerini mutlak değerleri ile değiştirerek daima pozitif terimli bir seri elde edebiliriz.

→ Mutlak Yakınsaklık:

Eğer $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ serisi yakınsak ise $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin mutlak yakınsak olduğu söylenir.

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$

$\sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^n a_n|$ → yakınsak ise alterne seri mutlak yakınsak

⇒ Alterne seri ıraksak ise alterne seri testi uygulanır.

Alterne Seri Testi

1) $a_{n+1} < a_n$

2) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Alterne seri yakınsak

3) Mutlak değerlerden oluşan seri ıraksak olduğundan alterne seri şartlı yakınsaktır.

∝ Değişik işaretli serinin (alterne değil) mutlak değerlerinden oluşan seri yakınsak ise değişken işaretli seri mutlak yakınsak, ıraksak ise ıraksaktır.

ÖR $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2+1}$ → alterne seri

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n^2+1} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ $\qquad$ $\frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2}$ ($\forall n$ için)

p-serisi $\qquad \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ 'de yakınsaktır.

$p = 2 > 1$ yakınsak

O halde alternatif seri mutlak yakınsaktır.

Teorem :

Mutlak yakınsak bir seri yakınsak. (Teoremin tersi doğru değildir)

ÖR $\Rightarrow$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ → alternatif harmonik seri.

$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ → harmonik seri ıraksak

Alternatif seri testine göre;

1) $a_{n+1} \overset{?}{<} a_n$ ✓ $\qquad$ 2) $\lim_{n\to\infty} a_n \overset{?}{=} 0$

$a_n = \frac{1}{n}$ $\qquad$ $n \leq n+1$ $\qquad$ $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

$a_{n+1} = \frac{1}{n+1}$ $\qquad$ $\frac{1}{n} \geq \frac{1}{n+1}$

3) Alternatif seri yakınsaktır. Mutlak değerle oluşan seri ıraksak olduğundan şartlı yakınsaktır.

> Bir seride $\cos n\pi$ ifadesi varsa alterne seridir.

**Ör** → $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot n!}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n n!} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n n!}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)(n+1)!}}{\frac{1}{n \cdot n!}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n \cancel{n!}}{(n+1)(n+1)\cdot \cancel{n!}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{(n+1)^2}$$

$= 0 < 1 \rightarrow$ yakınsaktır.

↳ O halde verilen alterne seri mutlak yakınsaktır

**Ör** ⇒ $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{\ln n} = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 4} - \dots$

$= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n} \rightarrow$ alternatif seri

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{\ln n} \right| = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$$

$n > \ln n$

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ ıraksak $\quad \frac{1}{n} < \frac{1}{\ln n} \quad (\forall n$ için$)$

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ ıraksaktır

Alternatif seri testine göre;

1) $a_{n+1} \overset{?}{<} a_n$ ✓

$n < n+1$

$\ln n < \ln(n+1)$

$\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{\ln(n+1)}$

$a_n > a_{n+1}$

2) $\lim_{n\to\infty} a_n \overset{?}{=} 0$ ✓

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} = 0$

3) Alternatif seri yakınsaktır

Mutlak değerlerden oluşan seri ıraksak olduğundan şartlı yakınsaktır.

**Ör** ⇒ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{n+1}{n}$ → alternatif seri

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n-1} \cdot \frac{n+1}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{1/n}$$

$= e > 1$ → ıraksak

Alternatif seri testine göre;

1) $a_{n+1} \overset{?}{<} a_n$ ✓

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \overset{?}{<} 1 \Rightarrow \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{n}{n+1} = \frac{n^2+2n}{n^2+2n+1} = 1 - \frac{1}{n^2+2n+1} < 1$$

2) $\lim_{n\to\infty} a_n \overset{?}{=} 0$ ×

$\lim_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{n} = 1 \neq 0$ Alternatif seri ıraksaktır

(yakınsak olması için her iki şartın da sağlanması gerekirdi.)

**Ör** ⇒

$$a_n = \begin{cases} 1/n & n \text{ tek ise} \\ -1/n^2 & n \text{ çift ise} \end{cases}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6^2} + \cdots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{(2n)^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2n-1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2} \neq 0, \infty$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(2n)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{-n^2}{(2n)^2} = -\frac{1}{4} \neq 0, \infty$$

$a_1 = 1$

$a_2 = \frac{1}{4}$

$a_3 = \frac{1}{3}$

Alternatif seri testine göre;

1) $a_{n+1} \overset{?}{<} a_n$

$a_2 < a_3$

Terimler azalarak gitmiyor.

Alternatif seri ıraksaktır.

## Serilerde Terimlerin Yeniden Düzenlenmesi

Mutlak ve şartlı yakınsak seriler arasındaki temel fark $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi mutlak olarak yakınsak ise o zaman yakınsaktır. Eğer seriyi yakınsak yapmak için kısıtlamalar yapmak gerekiyorsa seri sadece şartlı olarak yakınsaktır.

Eğer bir seri mutlak yakınsak ise o zaman pozitif terimlerden oluşan alt seri ve negatif terimlerden oluşan alt serilerin her biri sonlu bir toplama yakınsamalıdır.

Eğer bir seri şartlı yakınsak ise o zaman pozitif ve negatif terimlerden oluşan alt serilerin her ikiside ıraksaktır; sırasıyla $+\infty$ ve $-\infty$'a ıraksarlar.

Soru- Eğer verilen yakınsak bir serinin terimlerini farklı bir sıralamayla toplanacak şekilde düzenlersek, bu yeni düzenlenmiş seri yakınsak mıdır? Eğer yakınsak ise verilen orjinal serinin toplamına mı yakınsar?

Cevap- Orjinal serinin mutlak veya şartlı yakınsak olup olmadığına bağlıdır.

Eğer mutlak yakınsak bir seri ise orjinal serinin yakınsadığı toplama yakınsar.

Eğer bir seri şartlı olarak yakınsaksa ve eğer L herhangi bir reel sayı ise o zaman serinin terimleri L toplamına (şartlı olarak) yakınsayacak şekilde yeniden düzenlenebilir. Aynı terimler toplamı $+\infty$ veya $-\infty$'a ıraksayacak şekilde ya da sadece ıraksayacak şekilde sıralanabilir.